

MINI – CURSO

VII BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Autor: Prof. Dr. Francisco Regis Vieira Alves

**Título: A Curva de Bézier e os Polinômios de Berstein:
aplicações com o Softwares GeoGebra e o CAS Maple**



Pierre Etienne Bézier (1910–1999)



Sergei Natanovich
Bernstein



Sumário

1. Curva de Pierre Bézier e os polinômios de Bernstein
2. Algumas propriedades dos polinômios de Bernstein
3. Avanços na Tecnologia atual
4. Exemplos de uso dos softwares GeoGebra e o CAS Maple

1. A Curva de Pierre Bézier e os polinômios de Bernstein



Do ponto de vista histórico, o que hodiernamente é conhecido como curva de Bezier foi objeto de um estudo quase concomitante, no contexto da indústria automotiva, por parte de um engenheiro da Renault, Pierre Bezier, como também, por parte do matemático e físico P. Casteljau (GUILLOT, 2008, p. 3). Seu uso pode ser evidenciado há décadas em vários ramos de pesquisa (PRICOPIE & UDRISTE, 2013; YANG, 2013), como em Matemática Aplicada, Indústria Automobilística, Arquitetura e Design Computacional (DUCAN, 2005; FARIN, 1986; FORREST, 1972; WATT, 2000).

Por outro lado, nossa discussão busca enfatizar uma abordagem para o ensino no contexto do Cálculo, elegendo a visualização como componente imprescindível, tendo em vista a mobilização de um entendimento, por parte do estudante, de natureza intuitiva e tácita. Para tanto, destacaremos o *algoritmo de Casteljau*, que permite avaliar um ponto qualquer de uma curva $C^n_i(t)$, correspondentemente ao parâmetro $t \in [0,1]$ (RISKUS, 2006).

O *algoritmo Casteljau* que é formalmente descrito do seguinte modo:

$$\begin{cases} P_i^r(t) = (1-t) \cdot P_i^{r-1}(t) + t \cdot P_{i+1}^{r-1}(t) \\ P_i^0(t) = P_i \end{cases}, \text{ com a condição em que}$$

$$(1 \leq r \leq n \text{ e } 0 \leq i \leq n-r) \text{ (FARIN, 2002, p. 45).}$$

Ele foi empregado para a obtenção da construção que indicamos na figura 1. A descrição anterior é comentada e aplicada, sem ulteriores implicações, por Vainsencher (2009, p. 116-117). Sua abordagem é desenvolvida no contexto de estudo da Geometria Algébrica - GA. Seu intuito é explicado no seguinte excerto:

As curvas de Bezier servem a um propósito semelhante, com certas vantagens computacionais e estéticas. São dados os pontos distintos $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2), P_3 = (x_3, y_3), \dots, P_d = (x_d, y_d)$, mas agora contentamo-nos com uma curva racional que se “ajuste visualmente” à distribuição gráfica dos pontos.

Vale observar o apelo perceptual indicado acima por Vainsencher (2009). Como indicaremos ao longo do mini-curso, a família de polinômios de Bernstein, denotada por

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \left(\frac{n!}{i!(n-i)!} \right) t^i (1-t)^{n-i} \quad (*), \text{ admite e possui uma série de}$$



propriedades formais que, se tornam visuais, na medida em que empregamos a tecnologia. Na figura 1 registramos as possibilidades da tecnologia dos anos 80.

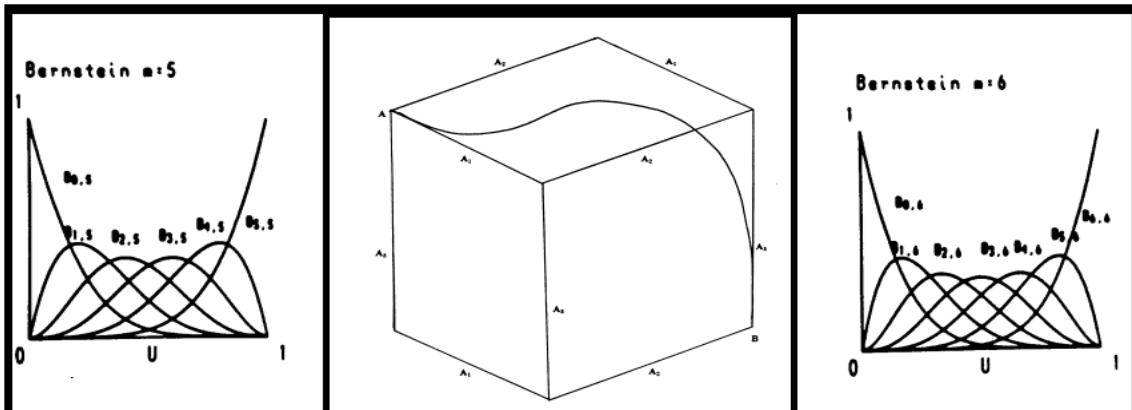


Figura 1. Visualization of a twisted curve inside a rectangular parallelepiped in three-space and the Bernstein's polynomials (BARKSKY, 1985, p. 3-6)

No que concerne à família que indicamos em (*), por exemplo, acentuaremos as suas propriedades relativas: à partição da unidade; seu caráter de recursividade; propriedade de base para espaço vetorial; seu caráter de positividade; seu caráter de simetria; propriedades de aproximação de funções contínuas. Sua formulação foi devida ao matemático Sergei Natanovich Bernstein (1880-1968), nascido em Odessa, na Ucrânia.

Na figura 2, divisamos a aplicação da noção de polinômios de Bernstein para a descrição do *algoritmo de Casteljau*, empregado massivamente na indústria automotiva. Vale observar que tal algoritmo, quando aplicado no espaço IR^3 , produz determinadas deformações. Por outro lado, desde que o conjunto de polinômios de Bernstein constitui também uma base para o espaço vetorial das funções de grau no máximo 'n' podemos, assim, descrever toda curva de Berzier como uma combinação desses elementos (como indicamos em (*)).



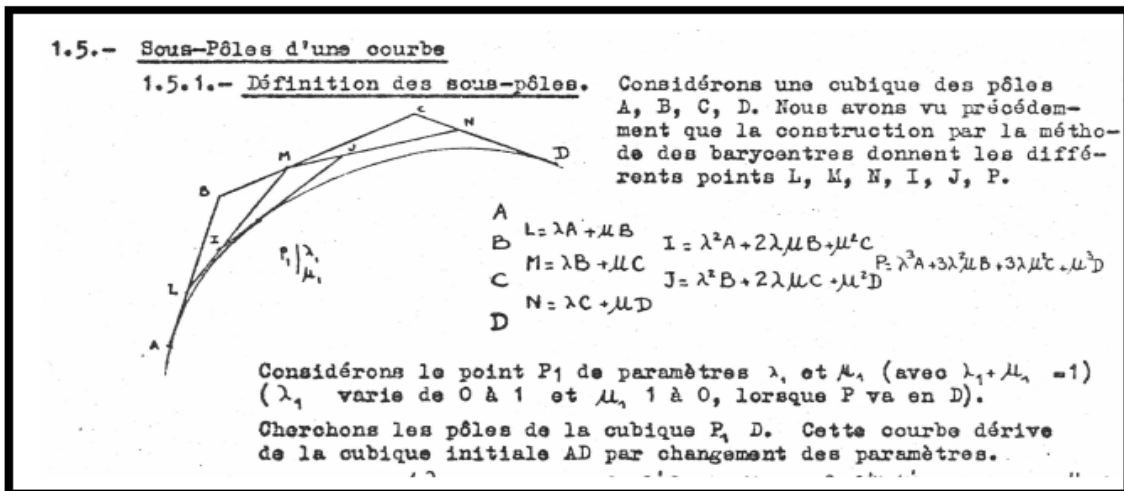


Figura 2. Texto de P. Casteljaou de 1963 que emprega a noção de polinômios de Bernstein (ISMAIL, 2013, p. 9)

A abordagem de Casteljaou é baseada na escolha de pontos de controle. De modo sucinto, para um certo valor $t \in [0,1]$, o algoritmo avalia e subdivide uma curva de Bezier. Com recurso nesse instrumento conceitual, podemos conduzir o aprendiz, passo a passo, na obtenção de uma parametrização. Não obstante, advertimos o grau de inxequibilidade do algoritmo sem um expediente que empregue um *software* para o cálculo dos procedimentos que dependem da quantidade de pontos iniciais de controle (ALVES, 2014b). Ademais, determinados cálculos, tendo em vista uma descrição dinâmica com o software Geogebra, requerem a exploração de outro software que realize operações algébricas (ALVES, 2013).

Vamos considerar a seguinte curva algébrica plana $-2x^2 - 5xy + 4y^2 + x - 5y + 15 = 0$ descrita em coordenadas Cartesianas. Neste caso, sem maiores detalhes, tomaremos a seguinte substituição $y = t(x-2) + 3$ e substituindo na primeira equação, teremos: $-2x^2 - 5xy + 4y^2 + x - 5y + 15 = 0 \Leftrightarrow$

$$-2x^2 - 5x(t(x-2) + 3) + 4(t(x-2) + 3)^2 + x - 5(t(x-2) + 3) + 15 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2) \cdot (-2x - 5xt + 4t^2x - 8t^2 + 19t - 18) = 0 \rightarrow \begin{cases} (x-2) = 0 \text{ ou} \\ (-2x - 5xt + 4t^2x - 8t^2 + 19t - 18) = 0 \end{cases}$$

É fácil verificar, do ponto de vista aritmético, que o ponto (2,3) satisfaz a equação inicial.



Por outro lado, se $(-2x - 5xt + 4t^2x - 8t^2 + 19t - 18) = 0 \rightarrow x(t) = \frac{18 - 19t + 8t^2}{-2 - 5t + 4t^2}$.

Por fim, encontramos que $y(t) = t \left(\frac{18 - 19t + 8t^2}{-2 - 5t + 4t^2} \right) + 3 = \frac{3t^2 + 7t - 6}{4t^2 - 5t - 2} \therefore \alpha(t) = (x(t) \cdot y(t))$ é

uma curva parametrizada no parâmetro $t \in (-\infty, -0.319) \cup (-0.319, 1.569) \cup (1.569, +\infty)$, o que corresponde à restrição $4t^2 - 5t - 2 \neq 0$.

Ora, com origem no procedimento *standard* hora desenvolvido, destacamos dois aspectos: (i) todas as inferências produzidas foram apoiadas num conhecimento de base lógico-matemática; (ii) os dados e as operações realizados sobre os registros, inclusive sua forma final $\alpha(t) = (x(t) \cdot y(t))$ em nada proporcionam uma apreensão perceptual das propriedades qualitativas descritas.

Por outro lado, outros recursos de representação, que não àqueles de natureza restritivamente algébrica, podem atuar como elementos impulsionadores para um entendimento heurístico. Neste sentido, acentuamos a disposição da figura 3, que detém um papel mnemônico que serve como recurso ao entendimento da expressão (*). Neste caso, não divisamos propriamente um argumento matemático e, sim, um instrumento (ou representação) que proporciona agregarmos outras formas de significação para a esta definição formal.

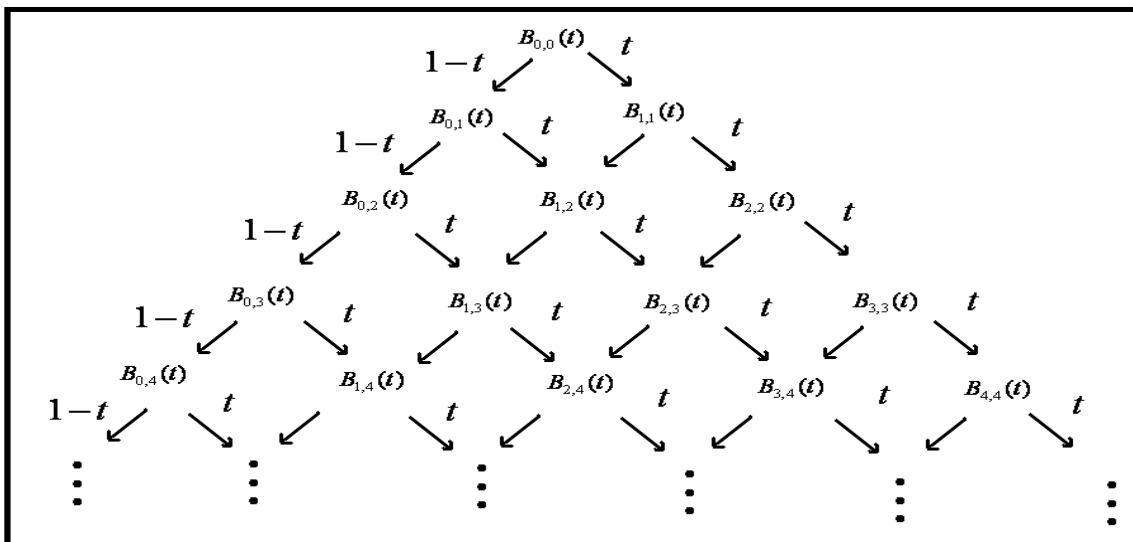


Figura 3. Disposição mnemônica para a obtenção dos elementos da família de polinômios de Berstein (*)



Antes de prosseguirmos, todavia, cabem dois exemplos que justificam/proporcionam parte de nossa abordagem de aplicação e exploração do uso do software Geogebra. O primeiro exemplo é formalmente conhecido como o *envoltório convexo* de um conjunto de pontos $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

O mesmo é definido como sendo o conjunto $CH(X) = \left\{ a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n \mid \sum_{i=0}^n a_i = 1, a_i \geq 0 \right\} \subset \mathbb{R}^n$ (SPENCER, 1994, p. 7). Ademais, desta definição, podemos então enunciar o seguinte teorema: (propriedade do envoltório convexo): Todo ponto de uma curva de Bezier $C^n_i(t)$ está no envoltório convexo definido pelos seus pontos de controle. Em outras palavras, para todo $t \in [0,1]$, $C^n_i(t) \in CH(P_0, P_1, P_2, \dots, P_n) \subset \mathbb{R}^n$.

Na definição formal anterior é flagrante a inexistência de qualquer apelo ou recurso à visualização, tendo em vista lidarmos com um espaço n dimensional. O segundo exemplo refere-se a outra noção da família de polinômios de Bernstein (*). Na figura 4 visualizamos as famílias indicadas por $B_{i,4}(t)$, $B_{i,14}(t)$, $B_{i,24}(t)$. Mostraremos nas próximas seções que para ordens elevadas, o uso dos Geogebra se mostra inexequível (ALVES, 2014b).

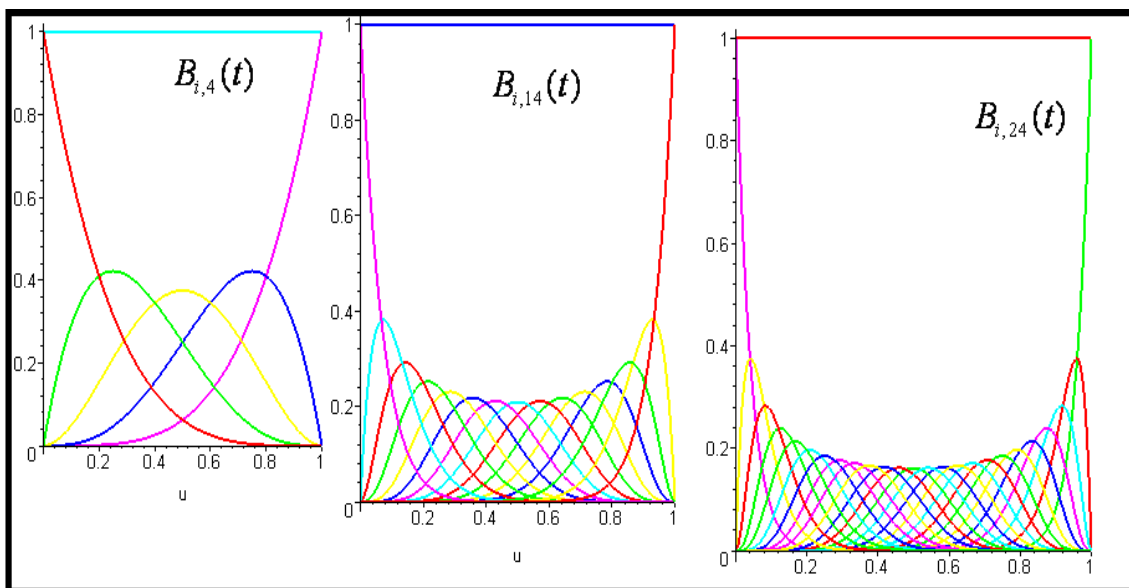


Figura 4. Visualização dos polinômios de Bernstein de ordens 4, 14 e 24 com recurso em um software de computação algébrica CAS Maple



A positividade dos primeiros elementos da família (*) pode ser diretamente observada nas expressões:

$$B_{0,1}(t) = 1-t, B_{1,1}(t) = t, B_{0,2}(t) = (1-t)^2, B_{1,2}(t) = 2t(1-t), B_{2,2}(t) = t^2,$$

$$, B_{0,3}(t) = (1-t)^3, B_{1,3}(t) = 3t(1-t)^2, B_{2,3}(t) = 3t^2(1-t), B_{3,3}(t) = t^3.$$

Ora, com a condição em que $0 \leq t \leq 1$ podemos inferir facilmente, com origem na figura 3, caráter de positividade das curvas $B_{i,10}(t)$, com $0 \leq i \leq 10$ (em cor azul claro), bem como as curvas $B_{i,2}(t)$, com $0 \leq i \leq 2$ (em cor vermelha). O caráter de dinamicidade do gráfico nos permite acompanhar a evolução de cada elemento da família.

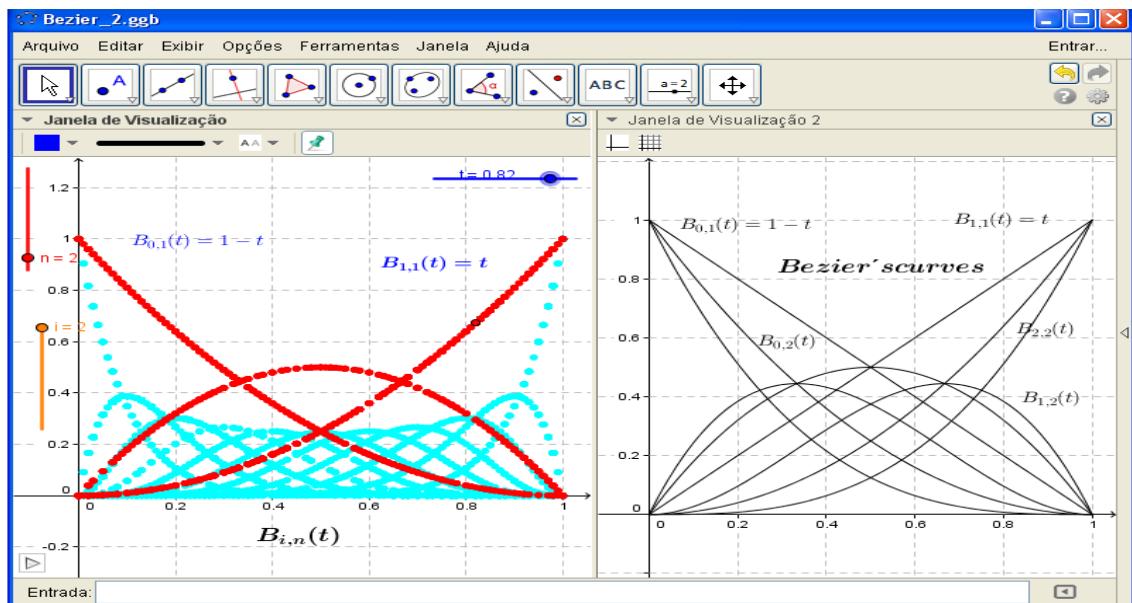


Figura 5. Visualização de propriedades relativas aos polinômios de Bernstein e sua positividade

Na próxima seção, acentuaremos propriedades formais relativas aos polinômios de Bernstein. Observaremos que tal família apresenta um papel importante na teoria da aproximação desenvolvida por Weierstrass.

2. Algumas propriedades dos polinômios de Bernstein

Com origem na definição (*), facilmente concluímos que $B_{0,1}(t) = 1-t, B_{1,1}(t) = t, B_{0,2}(t) = (1-t)^2, B_{1,2}(t) = 2t(1-t), B_{2,2}(t) = t^2, B_{0,3}(t) = (1-t)^3, B_{1,3}(t) = 3t(1-t)^2, B_{2,3}(t) = 3t^2(1-t), B_{3,3}(t) = t^3$. Uma propriedade recursiva refere-se á seguinte



igualdade $B_{k,n}(t) = (1-t)B_{k,n-1}(t) + tB_{k-1,n-1}(t)$. Com efeito, partimos da expressão ao lado direito, observando que:

$$\begin{aligned} (1-t)B_{k,n-1}(t) + tB_{k-1,n-1}(t) &= (1-t) \binom{n-1}{k} t^k (1-t)^{n-1-k} + t \binom{n-1}{k-1} t^{k-1} (1-t)^{n-1-(k-1)} = \\ &= \binom{n-1}{k} t^k (1-t)^{n-k} + t \binom{n-1}{k-1} t^{k-1} (1-t)^{n-k} = \left(\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right) t^k (1-t)^{n-k} = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\ &= B_{k,n}(t) \end{aligned}$$

Outra propriedade que pode ser inferida a partir da fórmula recorrente $B_{k,n}(t) = (1-t)B_{k,n-1}(t) + tB_{k-1,n-1}(t)$ é não negativo. De fato, supondo por indução, facilmente, com origem nos casos iniciais $B_{0,1}(t) = 1-t \geq 0$, $B_{1,1}(t) = t \geq 0$. Por intermédio do passo indutivo, vemos que $B_{k,n}(t) = (1-t)B_{k,n-1}(t) + tB_{k-1,n-1}(t) \geq 0$.

Ora, podemos extrair outras propriedades. Por exemplo, vamos admitir que vale a seguinte igualdade $\sum_{i=0}^n c_i x^i (1-x)^{n-i} = 0$ para qualquer $x \in (0,1)$. Tal expressão, vamos

dividir pela potência $(1-x)^n$ e escrever $\sum_{i=0}^n c_i x^i \frac{(1-x)^{n-i}}{(1-x)^n} = \sum_{i=0}^n c_i x^i (1-x)^{-i} = 0$ e, no passo

seguinte, substituiremos $y := \frac{x}{1-x} \therefore \sum_{i=0}^n c_i x^i (1-x)^{-i} = 0 \leftrightarrow \sum_{i=0}^n c_i y^i = 0$. Agora, tendo em

vista a expressão $\sum_{i=0}^n c_i y^i = 0$, para todo $y > 0$ deverá ocorrer, de modo irremediável que

todos seus coeficientes são nulos, isto é, escrevemos $c_0 = c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

Tal fato mostra que dispomos de uma base. Outra propriedade relevante para os polinômios de Bernstein diz respeito ao fato de ser uma partição da unidade. De fato,

basta ver que $\sum_{i=0}^n B_i^n(x) = (x + (1-x))^n = 1^n = 1$,

Claramente, vemos que os polinômios de Bernstein são simétricos relativamente ao seguinte sentido $B_{i,n}(t) = B_{n-i,n}(1-t)$. Ademais, eles gozam da propriedade $B_{i,k}(0) = \delta_{i,0}$ e $B_{i,n}(1) = \delta_{i,n}$ (delta de Kronecker) e são ainda limitados, segundo a restrição $[0,1]$. De modo detalhado, podemos inferir a seguinte propriedade

$\sum_{i=0}^k B_{i,k}(t) = \sum_{i=0}^k B_{i,k-1}(t)$. De fato, escrevendo a soma parcial:



$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k B_{i,k}(t) &= \sum_{i=0}^k \left[(1-t)B_{i,k-1}(t) + t \cdot B_{i-1,k-1}(t) \right] = \\ &= (1-t) \left[\sum_{i=0}^{k-1} (1-t)B_{i,k-1}(t) + t \cdot B_{k,k-1}(t) \right] + t \cdot \left[\sum_{i=0}^{k-1} (1-t)B_{i-1,k-1}(t) + t \cdot B_{-1,k-1}(t) \right] = \\ &= (1-t) \sum_{i=0}^{k-1} B_{i,k-1}(t) + t \sum_{i=1}^k B_{i-1,k-1}(t) = (1-t) \sum_{i=0}^{k-1} B_{i,k-1}(t) + t \sum_{i=0}^{k-1} B_{i,k-1}(t) = \sum_{i=0}^{k-1} B_{i,k-1}(t) \end{aligned}$$

Agora, desta desigualdade, calculamos as seguintes somas parciais:

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) = \sum_{i=0}^{n-2} B_{i,n-2}(t) = \dots = \sum_{i=0}^2 B_{i,2}(t) = \sum_{i=0}^1 B_{i,1}(t) = (1-t) + t = 1.$$

Por outro lado, podemos escrever $B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \binom{n}{i} t^i \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k \binom{n-i}{k} t^k =$

$$= \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k \binom{n}{i} \binom{n-i}{k} t^{i+k} = \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k \binom{n}{i} \binom{n-i}{n-i-k} \cdot t^k = \sum_{i=k}^n (-1)^{k-i} \binom{n}{k} \binom{k}{i} \cdot t^k (**).$$

Ora, a igualdade $B_{i,n}(t) = \sum_{i=k}^n (-1)^{k-i} \binom{n}{k} \binom{k}{i} \cdot t^k$ e o fato de que o conjunto

$\beta = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ constitui uma base para o espaço vetorial das funções polinomiais de grau menor ou igual a 'n', descrevem a propriedade relativa à qual todo polinômio pode ser escrito em termos da base β . Observamos que empregamos o Teorema da expansão binomial no desenvolvimento da expressão $(1-t)^{n-k}$.

Do ponto de vista da computação gráfica, a propriedade da partição da unidade é relevante, quando empregamos os polinômios de Bernstein como modelo geométrico.

Num outro sentido, podemos reescrever (**), do seguinte modo: $t^k = t \cdot (t^{k-1}) =$



$$\begin{aligned}
&= t \sum_{i=k-1}^n \frac{1}{(i-k+1)!} \cdot \frac{(n-k+1)!}{n(n-1)\cdots(i+1)} B_{i,n-1}(t) = t \sum_{i=k-1}^n \frac{i!}{(k-1)!(i-k+1)!} \cdot \frac{(k-1)!(n-k+1)!}{n!} B_{i,n-1}(t) \\
&= t \sum_{i=k-1}^n \frac{i!}{(k-1)!(n-k+1)!} \frac{(k-1)!(i-k+1)!}{n!} B_{i,n-1}(t) = t \sum_{i=k-1}^n \frac{\binom{i}{k-1}}{\binom{n}{k-1}} B_{i,n-1}(t) = \sum_{i=k}^n \frac{\binom{i-1}{k-1}}{\binom{n-1}{k-1}} t \cdot B_{i-1,n-1}(t) \\
&= \sum_{i=k-1}^n \frac{\binom{i-1}{k-1}}{\binom{n-1}{k-1}} \cdot \frac{i}{n} B_{i,n}(t) = \sum_{i=k-1}^n \frac{\binom{i}{k}}{\binom{n}{k}} B_{i,n}(t)
\end{aligned}$$

Agora, vamos verificar a propriedade de independência linear dos polinômios de Bernstein. De fato, se existem constantes $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ e assumimos a seguinte igualdade: $0 = c_0 B_{0,n}(t) + c_1 B_{1,n}(t) + c_2 B_{2,n}(t) + \dots + c_{n-1} B_{n-1,n}(t) + c_n B_{n,n}(t)$. Veremos que a única possibilidade é àquela em que todos os escalares são nulos. Para verificar tal ilação, escrevemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
0 &= c_0 B_{0,n}(t) + c_1 B_{1,n}(t) + c_2 B_{2,n}(t) + c_3 B_{3,n}(t) + c_4 B_{4,n}(t) + \dots + c_{n-2} B_{n-2,n}(t) + c_{n-1} B_{n-1,n}(t) + c_n B_{n,n}(t) \Leftrightarrow \\
0 &= c_0 \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \binom{i}{0} t^i + c_1 \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \binom{n}{i} \binom{i}{1} t^i + c_2 \sum_{i=0}^n (-1)^{i-2} \binom{n}{i} \binom{i}{2} t^i + \dots + c_n \sum_{i=0}^n (-1)^{i-n} \binom{n}{i} \binom{i}{n} t^i \\
0 &= c_0 + \left[\sum_{i=0}^1 c_i \binom{n}{1} \binom{1}{1} \right] t^1 + \left[\sum_{i=0}^2 c_i \binom{n}{2} \binom{2}{2} \right] t^2 + \left[\sum_{i=0}^3 c_i \binom{n}{3} \binom{3}{3} \right] t^3 + \dots + \left[\sum_{i=0}^n c_i \binom{n}{n} \binom{n}{n} \right] t^n
\end{aligned}$$

Por fim, usamos fato que a base β é L.I. assim deveremos ter ainda que:

$$c_0 = \left[\sum_{i=0}^1 c_i \binom{n}{1} \binom{1}{1} \right] = \left[\sum_{i=0}^2 c_i \binom{n}{2} \binom{2}{2} \right] = \dots = \left[\sum_{i=0}^n c_i \binom{n}{n} \binom{n}{n} \right] = 0.$$

Ora, de imediato, obtemos que $c_0 = 0$. A partir disto, substituiremos nas expressões remanescentes, para inferir que $c_1 = 0$. Assim, repetindo o mesmo procedimento, concluiremos que $c_0 = c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ e segue o resultado.

No âmbito da Matemática Aplicada, as propriedades registradas há pouco, bem como outras, são empregadas no tratamento de imagens. Logo abaixo, vemos um artigo devido a Berstein, envolvendo propriedades atinentes ao teorema de Weierstrass. Logo adiante, na figura 6, divisamos a estabilidade adquirida no processo de aproximação polinomial convencional e, o mesmo envolvendo polinômios de Berstein.



Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités.

Je me propose d'indiquer une démonstration fort simple du théorème suivant de Weierstrass:

Si $F(x)$ est une fonction continue quelconque dans l'intervalle 01 , il est toujours possible, quel que petit que soit ε , de déterminer un polynôme $E_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ de degré n assez élevé, tel qu'on ait

$$|F(x) - E_n(x)| < \varepsilon$$

en tout point de l'intervalle considéré.

A cet effet, je considère un événement A , dont la probabilité est égale à x . Supposons qu'on effectue n expériences et que l'on convienne de payer à un joueur la somme $F\left(\frac{m}{n}\right)$, si l'événement A se produit m fois. Dans ces conditions, l'espérance mathématique E_n du joueur aura pour valeur

$$E_n = \sum_{m=0}^{n=n} F\left(\frac{m}{n}\right) \cdot C_n^m x^m (1-x)^{n-m}. \quad (1)$$

Or, il résulte de la continuité de la fonction $F(x)$ qu'il est possible de fixer un nombre δ , tel que l'inégalité

$$|x - x_0| \leq \delta$$

entraîne

$$\left| F(x) - F(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2};$$

de sorte que, si $\bar{F}(x)$ désigne le maximum et $\underline{F}(x)$ le minimum de $F(x)$ dans l'intervalle $(x - \delta, x + \delta)$, on a

$$\bar{F}(x) - F(x) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad F(x) - \underline{F}(x) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2)$$

S. N. Bernstein, Comm. Kharkov Math. Soc. (1912)



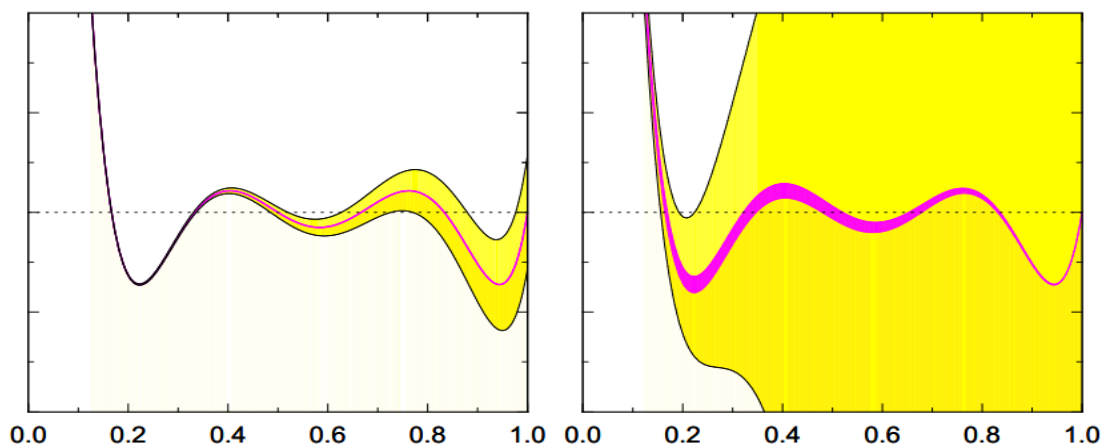


Figura 6. Visualização comparativa entre o processo de aproximação polinomial de clássico com outro processo envolvendo aproximação por intermédio de polinômios de Bernstein

3. Avanços na Tecnologia atual

Em computação gráfica e *Design*, as curvas acima são bastante empregadas no que concerne ao processo de aproximação de figuras (DUCAN, 2005, p. 123). No próximo exemplo, indicaremos duas possibilidades de se descrever o traço relativo a uma curva de Bezier. No primeiro caso, enfatizamos fortemente as propriedades do polinômios de Bernstein e propriedades analíticas do Cálculo. Por outro lado, no segundo caso, empregaremos apenas o algoritmo de P. Casteljau, desenvolvido na década de 60 (FARIN, 2005).

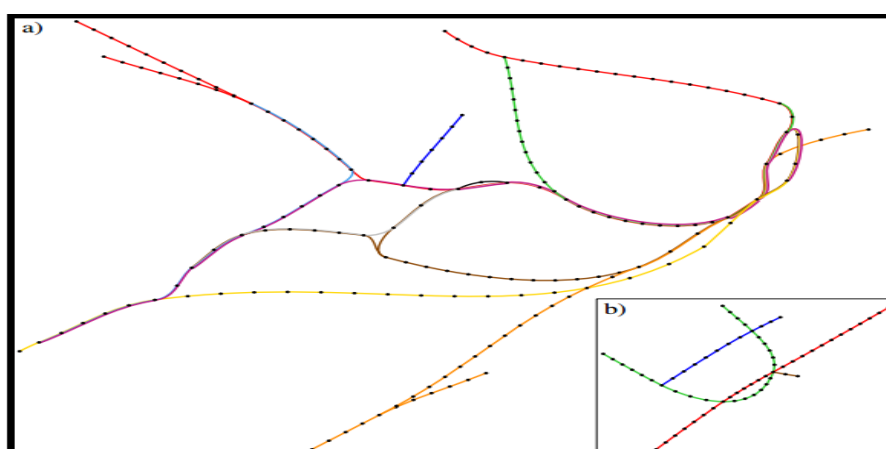


Figura 7. Fink et al (2013) explicam o uso na descrição de linha do metrô em Sydney e em Montreal



Ora, outras complexas aplicações podem ser encontradas na literatura científica, no que concerne ao estudo de curvas de Bezier e dos polinômios de Bernstein. Por outro lado, neste trabalho apresentamos algumas aplicações que exigem pouca sintaxe e domínio de ambos os softwares de matemática. Deste modo, sugerimos uma via de exploração de noções complexas, que admitem uma interface com várias outros ramos de investigação e que admitem um via de transposição didática numa aula de CVV (ALVES, 2014a).

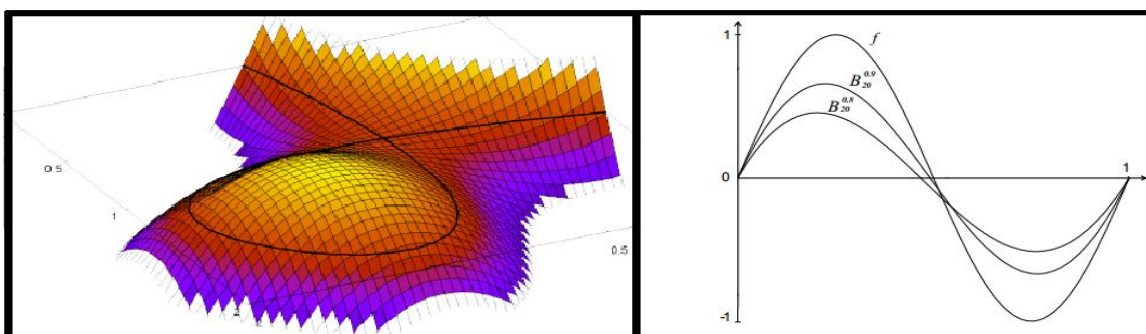


Figura 8. Superfície de Bezier com CAS

Na computação gráfica, como indicamos logo abaixo, a noção de curva de Bézier foi empregada para a obtenção de objetos tridimensionais, nesse caso, falamos da superfície de Bézier.

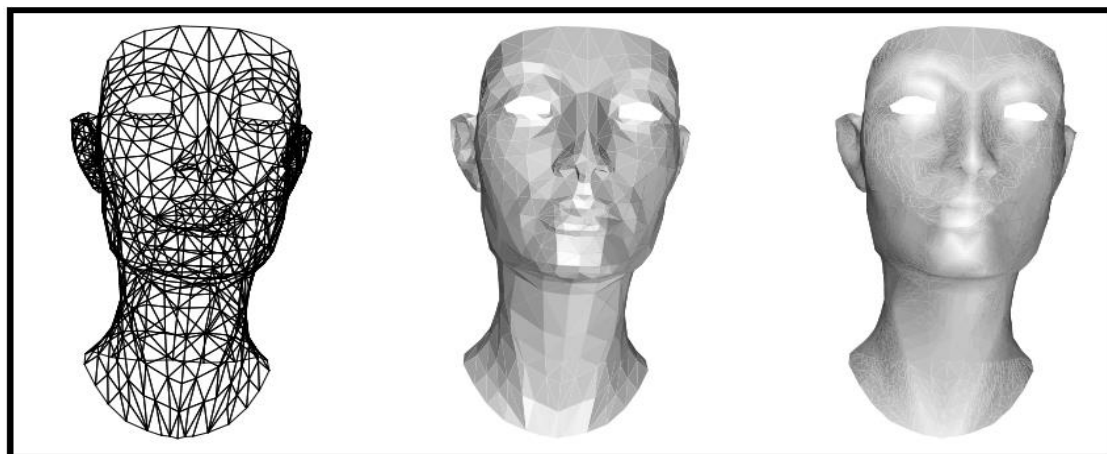


Figura 9. Processo de aproximação por meio da superfície de Bezier em 3D

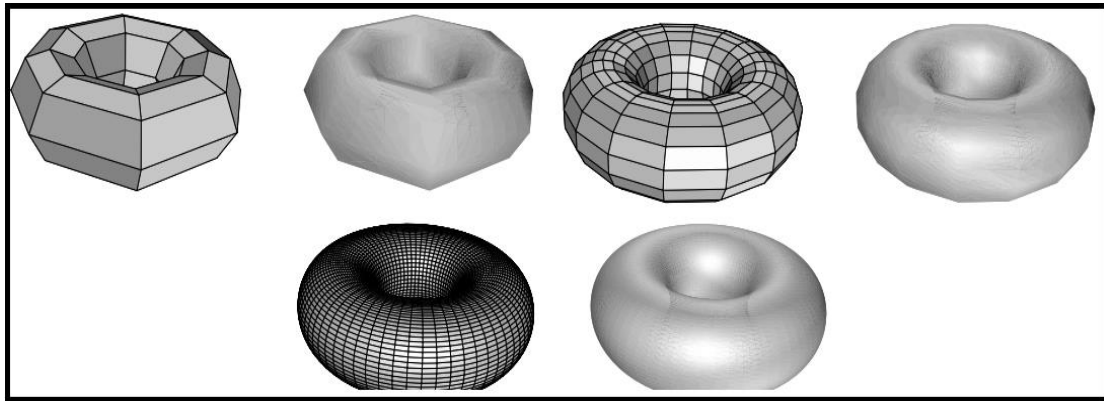


Figura 10. Processo de aproximação por meio da superfície de Bezier em 3D

4. Exemplos de uso dos softwares GeoGebra e o CAS Maple

Em nosso approach, devido a determinadas limitações na construção de curvas de Bezier, de grau elevado, o GeoGebra não proporciona a descrição analítica que indicamos em (*). Daí, realizamos as contas do algoritimo iterado e o observamos na figura 11.

```

C:\Users\Regis\Desktop\descending_bezier_degree.mws - [Server 1] - Maple 17
Arquivo (F)  Editar (E)  Visualizar (V)  Inserir (I)  Formatar (R)  Tabela (A)  Desenho (D)  Gráfico (G)  Planilha (S)  Ferramentas (T)  Janela (W)  Ajuda (H)

Favoritos
Nuvem Maple
Pesquisar
public
Popular Novo ...
johnny_welle 118
TgPakken
Rlopez 48
Yet More Gems from the ...
Rlopez 41
Gems from the Little Red ...
edhne 37
What's New in Maple 16
Rlopez 34
Partial Fraction Decompo...
johnny_welle 28
TgPakken
johnny_welle 27
TgPakken v6.9
Rlopez 19
Fixed-Point Iteration
Rlopez 18
Lines - The Devil Is in the...
Rlopez 13
Fitting Circles in Space to...

> [(1-t)(2.4(1-t)t+t(2.4+0.9t))+t((1-t)(2.4+0.9t)+t(6.7+0.9t)),(1-t)(7.2(1-t)t+t(7.2-10.8t))+t((1-t)(7.2-10.8t)
+ t(11.6-31.8t))] (24)
> evalm((1-t)*b_2+t*b_3);
[(1-t)((1-t)(2.4+0.9t)+t(6.7+0.9t))+t((1-t)(6.7+0.9t)+t(7.6-15.6t)),(1-t)((1-t)(7.2-10.8t)+t(11.6-31.8t))+t((1-
-t)(11.6-31.8t)+t(-20.2+151.2t))] (25)
> c_1:=Vector(2,[(1-t)*(2.4*(1-t)*t+t*(2.4+.9*t))+t*((1-t)*(2.4+.9*t)+t*(6.7+.9*t)),(1-t)*(7.2*(1-t)*t+t*(
7.2-10.8*t))+t*((1-t)*(7.2-10.8*t)+t*(11.6-31.8*t))]);
c_1:=
⎡ (1-t)(2.4(1-t)t+t(2.4+0.9t))+t((1-t)(2.4+0.9t)+t(6.7+0.9t)) ⎤
⎣ (1-t)(7.2(1-t)t+t(7.2-10.8t))+t((1-t)(7.2-10.8t)+t(11.6-31.8t)) ⎦ (26)
> c_2:=Vector(2,[(1-t)*(1-t)*(2.4+.9*t)+t*(6.7+.9*t))+t*((1-t)*(6.7+.9*t)+t*(7.6-15.6*t)),(1-t)*((1-t)*(
7.2-10.8*t))+t*(11.6-31.8*t))+t*((1-t)*(11.6-31.8*t)+t*(-20.2+151.2*t))]);
c_2:=
⎡ (1-t)((1-t)(2.4+0.9t)+t(6.7+0.9t))+t((1-t)(6.7+0.9t)+t(7.6-15.6t)) ⎤
⎣ (1-t)((1-t)(7.2-10.8t)+t(11.6-31.8t))+t((1-t)(11.6-31.8t)+t(-20.2+151.2t)) ⎦ (27)
> evalm((1-t)*c_1+t*c_2);
[(1-t)((1-t)(2.4(1-t)t+t(2.4+0.9t))+t((1-t)(2.4+0.9t)+t(6.7+0.9t)))+t((1-t)((1-t)(2.4+0.9t)+t(6.7+0.9t))+t((1-
-t)(6.7+0.9t)+t(7.6-15.6t))),(1-t)((1-t)(7.2(1-t)t+t(7.2-10.8t))+t((1-t)(7.2-10.8t)+t(11.6-31.8t)))+t((1-
-t)((1-t)(7.2-10.8t)+t(11.6-31.8t))+t((1-t)(11.6-31.8t)+t(-20.2+151.2t)))] (28)

```

Figura 11. Descrição analítica de uma curva com o auxílio do CAS Maple



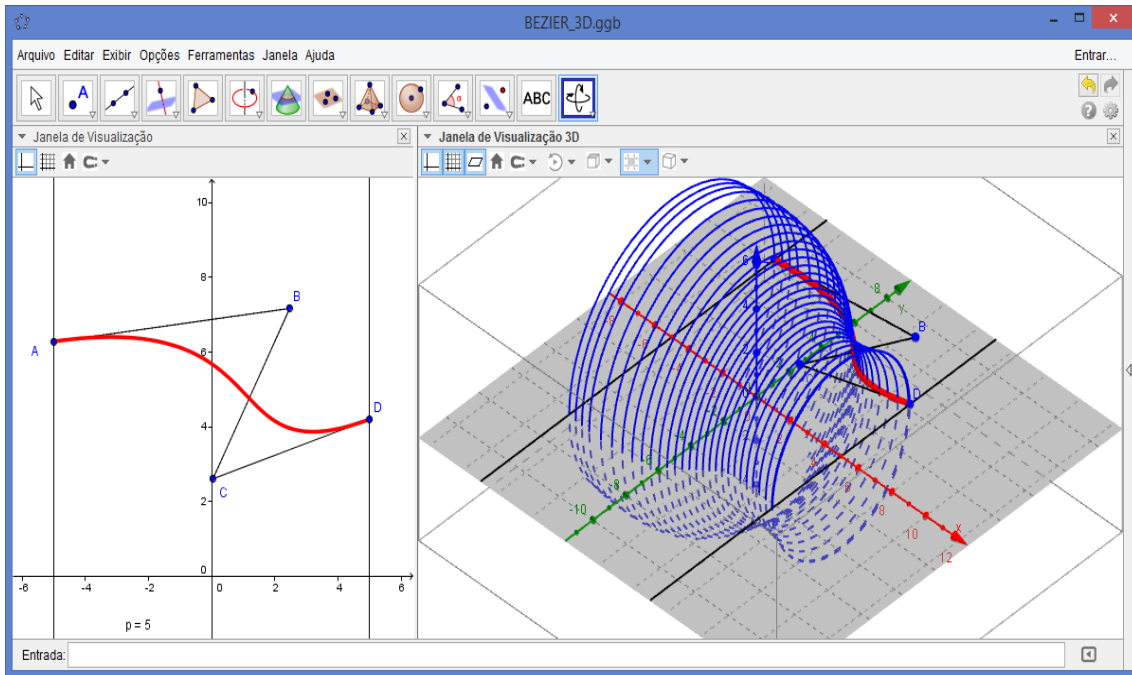


Figura 12. Visualização de uma superfície gerada pela rotação de uma curva de Bezier com o GeoGebra 3D

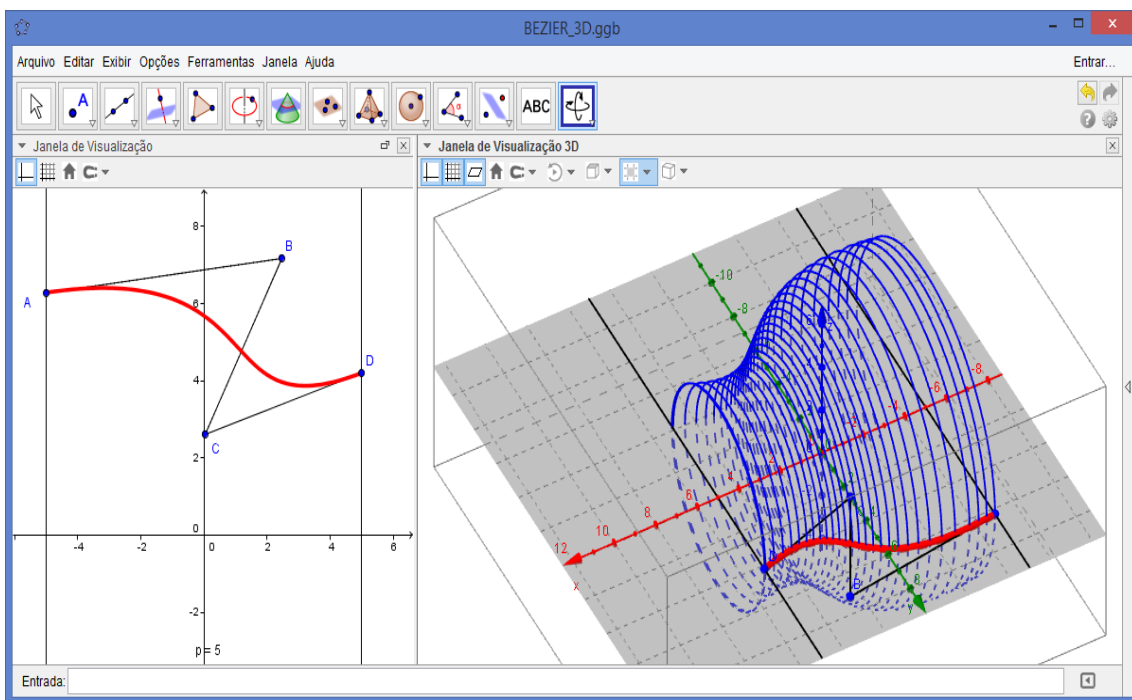


Figura 13. Visualização de uma superfície gerada pela rotação de uma curva de Bezier com o GeoGebra 3D

Na próxima seção, trazemos alguns exemplos de aplicação.







Exemplo 1: Vamos, pois, considerar os pontos: $P_1 = (3, 0); P_2 = (0, 1); P_3 = (-1, 0); P_4 = (0, -1); P_5 = (3, 0)$. Neste caso, sabemos que os polinômios de Bernstein constituem uma base para a representação dessas curvas. Deste modo, avaliamos os elementos da base a partir da expressão obtida por $((1-t)+t) = 1 \therefore ((1-t)+t)^4 = 1^4 = 1$ o que produz as expressões: $[(1-t)^4, 4t(1-t)^3, 6t^2(1-t)^2, 4t^3(1-t), t^4]$. Doravante, escrevemos as seguintes componentes de nossa curva $\alpha(t) = (x(t), y(t))$:

$$\begin{cases} x(t) = (1-t)^4 \times 3 + 4t(1-t)^3 \times 0 + 6t^2(1-t)^2 \times (-1) + 4t^3(1-t) \times 0 + t^4 \times 3 = 12t^2 - 12t + 3 \\ y(t) = (1-t)^4 \times 0 + 4t(1-t)^3 \times 1 + 6t^2(1-t)^2 \times 0 + 4t^3(1-t) \times (-1) + t^4 \times 0 = 8t^3 - 12t^2 + 4t \end{cases}$$

Deste modo, conseguimos a seguinte parametrização $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Agora, temos o vetor velocidade $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)) = (24t - 12, 24t^2 - 24t + 4)$ e facilmente podemos efetuar/realizar o estudo do sinal de suas funções componentes. De imediato, obtemos que $24t - 12 = 0 \leftrightarrow t = 1/2$ enquanto que

$$24t^2 - 24t + 4 = 0 \leftrightarrow t_1 = \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \text{ e } t_2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}.$$

Tabela 1: Descrição do traço da curva a partir das componentes do vetor velocidade.

Valores do parâmetro $t \in [0, 1]$	$t < t_1$	$t_1 < t < 1/2$	$1/2 < t < t_2$	$t_2 < t$
Estudo do sinal $x'(t)$	—	—	+	+
Comportamento de $x(t)$	Decrescente ←	Decrescente ←	Crescente →	Crescente →
Estudo do sinal $y'(t)$	+	—	—	+
Comportamento de $y(t)$	Crescente ↑	Decrescente ↓	Decrescente ↓	Crescente ↑
Vetor resultante $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$				

Fonte: Elaboração própria



Agora, com origem na tabela acima, convidamos o leitor ao entendimento da figura abaixo. Assinalamos, todavia, que apenas recorrendo aos conhecimentos do CVV, elaboramos a tabela 1 (ALVES, 2014b). Com arrimo da figura 1, indicamos os vetores velocidade relativamente a cada trecho de variação correspondente ao parâmetro $t \in [0,1]$. Com efeito, para $t < t_1$, divisamos que o vetor resultante se descreve por ↖.

Seguindo os valores crescentes do parâmetro, para o intervalo $t_1 < t < 1/2$, inferimos também, com origem no sinal das funções $x'(t)$ e $y'(t)$ que o comportamento resultante é do tipo ↙. Ora, com origem na coluna três, relativamente ao intervalo $1/2 < t < t_2$, inferimos que o vetor resultante se comporta como ↘.

Por fim, no trecho $t_2 < t$, inferimos que o resultante obtido é do tipo ↗. Finalmente, a partir da informação desses vetores, podemos marcar as regiões (fig. 1) na tela do Geogebra, que enumeramos por 1,2,3 e 4. Desta maneira, apresentamos na figura 1, os dados visuais relativos à parametrização $\alpha(t) = (x(t), y(t)) = (12t^2 - 12t + 3, 8t^3 - 12t^2 + 4t)$. Assinalamos neste caso que os conhecimentos do Cálculo em uma variável foram reutilizados no contexto do Cálculo em várias variáveis. Na figura 1 indicamos ainda o traço restante da curva, para valores do parâmetro $t \rightarrow +\infty$ e $t \rightarrow -\infty$.

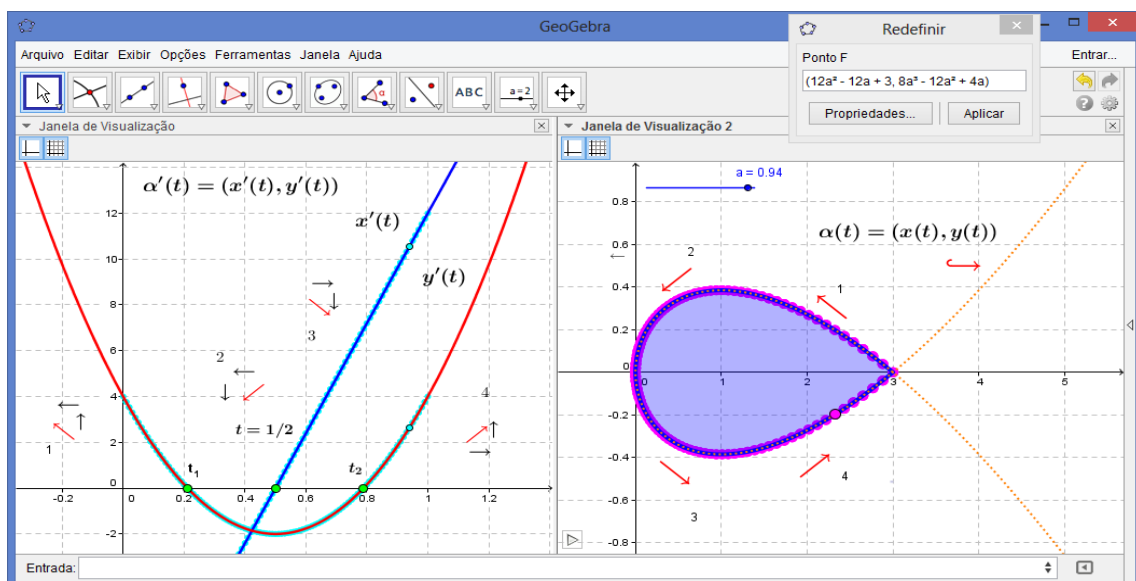


Figura 14. Obtenção do traço de uma curva com o uso dos polinômios de Bernstein e o Cálculo



Por outro lado, com o origem nesses pontos de controle, empregamos o algoritmo de Casteljau na figura 1, ao lado esquerdo. Visualizamos, agora, o processo construtivo e de aproximação por meio de uma família de poligonais e curvas de ordens inferiores que irão compor, paulatinamente, a curva de Bezier final, com quatro pontos controle. Forneceremos maiores detalhes desse algoritmo na seção seguinte.

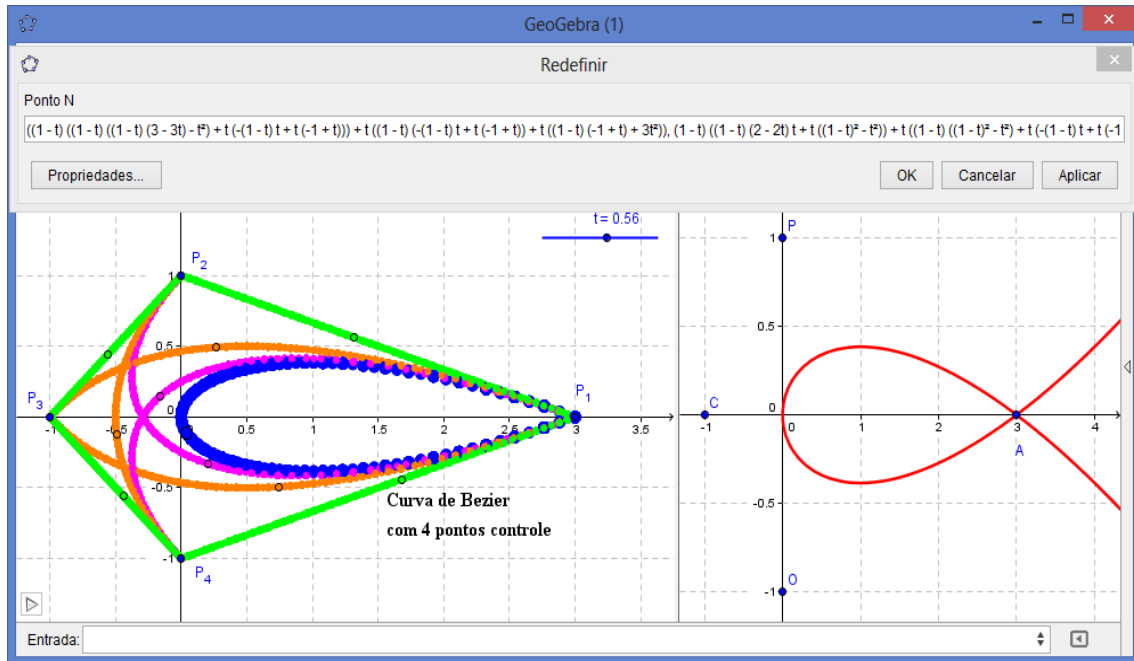


Figura 15. Exploração de um método construtivo para a obtenção da curva com o Geogebra

Na próxima seção, vamos apresentar, de modo pormenorizado, os cálculos empregados para a obtenção da construção dinâmica que divisamos acima. Na figura 2, indicamos em cor azul, a curva de Bezier, parametrizada do seguinte modo:

$$(x(t),y(t))=((1-t)((1-t)((1-t)(3-3t)-t^2)+t(-(1-t)t+t(-1+t)))+t((1-t)(-(1-t)t+t(-1+t))+t((1-t)(-1+t)+3t^2)), (1-t)((1-t)(2-2t)t+t((1-t)^2-t^2))+t((1-t)((1-t)^2-t^2)+t(-(1-t)t+t(-1+t)))) (*)$$

Exemplo 2: O algoritmo construtivo e recursivo de Casteljau permite a visualização das recomendações sugeridas na seção passada por Vainsencher (2009).

De fato, inicialmente, consideramos o caminho poligonal determinado pelos mesmos $d - 1$ segmentos iniciais. Analiticamente, escrevemos as seguintes expressões:

$$\sigma_1^1(t) = (1-t)P_1 + tP_2; \sigma_2^1(t) = (1-t)P_2 + tP_3; \dots; \sigma_{d-1}^1(t) = (1-t)P_{d-1} + tP_d.$$

No passo seguinte, devemos substituir cada par de segmentos consecutivos de



poligonais por meio do seguinte passo de interpolação. Neste caso, tomaremos uma parábola do seguinte modo: $\sigma_1^2(t) = (1-t)\sigma_1^1(t) + t\sigma_2^1(t)$; $\sigma_2^2(t) = (1-t)\sigma_2^1(t) + t\sigma_3^1(t)$;
 $;\dots;$ $\sigma_{d-3}^2(t) = (1-t)\sigma_{d-3}^1(t) + t\sigma_{d-2}^1(t)$; $\sigma_{d-2}^2(t) = (1-t)\sigma_{d-2}^1(t) + t\sigma_{d-1}^1(t)$.

Vamos tomar, pois, o seguinte exemplo ilustrativo com os seguintes pontos controle $P_1 = (-1,1)$, $P_2 = (0,0)$, $P_3 = (-1.2, -1.2)$, $P_4 = (2, -1.5)$. Facilmente, encontramos na primeira etapa que:

$$\sigma_1^1(t) = (1-t)P_1 + tP_2 = (1-t) \cdot (-1,1) + t \cdot (0,0) = (t-1, 1-t) ;$$

$$\sigma_2^1(t) = (1-t)P_2 + tP_3 = (1-t)(0,0) + t(-1.2, -1.2) = (-1.2t, -1.2t) \text{ e}$$

$$\sigma_3^1(t) = (1-t)P_3 + tP_4 = (1-t)(-1.2, -1.2) + t(2, -1.5) = (3.2t-1.2, -0.3t-1.2) .$$

No passo seguinte, fazemos as contas:

$$\sigma_1^2(t) = (1-t)(t-1, 1-t) + t(-1.2t, -1.2t) = (-2.2t^2 + 2t - 1, -0.2t^2 - 2t + 1) \text{ e vale que}$$

$$\sigma_2^2(t) = (1-t)(-1.2t, -1.2t) + t(3.2t-1.2, -0.3t-1.2) = (4.4t^2 - 2.4t, 0.9t^2 - 2.4t) .$$
 Finalmente, encontramos a seguinte parametrização cúbica de uma curva

$$\sigma_1^3(t) = (1-t)\sigma_1^2(t) + t\sigma_2^2(t) = (6.6t^3 - 6.6t^2 + 3t - 1, 1.1t^3 - 0.6t^2 - 3t + 1) .$$

Vamos tomar de novo outro conjunto de pontos controle descritos agora por $Q_1 = (-1,0)$, $Q_2 = (0,0)$, $Q_3 = (1,2)$, $Q_4 = (2,0)$.

Seguindo o mesmo procedimento, nós estabelecemos na primeira etapa que:

$$\sigma_1^1(t) = (1-t)(-1,0) + t(0,0) = (t-1, 0) ;$$

$$;\sigma_2^1(t) = (1-t)(0,0) + t(1,2) = (t, 2t); \sigma_3^1(t) = (1-t)(1,2) + t(2,0) = (1+t, 2-2t) .$$
 Na segunda etapa, determinamos ainda as seguintes expressões

$$\sigma_1^2(t) = (1-t)(t-1, 0) + t(t, 2t) = (t, 2t^2); \sigma_2^2(t) = (1-t)(t, 2t) + t(1+t, 2-2t) = (2t, 4t-4t^2) \text{ e,}$$

por fim, obtemos a forma cúbica de Bezier relativa à expressão

$$\sigma_1^3(t) = (1-t)(t, 2t^2) + t(2t, 4t-4t^2) = (t+t^2, 6t^2-6t^3) .$$

Ora, os procedimentos analíticos que executamos dizem respeito à curva de

Bezier $r(t)$ de grau n que é representada por $r(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(t)$ sob a condição $0 \leq t \leq 1$



. Desta definição preliminar, podemos inferir que uma curva de Bezier é um polinômio, cujo grau e uma unidade a menos do que a quantidade de pontos controle escolhidos.

Quando lidamos com uma pequena quantidade de pontos de controle, se torna fácil empregar o procedimento intuitivo e recursivo, indicado por Vainsencher (2009, p. 116-117). Por outro lado, o leitor pode tentar a descrição de uma curva de Bezier com uma quantidade elevada de número de pontos controle e, por esta via, observará as limitações relativas ao cálculo algébrico do software Geogebra. Na figura 3 exibimos curvas de Bezier de graus 2 e 3, como também visualizamos seu envoltório convexo.

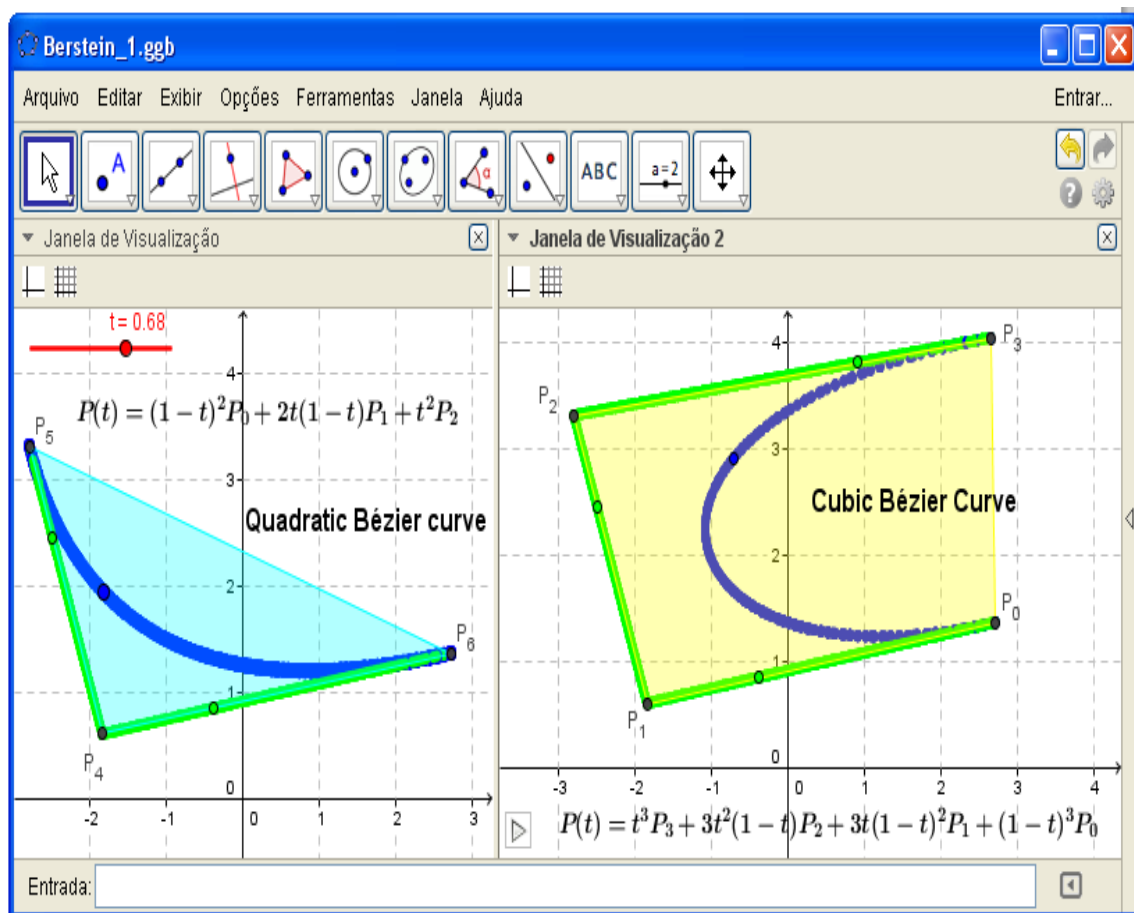


Figura 16. Visualização da curvas quadrica e cúbica de Bezier e seus envoltórios

Exemplo 3: Escrever as curvas de Bezier indicadas abaixo na forma matricial

a) $P(t) = (1-t)P_0 + tP_1$;



b) $P(t) = (1-t)^2 P_0 + 2tP_1 + t^2 P_2;$

c) $P(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3.$

Sol. Vamos tomar apenas o último exemplo e notar que:

$$P(t) = (t^3, t^2, t, 1) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}$$

$$P(t) = T^t \cdot M_{\text{bezier}} \cdot P.$$

Acima indicamos a Matriz de Bézier.

Exemplo 4: Consideremos os quatro pontos de controle $(1, -2); (-1, -2); (1, 2); (5, 2)$ determinar a base correspondentes aos polinômios de Bernstein e a parametrização da curva de Bezier. Por fim, obtê-la com o GeoGebra.

Sol. Nesse caso, avaliamos que

$$\mathcal{B}_{0,3}(t) = C_3^0 t^0 (1-t)^{3-0} = (1-t)^3$$

$$\mathcal{B}_{0,3}(t) = 1 - 3t + 3t^2 - t^3$$

$$\mathcal{B}_{1,3}(t) = C_3^1 t^1 (1-t)^{3-1} = 3t(1-t)^2$$

$$\mathcal{B}_{1,3}(t) = 3t - 6t^2 + 3t^3$$

$$\mathcal{B}_{2,3}(t) = C_3^2 t^2 (1-t)^{3-2} = 3t^2(1-t)$$

$$\mathcal{B}_{2,3}(t) = 3t^2 - 3t^3$$

$$\mathcal{B}_{3,3}(t) = C_3^3 t^3 (1-t)^{3-3} = t^3$$

$$\mathcal{B}_{3,3}(t) = t^3$$

Por fim, dadas as propriedades anteriores de constituir base, escrevemos ainda que:

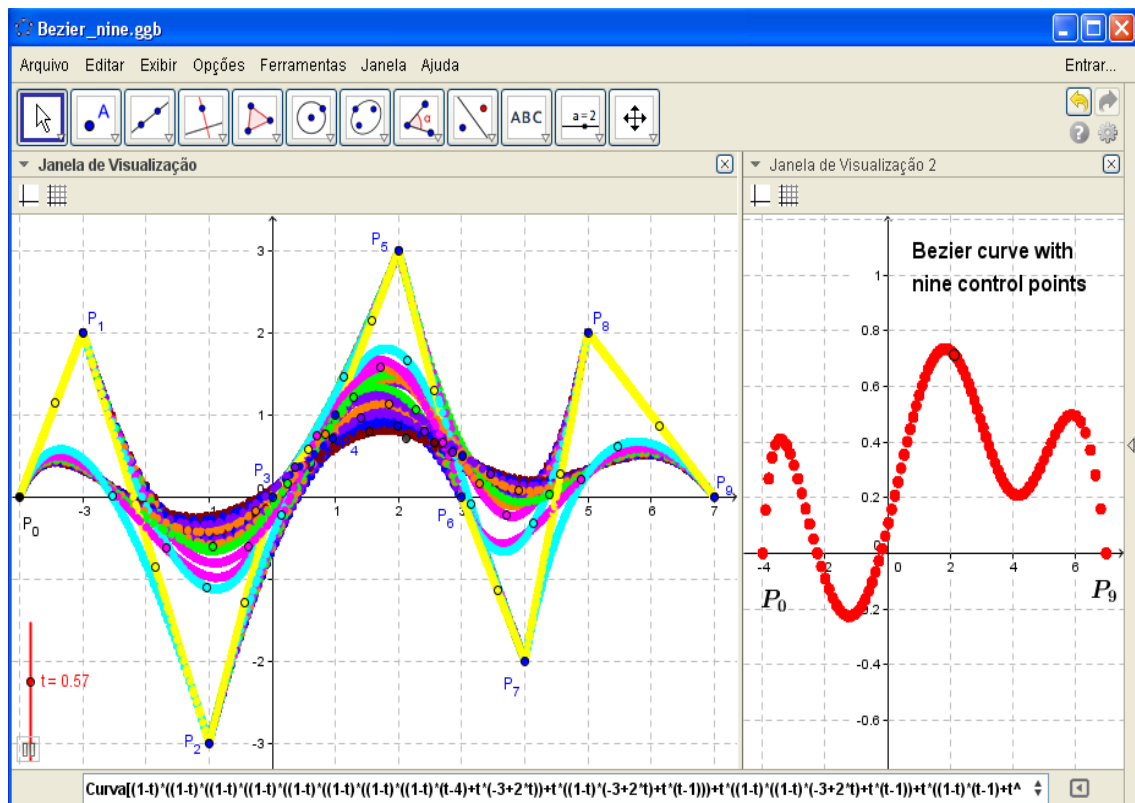
$$\overrightarrow{OM(t)} = (1 - 3t + 3t^2 - t^3) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + (3t - 6t^2 + 3t^3) \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + (3t^2 - 3t^3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM(t)} : \begin{cases} x(t) = 1 - 6t + 12t^2 - 2t^3 \\ y(t) = -2 + 12t^2 - 8t^3 \end{cases}$$



Exemplo 5: Na figura 5 exibimos a construção de uma curva de Bezier com nove pontos controle. Observamos o trabalho da obtenção paramétrica dos pontos $\{P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_9\}$.

Na figura indicamos ainda a sintaxe exigida pelo CAS Maple afim de desenvolvermos o processo recursivo até a obtenção da parametrização do ponto que, dependendo do parametro $0 \leq t \leq 1$ descreve a trajetória que divisamos na figura 5 ao lado direito.



Exemplo 5: Criar uma base de ordem 3, 4 e 5.

Notamos que $1 = 1 \therefore (1-t) + t = 1 \leftrightarrow [(1-t) + t]^3 = 1^3 = 1$. Dai, fazendo as contas, vamos encontrar que $[(1-t)^3, 3t(1-t)^2, 3t^2(1-t), t^3]$. As outras são análogas.

REFERÊNCIAS

- B. A. Barsky – *Arbitrary subdivision of a Bézier Curves*, Califórnia: University of California, 1985.
- F. R. V. Alves – *Semiotic Register and the Internal Transition to Calculus: Elements for a Didactic Engineer*, Lima: Catholic University of Peru, Conference, 2014.



- H Liu; L. Li & D. Zang – *Study on a Class of TC-Bezier Curve with Shape Parameters*, Journal of Information & Computational Science, v. 8, nº 7, 2011, 1217-1223. Available in: http://www.joics.com/publishedpapers/2011_8_7_1217_1223.pdf
- I. Vainsencher – *Introdução às Curvas Algébricas*, Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- J. P. Pouget – *Modèle de Bézier et modèle de B-splines*, REPERE, IREM, nº 15, 119-134, 1995. Available in: http://www.univ-irem.fr/reperes/articles/15_article_105.pdf
- K. M. Neuerburg – *Bézier Curves*, Lousinanna: Proceedings of Mathematical Society of America - MMA, 2003. Available in: <http://www.mc.edu/campus/users/travis/maa/proceedings/spring2003/index.html>
- T. Guillod – *Interpolations, courbes de Bézier et B-Splines*, Buletin de la Societé des Enseignants Neuchâtelois de Sciences, nº 34, 2008. Available in: <http://www.sens-neuchatel.ch/bulletin/no34/art3-34.pdf>
- Y, Bertot; F. Guillot & A. Mahboubi – *A formal study of Berstein coefficients and polynomials*, Orsay: Université D´Orsay, University of Sussex, 2010. Available in: <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/52/01/44/PDF/RR-7391.pdf>
- Barsky, A. Brian. (1998). A view of CAD/CAM a development period by Pierre Bezier. *Annals of the History of Computing*, v. 20, nº2, 37-40.
- Bezar, Jean-P. & Vareille, J. (2007). Des courbes et surfaces Bézier : Une histoire de géométrie polaire brûlante d´actualité. *Journal of Advanced Technology of Education*, 3(2), 369-371. Available in: <http://www.unicaen.fr/colloques/cnriut2011/papers/148.pdf>
- Busser, Allan. (2014). Geometrie Algebrigue plane avec le Geogebra. *Integration de TICE dans l´enseignement de Mathématiques*, nº 39. p.-1-31. Disponivel em: <http://revue.sesamath.net/spip.php?rubrique105>
- Dekkers, Jeroen. (2010). Application of Bezier curves in Computer Aided Design. Netherlands: Technische Universiteit Delft. Available in: <file:///C:/Documents%20and%20Settings/Regis/Meus%20documentos/Downloads/report.pdf>
- Duncan, Marsh. (2005). *Applied Geometry for Computer Graphics and CAD*. Second Edition, New York: Springer.
- Farin, Gerald. (2002). *Curves and surfaces for CAGD: a practical guide*. Fifth edition. Arizona: Arizona State University. Morgan Kaufman Publishers.
- Goodman, T. T. (1999). Convexity and generalized Bernstein polynomials. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*. nº 42, p. 179-190. Disponivel em: <http://web.deu.edu.tr/halil.oruc/gopems.pdf>

