

**MINI-CURSO:**

**O USO DE NUMERAÇÃO E ÁBACOS HIBEROAMERICANOS NA  
EDUCAÇÃO BÁSICA.**

Eduardo Sebastiani Ferreira: [esebastiani@uol.com.br](mailto:esebastiani@uol.com.br)

Rosa Maria Machado: [rosa.unicamp@gmail.com](mailto:rosa.unicamp@gmail.com)

Ariane Paiva: [arianepaiva91@hotmail.com](mailto:arianepaiva91@hotmail.com)

Otília Terezinha Wiermann Paques: [otilia@ime.unicamp.br](mailto:otilia@ime.unicamp.br)

Miriam Sampieri Santinho: [msantinho@uol.com.br](mailto:msantinho@uol.com.br)

Maria Zoraíde Martins Costa Soares: [mzsoares@uol.com.br](mailto:mzsoares@uol.com.br)

**LABORATÓRIO DE ENSINO DA MATEMÁTICA-LEM / IMECC  
UNICAMP**

**INTRODUÇÃO**

Ao se introduzir na educação básica outro sistema de numeração e como operar com esses diferentes do Hindú-Arábico, só é contemplado os egípcios, babilônios, romanos raramente o grego e o chinês. É raro a contemplação dos sistemas criados pelos povos da América Pré-Colombiana como os Incas, os Astecas e os Maias. Esses povos viveram no nosso continente e são tratados como não se existissem, ou que não usaram numerações hindus-arábicas, trazidas pelos colonizadores.

Apesar da pouca literatura que temos, atualmente conhecemos algumas numerações e ábacos criados em nosso continente, realmente elaborados e que podem contribuir para a compreensão histórica tanto da matemática como de nossa história.

O objetivo desse mini-curso é tratar dessas numerações e ábacos, pelo menos dos que dispomos de registros, que acreditamos será de grande utilidade na educação básica. Além disso, apresentaremos o Katyba do grupo indígena Wamiri-Atroari localizado no norte do Brasil.

**TEMAS**

Desenvolveremos os seguintes temas: numeração maia, numeração incaica e numeração asteca. Dentro desses temas trabalharemos tanto com essas numerações como operá-las com elas. Usaremos alguns ábacos utilizados por esses povos como: o Quipu e o Yupana.

A proposta é que os participantes construam esses ábacos de maneira simples e saibam trabalhar com eles, motivando os para que possam utilizá-los em suas aulas de matemática. Para isso, além de tomar conhecimento dessas numerações, saber operar e construir os ábacos utilizados por esses povos usaremos várias atividades.

## MAIAS

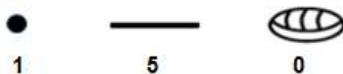
A civilização Maia viveu no sul e sudoeste do México (que correspondem aos estados de Yucatán, Campeche, Tabasco, Quintana Roo e zona oriental de Chiapas) e em partes da Guatemala, Honduras e Belize. Este extenso território compreendia aproximadamente  $350.000 \text{ km}^2$ .



**Figura 01:** Localização geográfica da Civilização Maia

### Sistema de numeração posicional vigésimal dos Maias

Especificamente na Matemática a civilização Maia criou um sistema de numeração na base 20 baseado na posição utilizando três símbolos, que incluía a utilização do número zero (um símbolo ovalado).



A associação destes três símbolos possibilitou a construção da representação do sistema de numeração dos Maias.

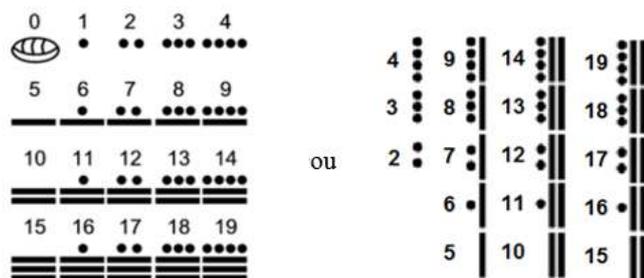


Figura 02: Representação dos numerais Maias.

Para o sistema de numeração da civilização Maia era muito importante compreender o nível que o numeral ocupava para poder compreender o valor que este representava. Assim, agrupar de 20 em 20 significa que a quantidades são agrupadas de 20 em 20 e no primeiro nível deveremos colocar qualquer número de 0 a 19 que é o valor máximo que se pode representar em cada nível do sistema vigésimal. Propomos um quadro abaixo para percebermos como acontecia essas divisões de níveis de posição e adição se escrevendo no sentido de baixo para cima; tinham vários (ou ordem) com que se escrevia as grandes quantidades.

4ª ordem	$d \times 20^3 + c \times 20^2 + b \times 20^1 + a \times 20^0$
3ª ordem	$c \times 20^2 + b \times 20^1 + a \times 20^0$
2ª ordem	$b \times 20^1 + a \times 20^0$
1ª ordem	$a \times 20^0$

Exemplos:

Dados os quadros abaixo, escrever o número no sistema de numeração decimal:

a)

2º nível	•	O número representado no sistema decimal é:
1º nível	•	

b)

2º nível	•••	O número representado no sistema decimal é:
1º nível		

c)

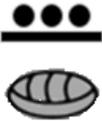
3º nível	•	O número representado no sistema decimal é:
2º nível	—	
1º nível		

d)

4º nível		O número representado no sistema decimal é:
3º nível		
2º nível		
1º nível		

Após explorarmos como a civilização Maia posicionava o seu sistema de numeração propomos a seguir algumas atividades para serem exploradas nas salas de aula, baseada em FARMER, J. D. & POWERS, R. A. (2005). Os referidos autores propõem atividades explorando a base 20 (Maia) e o sistema de numeração decimal.

Atividade 1: Relacionar a representação Maia aos números hindu-arábico:

	3		29
	7		41
	10		75
	19		101
	20		160
	22		

Atividade 2: Qual o numeral maia para 352?

Atividade 3: E para 400?

Atividade 4: Representar no sistema de numeração Maia os seguintes números:

- a) 7227
- b) 73.454
- c) 102.245

## Códice de Dresden

Os códices maias são livros desdobráveis (em zig-zag) da época da civilização maia pré-colombiana (século V), escritos por escribas em um papel produzido a partir da casca de algumas árvores. Este papel era chamado *huun* pelos maias. Foram encontrados quatro códice maia. Geralmente, eles ficaram conhecidos pelo nome da cidade onde eles se encontram: Códice de Dresden (Alemanha), Códice de Madrid (Espanha), Códice de Paris (França) e Códice Grolier (Estados Unidos que atualmente encontra-se desaparecido).

O Códice de Dresden é geralmente considerado o mais importante dos poucos que ainda restam da maioria que foram destruídos pelos espanhóis durante a invasão da América Latina. Ele contém 39 folhas escritas em ambos os lados e tem aproximadamente 3,6m de comprimento.



Figura 03: Códice de Dresden

De acordo com Ifrah (1994), por exemplo, na página 24 do Códice de Dresden é possível reconhecer os caracteres maias do sistema de numeração.

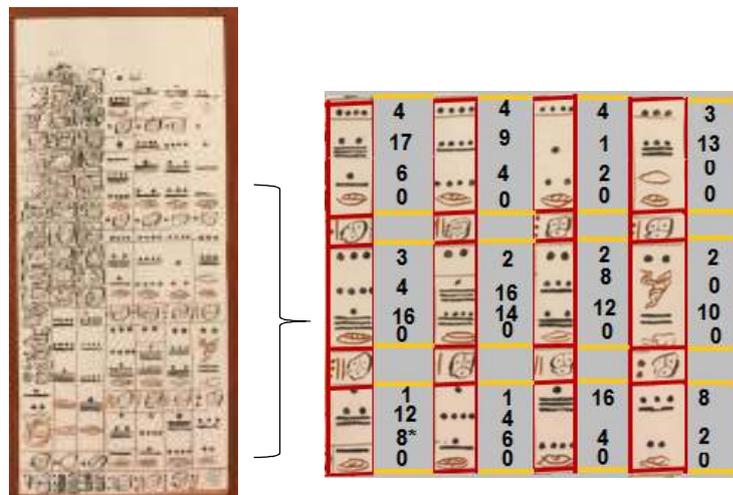


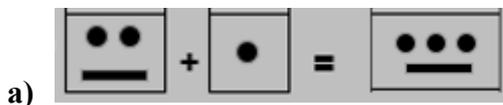
Figura 04: Códice de Dresden na página 24

### As operações

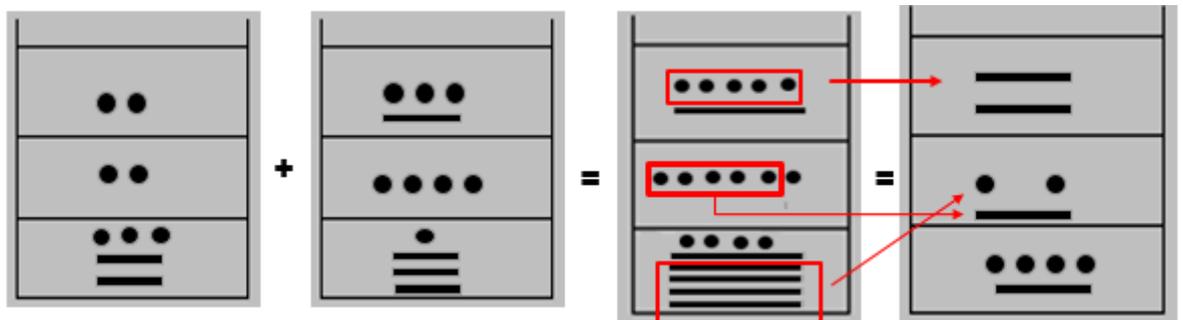
Acreditamos que para entender a precisão dos cálculos que normalmente se realizava para pagar impostos, marca do tempo, eventos astronômicos entre outras coisas, é interessante elaborar um quadro como suporte para realizar as operações.

4° nível		
3° nível		
2° nível		
1° nível		

### Adição



b)



No sistema decimal, o resultado encontrado será:

$20^2$		$10 \times 20^2 \rightarrow 10 \times 400 = 4000$	
$20^1$		$7 \times 20^1 \rightarrow 7 \times 20 = 140$	
$20^0$		$9 \times 20^0 \rightarrow 9 \times 1 = 9$	<b>= 4149</b>

### Subtração

No sistema decimal, o resultado encontrado será:

$20^2$	● ●	$2 \times 20^2 \rightarrow 2 \times 400$
$20^1$	● ● —	$7 \times 20^1 \rightarrow 7 \times 20$
$20^0$	● ● —	$7 \times 20^0 \rightarrow 7 \times 1$ <b>= 947</b>

### Multiplicação

Fazer as seguintes multiplicações:

X	1	2	3	4	5
1	●	●●	●●●	●●●●	—
2	●●				
3	●●●				
4	●●●●				
5	—				

### Divisão

Exemplo: Divida 300 por 20

— — —		●	
⊖	÷	⊖	— — —

### Atividades

1. Escrever em numeração maia: 134, 4578, 378 e 12.389.
2. Escrever na numeração maia um número que tenha o zero no nosso sistema de numeração decimal e não tenha no sistema de numeração dos Maias e reciprocamente.
3. Efetuar:
  - a)  $245 + 568$
  - b)  $1468 + 357$
  - c)  $356 - 125$
  - d)  $4567 - 1359$
4. Escrever o quadro da multiplicação na numeração Maia.

X	•	••	•••	••••	-	=	≡
•							
••							
•••							
••••							
-							
=							
≡							

### INCAS



O império inca desenvolveu-se na região da Cordilheira dos Andes, com maior predominância no Peru, mas se estendendo à Bolívia, Chile e Equador, no período de 1.250 a 1.532 (antes da conquista Espanhola).

Seu sistema de numeração era de base dez e isto refletia na forma de organização social do povo como podemos constatar no texto abaixo:

“ en la base de la pirámide económico-social del império estaba el puric o trabajador raso. Diez de estos purics (una cancha) estaban el mando de um cancha-camayo. Por cada diez cancha-camayos habia um pachaca-curaca o capataz. Cada decena de capataces obedecia órdenes de um supervisor. Continuaba la jerarquía com el hono-curaca o jefe principal de tribu, seguia el gobernador de la província y más arriba el mandatário de uno de los cuatro cuarteles em que se dividía el império. Em la cúspide de la pirámide aparecia la figura omnipotente del Sapa Inca o emperador”. (Pareja, 1986-p.42).

## Quipu

O quipu, constituído por um conjunto de cordas, era utilizado para registrar contas, armazenar e transportar informações, proveniente, por exemplo, de contagem (estocagem, mineração, mão de obra) ou de bens.

Podiam constituir um livro contábil ou ainda conter datas importantes da história, da música, de leis e de tratados de paz. O quipu foi também um instrumento de cálculo, pelo menos para a adição. Possuíam de 3 a 2000 cordas, de 20 a 50 cm de comprimento cada uma. As cordas penduradas tinham nós (quipu na língua quechua) simples, duplos ou triplos, etc... Na corda pendurada o nó mais próximo da corda principal, correspondia ao valor maior do número representado.

Os *quipucamayocs* eram os guardiões dos quipos. O uso do quipu também pode ter ocorrido na China, África ocidental e Europa e destacamos que os incas não conheciam a escrita.



Figura 04: Capa do livro O Contador (Yupana e Quipu)<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Imagem no site: [www.pueblosoriginarios.com](http://www.pueblosoriginarios.com) – Tomado de Guaman Poma Ayala (1615).

## Atividades

1. Fazer no quipu o nó simples, o nó longo e o nó em oito



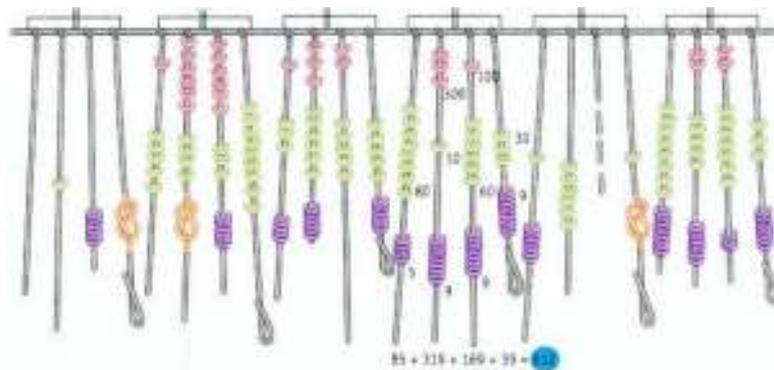
Nó em 8- representa uma unidade  
 Nós simples -representa as potências de 10  
 Nós longos- o número de voltas equivale ao número de unidades.

([www.youtube.com/watch?v=pMcEqcSjTgw](http://www.youtube.com/watch?v=pMcEqcSjTgw))

2. Representar no quipu os números, 325, 351, sua idade e o dia no seu nascimento.

<https://www.youtube.com/watch?v=pMcEqcSjTgw>

3. Identificar os números marcados no quipu<sup>2</sup>.



## Yupana

Este ábaco inca era usado como complemento do quipu. “Yupay” significa contar em quéchua. Esta representação, encontrada em uma vasilha, mostra uma yupana, que serve para a contagem. Existem várias interpretações sobre os possíveis cálculos realizados, utilizando a yupana. Nas atividades a seguir, utilizamos o enfoque didático de William Burns Glynn que encontra-se em: [http://cmapspublic2.ihmc.us/rid=1J2NH8QTM-2912G6-PZ5/yupana como herramienta pedagogica.pdf](http://cmapspublic2.ihmc.us/rid=1J2NH8QTM-2912G6-PZ5/yupana%20como%20herramienta%20pedagogica.pdf).

<sup>2</sup>Imagem no site <http://philippelopes.free.fr/QuipusNoeudsLelandLocke.jpg>



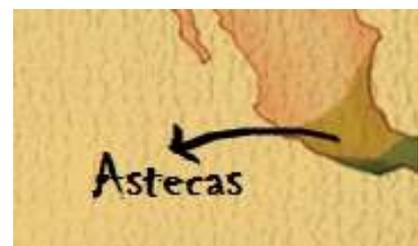
Figura 05: Representação em uma vasilha<sup>3</sup>.

Atividade 4:

- a) Representar na Yupana o número 387 ([https://www.youtube.com/watch?v=Mz1rdfb-S\\_A](https://www.youtube.com/watch?v=Mz1rdfb-S_A))
- b) Adição na Yupana:  $49 + 75$  (<https://www.youtube.com/watch?v=wRkNyM1SAsY>)
- c) Subtração na Yupana:  $525 - 228$  (<https://www.youtube.com/watch?v=sQJWtTkV7Qg>)
- d) Multiplicação na Yupana:  $318 \times 27$
- e) Divisão na Yupana:  $\frac{81}{3}$ . (<https://www.youtube.com/watch?v=d3ocekh6M9k>)
- f) Potenciação na Yupana:  $p^n = \underbrace{100 \dots 0}_{n\text{-zeros}} (p)$  (<https://www.youtube.com/watch?v=Tz49FijAEgY>)

## ASTECCAS

A civilização Asteca se desenvolveu na região central do atual México, entre os anos de 1.325 e 1.521.



O sistema de numeração asteca é base vigesimal e não posicional, podemos observar o registro deste número no Códice de Mendonza, onde anotavam tributos a serem pagos aos espanhóis relativo a sete cidades.

<sup>3</sup> Micelli, M.L et alii (2012-p. 24)



Temos o ponto e/ou dedo representando uma unidade. A bandeira representando 20 unidades. A pluma representando 400 unidades e a bolsa representando 8.000 unidades.

### Códice de Mendonza



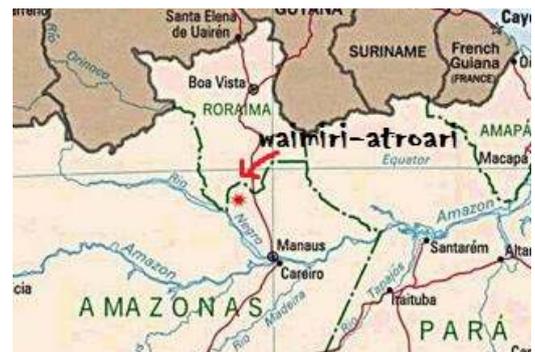
Figura 06: Códice de Mendonza – década de 1540.

**Atividade:** Identificar o valor de cada objeto



## WAIMIRIS-ATROARIS

Os Waimiris-Atroaris são um grupo indígena que habita o Sudeste do estado brasileiro de Roraima e o Nordeste do estado brasileiro do Amazonas



O matemático e historiador Ferreira <sup>4</sup> (2004), escreveu sobre “Os Waimiri-Atroari e a etnomatemática” e relata sobre a marcação de datas dessa aldeia:

*“Esta nação indígena habita o norte do estado do Amazonas e parte de Roraima. A festa mais importante para os waimiri-atroari é o Maryba,*

<sup>4</sup> Prof. Dr, Eduardo Sebastiani Ferreira-Imecc-Unicamp

*iniciação do índio ainda criança, cerca de 5 anos... Essa festa dura três dias...*

*O pai do indiozinho que será iniciado confecciona os convites para a festa e os leva de aldeia em aldeia para os respectivos caciques.*

*Este convite é o katyba, que é feito de tiras de taquara com um lado lustroso e outro opaco. Essas tiras são amarradas com cipó e é feito um corte em duas delas.*

*Quando o cacique de uma aldeia recebe, ele passa o período que se segue até o evento virando, uma por dia as taquaras para o lado opaco.*

*Quando chega na primeira marca é o sinal de que toda a sua aldeia deve preparar as comidas – são os convidados que levam as comidas.*

*A segunda marca indica que devem iniciar a caminhada até a aldeia onde a comemoração será realizada.*

*Como as aldeias estão espalhadas pela reserva, cada katyba é diferente, pois o tempo que leva para ir de uma a outra é diferente”.*

### **O Katyba**



### **Bibliografia**

- ARELLANO, A. *Maya Mathematics and Science*. Math 163, June 6. Disponível em: [https://math.ucsd.edu/programs/undergraduate/history\\_of\\_math\\_resource/history\\_papers/math\\_history\\_07.pdf](https://math.ucsd.edu/programs/undergraduate/history_of_math_resource/history_papers/math_history_07.pdf). Acesso em: 20 de fevereiro de 2014.
- CAUTY, A. & HOPPAN, J. M. *Os dois zeros maias*. São Paulo: Scientific American Brasil-especial Ethnomatemática, p. 16-19.
- FARMER, J. D. & POWERS, R. A. *Exploring Mayan numerals*. Reston, VA: Teaching Children Mathematics, September 2005.

- FERREIRA, E. S. *Racionalidade dos índios brasileiros*. Scientific American Brasil n.11.Especial Etnomatemática. P.91.
- FERREIRA, E. S. (2004) *Os Waimiri-Atroari e a etnomatemática*. In: Knijnik, G et al. (Org.). Etnomatemática, currículo e formação, Santa Cruz do Sul: Edunisc.
- IFRAH, G. *Histoire Universelle des chiffres*, Paris: Robet Laffont, 1994.
- MARTEL, E. M. F. & VILLALÓN, Á. F. T. (2004) *Los sistemas de numeración maya, azteca e inca*. Lecturas Matemáticas, vol. 25, p 159-190. Disponível em: [http://faces.unah.edu.hn/arqueo/images/stories/docs/Documentos\\_en\\_Linea/numeracion](http://faces.unah.edu.hn/arqueo/images/stories/docs/Documentos_en_Linea/numeracion). Acesso em: 20 de fevereiro de 2014.
- MANGIN, L. *O Enigma dos quipos*. Scientific American Brasil n.11.Especial Etnomatemática.p 23, 2005.
- MICELLI, M. L. & CRESPO, C. R. C. (2012) *Ábacos de América Prehispânica*. Bogotá: Revista Latinoamericana de Etnomatemática, vol. 5 n.01, febrero-julio de 2012, p. 159-190.
- VALERO; N. & CONSTANZA, L. C. (2012) *LA YUPANA COMO HERRAMIENTA PEDAGÓGICA EN LA PRIMARIA*;Universidad Pedagógica Nacional. Disponível em [http://cmapspublic2.ihmc.us/rid=1J2NH8QTM-2912G6-PZ5/yupana\\_como\\_herramienta\\_pedagogica.pdf](http://cmapspublic2.ihmc.us/rid=1J2NH8QTM-2912G6-PZ5/yupana_como_herramienta_pedagogica.pdf). Acesso em 14 abril de 2014.
- PAREJA, D. (1986) in Revista Latinoamericana de Etnomatemática vol5 n.1 febrero-julio de 2012 p.176

Imagem quipoLeland Locke <http://philippelopes.free.fr/QuipusNoeudsLelandLocke.jpg>