VII Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática
Universidade Federal de Alagoas

Cadeias de Markov

Ali Golmakani
Ayane Adelina da Silva
Emanoel Mateus dos Santos Freire
Myrla Kedynna Barbosa
Pedro Henrique Gomes de Carvalho
Vitor de Lima Alves

Maceió
2014

Prefácio

Neste material faremos uma introdução as Cadeias de Markov, com alguns exemplos e aplicações. O tema baseia-se no fato de que a maioria dos estudos em probabilidade tem lidado com processos de ensaios independentes, que são a base da teoria da probabilidade clássica e estatística.

Em 1907, o matemático russo Andrei Andreyevich Markov começou o estudo de um importante tipo de processo. Neste processo, apenas o resultado de uma dada experiência atual pode afetar o resultado da experiência seguinte, ou seja as experiências anteriores não influenciam as experiências futuras. Tal propriedade é conhecida como "perda de memória"ou Propriedade de Markov, e é o que caracteriza uma Cadeia de Markov (também conhecida como Processo Markoviano).

Este texto foi desenvolvido para dar referência ao minicurso Cadeias de Markov, apresentado durante a VII Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática realizada em Maceió no ano de 2014.

Gostaríamos de agradecer a dois grandes amigos, Lucas Luan de Moura Lima e Antônio Marcos Larangeira Lima, por terem dedicado tempo e empenho para o desenvolvimento do programa utilizado durante o minicurso e ao professor Krerley Irraciel Oliveira pelo incentivo e o tempo cedido em seus seminários semanais para o aperfeiçoamento deste trabalho. Ao amigo Diogo Carlos pela ajuda constante e ao professor Isnaldo Isaac por todo incentivo e sua constante disponibilidade em nos ajudar. E por fim, agradecemos ao Comitê Científico da VII Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática por terem nos dado a oportunidade de ministrar este minicurso e ao Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas.

Sumário

Capítulo 1

Especificando uma cadeia de Markov

Descrevemos uma **cadeia de Markov** da seguinte maneira: seja $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_r\}$ um conjunto de estados. O processo começa em um desses estados e move-se sucessivamente de um estado para outro. Cada movimento é chamado de passo. Se a cadeia está atualmente no estado s_i, então ela se move para o estado s_j no próximo passo com uma probabilidade denotada por s_{ij}, e essa probabilidade não depende dos estados ocorridos nos passos anteriores, apenas do estado atual.

A probabilidade p_{ij} é chamada **probabilidade de transição**. O processo pode permanecer no estado que se encontra e isso ocorre com probabilidade p_{ii}.

Exemplo 1.0.1 (Dados Fictícios). *Foram observados alguns dados do time de futebol Flamengo. Ele nunca empata dois jogos seguidos. Se ele empata, as probabilidades de ele ganhar ou perder o próximo jogo são iguais. Se a vitória ocorreu no jogo atual, com a empolgação, a probabilidade de ganhar ou empatar no próximo jogo é de* $1/2$ *e* $1/4$*, respectivamente. Se a derrota vier no jogo atual, a probabilidade de ganhar na próxima partida diminui para* $1/4$ *e a de perder novamente aumenta para* $1/2$*.*

Perceba que as probabilidades de resultado da partida atual, não depende de resultados anteriores ao atual, podemos então modelar uma cadeia de Markov.

Com as informações acima podemos determinar as probabilidades de transição, representaremos numa matriz, onde D é derrota, E é empate e V é vitória.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} V & E & D \end{array} \\
\begin{array}{c} V \\ E \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

1.1 Matriz de Transição

As entradas da primeira linha da matriz P no exemplo anterior representa a probabilidade para os possíveis resultados depois de um jogo vitorioso. Da mesma forma as entradas da segunda (jogo atualmente empatado) e terceira linha (jogo atual com derrota). Tal matriz quadrada P é chamada de **matriz de transição de probabilidade**.

Definição 1.1.1. *Considere uma cadeia de Marokv com estados* $1, 2, \cdots, N$. *Seja* p_{ij} *a probabilidade de transição do estado* i *para o estado* j. *Então a matriz* $P_{n\times n}$ *com entradas* $a_{ij} = p_{ij}$ *denomina-se matriz de transição da cadeia de Markov.*

Podemos considerar uma pergunta mediante aos dados: qual a probabilidade de estarmos no estado j daqui a dois dias, iniciando no estado i? Denotaremos essa probabilidade por $P_{ij}^{(2)}$. No exemplo 1 vimos que se o Flamengo ganhasse hoje, então o evento que ele perderá daqui a dois jogos é a união disjunta dos eventos:

1. No próximo jogo ele ganha e depois perde.
2. No próximo jogo ele empata e depois perde.
3. No próximo jogo ele perde e depois perde.

A probabilidade do primeiro evento 1 ocorrer é o produto da probabilidade condicional de que ele ganhe o próximo jogo, dado que ele ganhou o jogo atual, com a probabilidade condicional de que ele perca daqui a dois jogos, dado que ele vencerá o próximo jogo. Podemos escrever essa probabilidade como $p_{11} \cdot p_{13}$. Os outros dois seguem o mesmo raciocínio e é fácil ver que

$$p_{13}^2 = p_{11} \cdot p_{13} + p_{12} \cdot p_{23} + p_{13} \cdot p_{33}.$$

Essa equação deve lembrar ao leitor o produto escalar de dois vetores, o vetor primeira linha de P e o vetor terceira coluna de P. Em geral, se uma cadeia de Markov tem estados finitos r, então $p_{ij}^2 = \sum_r^{k=1} p_{ik} \cdot p_{kj}$.

Teorema 1.1.1. *Seja P a matriz de transição de uma cadeia de Markov. A ij-ésima entrada da matriz P^n nos dá a probabilidade de que a cadeia de Markov, a partir do estado s_i, esteja no estado s_j após n passos.*

Continuando com o exemplo do Flamengo, podemos calcular as iteradas da matriz P e ter a probabilidade dos resultados dos jogos futuros.

$$P^2 = \begin{array}{c} \\ V \\ E \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} V & E & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,438 & 0,188 & 0,375 \\ 0,375 & 0,250 & 0,375 \\ 0,375 & 0,188 & 0,438 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$P^3 = \begin{array}{c} \\ V \\ E \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} V & E & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,406 & 0,203 & 0,391 \\ 0,406 & 0,188 & 0,406 \\ 0,391 & 0,203 & 0,406 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$P^4 = \begin{array}{c} \\ V \\ E \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} V & E & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,402 & 0,199 & 0,398 \\ 0,398 & 0,203 & 0,398 \\ 0,398 & 0,199 & 0,402 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$P^5 = \begin{array}{c} \\ V \\ E \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} V & E & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,399 \\ 0,4 & 0,199 & 0,4 \\ 0,399 & 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$P^6 = \begin{array}{c} \\ V \\ E \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} V & E & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Perceba que os resultados da matriz P^6 nos dá a probabilidade de resultados daqui a 6 jogos, como visto anteriormente. Perceba também que os resultados depois de 6 jogos independem do resultado do jogo atual (vetores linhas iguais). As probabilidades para os três resultados V, E e D em P^6 são $0,4$; $0,2$ e $0,4$, respectivamente, e não importa onde a cadeia começou.

Este é um exemplo de uma cadeia Regular, que estudaremos mais tarde. Para esse tipo de cadeia é verdade que as previsões de longo alcance independem do estado de partida. Nem todas as cadeias são regulares, mas esse tipo de cadeia é um tipo muito importante e fonte de pesquisas.

1.2 Vetor Probabilidade

Definição 1.2.1. *Qualquer vetor $w = \{w_1, \cdots, w_k\}$, tal que $w_1 \geq 0$ e $w_1 + \cdots + w_k = 1$ é chamado de **vetor probabilidade**.*

Se w é um vetor de probablidade que representa o estado inicial de uma cadeia de Markov, então pensamos na i^{a} componente de w como a probabilidade de que a cadeia de comece no estado s_i. Mediante as definições, é fácil provar o seguinte teorema:

Teorema 1.2.1. *Seja P a matriz de transição de uma cadeia de Markov, e seja u o vetor de probabilidade que representa a distribuição de partida (estado inicial). Então a probabilidade de que a cadeia esteja no estado s_i após n passos é a i-ésima entrada do vetor*

$$u^{(n)} = uP^n.$$

Capítulo 2

Cadeias Absorventes

O tema cadeias de Markov é melhor estudado quando consideramos alguns tipos especiais de cadeias de Markov. Primeiramente vamos estudar as cadeias de Markov absorventes.

Definição 2.0.2. *Um estado s_i é chamado de estado absorvente se $p_{ii} = 1$. Uma cadeia de Markov é dita absorvente se existe ao menos um estado absorvente, além do mais, se for possível, a partir de qualquer estado, atingir um estado absorvente (não necessariamente em um único passo). Um estado que não é absorvente é chamado de estado de transição.*

Exemplo 2.0.1. *Um estudo realizado pela universidade da Carolina do Norte em pacientes dum determinado hospital foi modelado por uma cadeia de Markov: 0 (morto), 1 (estado desfavorável), 2 (estado favorável). A matriz de transição tem um ciclo de 72 horas.*

$$
P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \;\;0\;\; & \;\;\;1\;\;\; & \;\;\;2\;\;\; \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,085 & 0,779 & 0,136 \\ 0,017 & 0,017 & 0,966 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Perceba que $p_{00} = 1$, ou seja, s_0 é um estado de absorção, uma vez que o paciente morto, a cada passo ele continuará morto. Os estados 1 e 2 são os estados de transição e a partir de qualquer um destes é possível chegar no estado de absorção. Daí, a cadeia é absorvente.

A pergunta mais óbvia que podemos fazer é a seguinte: qual a probabilidade que o processo acabe por ter chegado num estado absorção? Outras questões: em média, quanto tempo vai demorar para o processo ser absorvido? Em média, quantas vezes o processo passará por determinado estado de transição até ser absorvido? As respostas para essas perguntas dependem de qual estado a cadeia se inicia, bem como as probabilidades de transição, essas perguntas serão respondidas a seguir.

2.1 Forma Canônica

Considere uma cadeia de Markov absorvente arbitrária. Reenumere os estados de modo que os estados de transição venham primeiro. Se tivermos r estados absorventes e t estados de transição, então a matriz de transição terá a seguinte forma canônica.

$$P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} TR & ABS \end{array} \\ \begin{array}{c} TR \\ \\ ABS \end{array} & \begin{bmatrix} Q & R \\ & \\ O & I \end{bmatrix} \end{array}.$$

Aqui, I é matriz $r \times r$ identidade, O é uma matriz nula $t \times r$ com entradas nulas, R é uma matriz não nula $t \times r$ e Q uma matriz $t \times t$. Anteriormente, vimos que a ij-ésima entrada da matriz P^n é a probabilidade de sairmos do estado s_i e chegarmos ao estado s_j em n passos. Com um argumento semelhante, podemos mostrar que P^n é da forma

$$P^n = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} TR & ABS \end{array} \\ \begin{array}{c} TR \\ \\ ABS \end{array} & \begin{bmatrix} Q^n & * \\ & \\ O & I \end{bmatrix} \end{array},$$

onde o $*$ representa uma matriz $t \times r$ no canto superior de P^n. Essa submatriz pode ser escrita em termos de R e Q, mas a expressão é complicada e não é necessária agora.

2.2 Probabilidade de Absorção

A forma de P^n nos mostra que as entradas da matriz Q^n nos dá a probabilidade de chegarmos a qualquer estado transitório após n passos, iniciando de um estado transitório. Para o nosso próximo teorema, mostraremos que a probabilidade de estarmos em um estado de transição em n passos (quando $n \to \infty$) se aproxima de zero. Assim, cada entrada de Q^n deve se aproximar de zero a medida que n torna-se muito grande, isto é, $Q^n \to 0$.

Teorema 2.2.1. *Em uma cadeia de Markov de absorção, a probabilidade do processo ser absorvido é* 1*, isto é,* $Q^n \to 0$ *quando*

$$n \to \infty$$

.

Demonstração. Por definição de cadeia absorvente, de cada estado s_j é possível chegar num estado absorvente. Seja m_j o número mínimo de passos para atingirmos um estado absorvente, iniciando de s_j. Seja p_j a probabilidade de que, a parte de s_j, o processo não seja absorvido em m_j passos. Então $p_j < 1$. Seja m o maior dos m_j's e p o maior dos p_j's. A probabilidade do processo não ser absorvido em m etapas é menor ou igual a p, a probabilidade de não ser absorvido em $2m$ passos é menor ou igual a p^2, etc. Um vez que $p < 1$, $p^n \to 0$ quando $n \to \infty$, ou seja, essas probabilidades tendem a zero, daí $Q^n = 0$.

□

2.3 A Matriz Fundamental

Teorema 2.3.1. *Para uma cadeia de Markov absorvente, a matriz* $I - Q$ *tem uma inversa* $N = I + Q + Q^2 + Q^3 + \cdots$. *A* ij*-ésima entrada* n_{ij} *da matriz* N *nos dá o número esperado de vezes que a cadeia estará no estado* s_j*, iniciando em* s_i*, até ser absorvido.*

Demonstração. Seja $(I - Q)_{x=0}$; que é $x = Qx$. Quando interamos, observamos que $x = Q^n x$. ($x = Qx \Rightarrow x = Q \cdot Qx \Rightarrow x = Q^2 x$). Fazendo $Q \to 0$, temos que $Q^n x \to 0$, então $x = 0$. Assim, $(I - Q)^{-1} = N$ existe. Observe que $(I-Q)(I+Q+Q^2+\cdots+Q^n) = I - Q^{n+1}$. Assim, multiplicando ambos os lados por N, obtemos

$$I + Q + Q^2 + Q^3 + \cdots + Q^n = N(I - Q^{n+1}).$$

Fazendo $n \to \infty$, temos

$$N = I + Q + Q^2 + Q^3 + \cdots + Q^n + \cdots$$

Seja s_i e s_j dois estados de transição, e assumamos ao longo da prova que i e j são fixos. Seja $x^{(k)}$ uma variável aleatória que assume 1 se a cadeia está no estado s_j em k passos, e 0 caso constrário. Para k, esta variável depende tanto de i quanto de j. Temos que $P(x^{(k)} = 1) = q_{ij}^{(k)}$, e $P(x^k = 0) = 1 - q_{ij}^{(k)}$, onde $q_{ij}^{(k)}$ é a ij-ésima entrada de Q^k. Quando $k = 0$, temos $Q^0 = I$. Temos que $E(x^k) = q_{ij}^{(k)}$. Então, o número esperado de vezes que a cadeia estará em s_j, sabendo que iniciou-se em s_i, nos n primeiros passos, é

$$E(x^0 + x^1 + \cdots + x^n) = q_{ij}^0 + q_{ij}^1 + \cdots + q_{ij}^n.$$

Fazendo n tender ao infinito, obtemos

$$E(x^0 + x^1 + x^2 + \cdots) = q_{ij}^0 + q_{ij}^1 + q_{ij}^2 + \cdots .$$

□

Teorema 2.3.2. *Seja t_i o número esperado de passos antes da cadeia ser absorvida, dado que iniciamos do estado S_i, e seja T o vetor coluna com entradas t_i, então $t = Nc$, onde c é um vetor coluna com entradas iguais a 1.*

Demonstração. Se somarmos todas as entradas da i-ésima linha de N, teremos o número esperado de vezes de passarmos por qualquer dos estados transitórios, iniciando de um determinado estado S_i , que é, justamente, o tempo necessário antes de ser absorvido. Assim, t_i é a soma das entradas na i-ésima linha de N. Se escrevermos esta declaração na forma matricial, obteremos o teorema. □

Capítulo 3

Cadeias Irredutíveis

O objetivo deste capítulo é estudar as cadeias de markov regulares, que tem várias aplicações fora da Matemática, como o **PageRank**, que é o algoritmo utilizado na ferramente de busca da Google.

Definição 3.0.1. *Uma cadeia de Markov é* ***irredutível*** *se dados quaisquer dois estados $i, j \in S$, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $p_{ij}^{(r)} > 0$. Em outras palavras, é sempre possível ir de um estado para outro, não necessariamente em um passo.*

Dado um estado $i \in S$, definimos $T(i) := \{a \in \mathbb{N} : p_{ii}^{(a)} > 0\}$. O **período** de i é o m.d.c. de $T(i)$.

Proposição 3.0.1. *Se uma cadeia de Markov é irredutível, então $mdc\ T(i) = mdc\ T(j), \forall i, j \in P$.*

Demonstração. Dados dois estados quaisquer $i, j \in P$, existem r e s naturais tais que $p_{ij}^{(r)} > 0$ e $p_{ji}^{s} > 0$. Logo, $r + s \in T(i) \cap T(j)$. Além disso, $T(i) \subset T(j) - m$, o que implica que $m.d.c\ T(j)|m.d.c\ T(i)$. Provamos de forma análoga que $m.d.c\ T(i)|m.d.c\ T(j)$. Portanto, $mdc\ T(i) = mdc\ T(j)$, como queríamos demonstrar. □

Assim, podemos definir o período de uma cadeia irredutível P como sendo $m.d.c.\ T(x)$, onde $x \in S$. Uma cadeia irredutível é **aperiódica** se tiver período igual a 1. Se a cadeia não for aperiódica, dizemos que ela é **periódica**.

Definição 3.0.2. ***(Cadeia Regular)*** *Uma cadeia de Markov é* ***regular*** *se existe um natural r_0 tal que para todo $r \geq r_0$ $p_{ij}^{(r)} > 0$, $\forall\ i, j \in S$. Ou seja, se existe uma potência de P com todas as entradas positivas.*

Observação: Diremos que a matriz de transição P de uma cadeia de Markov é uma matriz regular se a cadeia de markov associada a ela for regular.

A primeira coisa que devemos notar é que toda cadeia regular é irredutível. Entretanto, nem toda cadeia irredutível é regular. Por exemplo, se a cadeia tem matriz de transição:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que essa cadeia é irredutível, pois $P^2 = I$. Porém, Temos que $P^n = P$, se n for ímpar, e $P^n = I$, se n for par. Como, ambas as matrizes P e I têm entradas nulas, segue-se que essa cadeia é irredutível mas não é regular.

Pelo que foi visto acima, podemos indagar qual seria uma condição necessária e suficiente para que uma matriz irredutível seja regular. Está condição será dada no

Teorema 3.0.3. *Uma cadeia irredutível é regular se, e somente se, ela é aperiódica.*

Demonstração. Para provar a ida vamos usar o seguinte resultado de Teoria dos Números :

Lema 3.0.1. *Seja T um conjunto de números naturais não-vazio que possui as seguintes propriedades:*

1. *$m.d.c\ T = 1$*

2. *Se $r, s \in T$, então $s + t \in T$.*

Então existe $t \in T$ tal que $s \geq t, s \in \mathbb{N} \Longrightarrow t \in T$.

Dado $i \in S$, temos que $m.d.c.\ T(i) = 1$ e se $r, s \in T(i)$, então $r+s \in T(i)$. Logo, pelo Lema 1, segue-se que existe $t_i \in T(i)$ tal que $t \geq t_i$ implica $t \in T_i$. Como a cadeia é irredutível, para qualquer $j \in S$, existe $r = r(i,j)$ tal que $p_{ij}^{(r)} > 0$. Logo, para qualquer que seja $t \geq t_i + r$, temos que $p_{xy}^{(t)} > 0$. Consequentemente, para $t \geq t'_i$, onde $t'_x := t_i + \max_{j \in S} r(i,j)$, tem-se que $p_{ij}^{(t)} > 0, \forall j \in P$. Defina $r_0 := \max_{i \in S} t'_i$. Para todo $r \geq r_0$ e para todos $i, j \in S$, temos que $p_{ij}^{(r)} > 0$. Portanto, P é regular.

Reciprocamente, se a matriz de transição P for regular, existe r tal que P^r tem entradas positivas. Logo, a matriz P^{r+1} também tem todas as entradas positivas, o que implica que o período da cadeia é igual a 1, pois m.d.c$(r, r + 1) = 1$. $\square$

Capítulo 4

Teorema da Convergência

Nesta seção vamos provar aquele que é o principal teorema sobre cadeias de markov regulares e que é extremamente utilizado nas aplicações das cadeias de markov.

4.1 Variação Total Entre Duas distribuições de Probabilidade

Definição 4.1.1. *Sejam $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ e p e q duas distribuições de probabilidade em S. Definimos a **variação total** entre p e q como sendo*

$$\|p - q\|_{VT} := \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} |p(s_k) - q(s_k)|$$

Aplicando a desigualdade triangular, temos que $\|p - q\|_{VT} \leq 1$. Ademais, a variação total é uma métrica sobre o conjunto de todas as distribuições de probabilidade de um conjunto finito.

Exemplo 4.1.1. *Sejam $S = \{a, b, c\}$ e p e q distribuições de probibilidades tais que $(0,2 \;\; 0,3 \;\; 0,5)$ e $q = (0,1 \;\; 0,4 \;\; 0,5)$ são os vetores de probabilidade asssociados a p e q, respectivamente. Temos que*

$$\|p - q\|_{VT} = 0,5(0,1 + 0,1 + 0) = 0,1$$

Seja P uma matriz de transição. Primeiramente note que a i-ésima linha de qualquer potência de P é uma distribuição de probabilidade. A i-ésima linha de P^r será denotada por $P^r(i, .)$.

Teorema 4.1.1. ***(Teorema da Convergência)*** *Seja P uma matriz regular. Existem $\alpha \in (0,1)$ e $c > 0$ tais que*

$$\lim_{t\to\infty} max_{i\in S} \|P^r(i,.) - \pi\|_{VT} = 0.$$

Onde π é uma distribuição de probabilidade em S tal que $\pi P = \pi$.

Demonstração. Como a cadeia é regular, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $p_{ij}^{(r)} > 0, \forall i, j \in S$. Além disso, a existência de π segue diretamente do teorema de Perron-Frobenius. Para $1 > \delta > 0$ suficientemente pequeno temos que

$$P_{ij}^r > \delta\pi(j)$$

para todos $i, j \in S$. Seja $\epsilon = 1 - \delta$ e Π . Considere a matriz Q tal que

$$P^r = (1-\epsilon)\Pi + \epsilon Q$$

onde Π é a matriz quadrada que tem linhas idênticas e iguais a π.

Note que Q é uma matriz de transição, que $M\Pi = \Pi$ e $\Pi P = \Pi$. Portanto, aplicando o princípio de indução finita, temos que

$$P^{rk} = (1-\epsilon^k)\Pi + \epsilon^k Q^k.$$

Multiplicando a desigualdade acima por $P^j, j \in \mathbb{N}$, e reaaranjando os termos, temos que

$$P^{rk+j} - \Pi = \epsilon^k (Q^k P^j - \Pi).$$

Logo, para todo $i \in S$

$$\left\|P^{rk+j}(i,.) - \pi\right|_{VT} = \epsilon^k \left\|Q^k P^j(i,.) - \pi\right\|_{VT} \le \epsilon^k.$$

Fazendo $k \to \infty$, obtemos o desejado. $\square$

Capítulo 5

A Ruína do Jogador

Um jogador entra num cassino justo com X reais. Ele participa de um jogo de apostas independentes. Em cada aposta ele recebe 1 real caso dê vitória e perde 1 real caso contrário. Vamos admitir que os recursos do cassino são ilimitados, ou seja, por mais que o jogador ganhe, ele nunca 'quebra a banca'. Suponha que ele jogue indefinidamente, parando apenas quando fica sem dinheiro.

Pergunta: Qual a probabilidade do jogador, em algum momento, ficar sem dinheiro?

Afim de responder a resposta acima vamos fazer um breve estudo de passeios aleatóricos.

5.1 Passeios Aleatórios

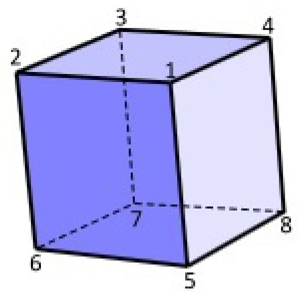
Definição 5.1.1. *Sejam $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ variáveis aleatórias independentes e igualmente distribuídas tais que $E(X_i) < \infty$. Sejam, $S_0 = C$ e $S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \geq 1$. O processo $\{S_n, n \geq 0\}$ é chamado **passeio aleatório**.*

Observe que um passeio aleatório é também um processo markoviano.

Exemplo 5.1.1. *Considere uma partícula que se move de modo aleatório sobre os vértices de um cubo. Sejam $I = \{i, 1 \leq i \leq 8\}$ o conjunto dos vértices do cubo e*

$$\begin{cases} P(S_{n+1} = j | S_n = i) = \frac{1}{3}, \text{ se } i \text{ e } j \text{ são ligados por uma aresta,} \\ P(S_{n+1} = j | S_n = i) = 0, \text{ caso contrário,} \end{cases}$$

onde S_n indica a posição assumida pela partícula no n-ésimo salto (S_0 indica o vértice inicial).



Definição 5.1.2 (Passeio Aleatório Simples)**.** *Um **passeio aleatório simples** em $\mathbb{Z}$ consiste de uma partícula inicialmente num ponto $x \in \mathbb{Z}$, que se move em $\mathbb{Z}$ e a cada instante pode pular de um ponto x para um dos pontos vizinhos, $x+1$ ou $x-1$, com probabilidade p de pular para a direita e probabilidade $1-p=q$ de pular para a esquerda.*

- *Se $p = q = \frac{1}{2}$ o passeio aleatório é dito **simétrico**.*
- *S_n denota a posição da partícula no instante n.*

Exemplo 5.1.2 (A Ruína do Jogador)**.** *Matematicamente este problema é descrito como o passeio aleatório simples simétrico $\{S_n; n \geq 0\}$, onde*

$$\begin{cases} S_0 = X, \\ S_n = X + \sum_{i=1}^{n} X_i, n \geq 1 \end{cases}$$

e

$$X_i = \begin{cases} 1, & \textit{se o jogador ganha a i-ésima aposta,} \\ -1, & \textit{se o jogador perde a i-ésima aposta.} \end{cases}$$

Ou seja, a variável aleatória X_i indica o ganho da i-ésima aposta e S_n indica o capital acumulado na n-ésima aposta.

Definição 5.1.3. *Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ uma cadeia de Markov com matriz de transição P. O* ***tempo de batida*** *de um subconjunto $A \subset I$ (I é o conjunto onde $(X_n)_{n\geq 0}$ assume valores) é uma variável aleatória*

$$H^A : \Omega \longrightarrow \{0, 1, 2, \cdots\} \cup \{\infty\}$$

onde consideramos que o ínfimo do conjunto vazio é ∞.

Assim, a probabilidade de que, iniciando em i, $(X_n)_{n\geq 0}$ sempre bata em A é

$$h_i^A := P_i(H^A < \infty).$$

Teorema 5.1.1. *O vetor de probabilidade de batida $h^A = h_i^A; i \in I$ é a mínima solução não-negativa do sistema:*

$$\begin{cases} h_i^A = 1, \ \textit{se } i \in A \\ h_i^A = \sum_{j\in I} p_{ij} h_j^A, \ \textit{se } i \notin A. \end{cases}$$

Observação: A minimalidade significa que se $x = (x_i, i \in I)$ é outra solução com $x_i \geq 0$ para todo $i \in I$, então $x_i \geq h_i^A$, $\forall i \in I$.

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que h^A é solução do sistema:

- Se $i \in A$, então $h_i^A = P_i(H^A < \infty) = 1$.
- Se $i \notin A$, observamos que $\{X_1 = j\}_{j\in I}$ é uma coleção de conjuntos 2 a 2 disjuntos e que
$$\cup_{j\in I}\{X_1 = j\} = \Omega.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \{H^A < \infty\} &= \{H^A < \infty\} \cap (\cup_{j\in I}\{X_1 = j\}) \\ &= \cup^{j\in I}(\{H^A < \infty\} \cap \{X_1 = j\}) \end{aligned}$$

é uma partição do conjunto $\{H^A < \infty\}$. Temos então que

$$\begin{aligned} P_i(H^A < \infty) &= \sum_{j\in I} P_i(H^A < \infty, X_1 = j) \\ &= \sum_{j\in I} P_i(H^A < \infty | X_1 = j) \cdot P_i(X_1 = j). \end{aligned}$$

Pela propriedade de Markov, temos que

$$P_i(H^A < \infty | X_1 = j) = P_j(H^A < \infty),$$

donde segue que

$$P_i(H^A < \infty) = \sum_{j \in I} P_i(X_1 = j) \cdot P_j(H^A < \infty),$$

ou seja,

$$h_i^A = \sum_{j \in I} p_{ij} \cdot h_j^A.$$

Portanto, h^A é solução do sistema.

Agora vamos mostrar que h^A é é solução mínima do sistema. Suponha que $x = (x_i, i \in I)$ é outra solução do sistema. Então, se $i \in A$, $x_i = h_i^A = 1$. Se $i \notin A$, então

$$x_i = \sum_{j \in I} p_{ij} x_j = \sum_{j \in A} p_{ij} + \sum_{j \notin A} x_j p_{ij} x_j. \tag{5.1}$$

Agora temos que, se $j \in A$, então $x_j = 1$ e se $j \notin A$ então

$$x_j = \sum_{k \in I} p_{jk} x_k.$$

Substituindo na equação (5.1) temos

$$\begin{aligned}
x_i &= \sum_{j \in A} p_{ij} + \sum_{j \notin A} p_{ij} \left(\sum_{k \in I} p_{jk} \cdot x_k \right) \\
&= \sum_{j \in A} p_{ij} + \sum_{j \notin A} p_{ij} \left(\sum_{k \in A} p_{jk} \cdot x_k + \sum_{k \notin A} p_{jk} \cdot x_k \right) \\
&= \sum_{j \in A} p_{ij} + \left(\sum_{j \notin A} p_{ij} \right) \left(\sum_{k \in A} p_{jk} \right) + \sum_{j \notin A} \sum_{k \notin A} (p_{ij} p_{jk} \cdot x_k) \\
&= P_i(X_1 \in A) + P_i(X_1 \notin A, x_2 \in A) + \sum_{j \notin A} \sum_{k \notin A} (p_{ij} \cdot p_{jk} \cdot x_k).
\end{aligned}$$

Fazendo

$$x_k = \sum_{l \in I} p_{kl} \cdot x_l = \sum_{l \in A} p_{kl} \cdot x_l + \sum_{l \notin A} p_{kl} \cdot x_l$$

e substituindo na equação acima, obteremos

$$\begin{aligned} x_i = \; & P_i(X_1 \in A) + P_i(X_1 \in A, X_2 \in A) + P_i(X_1 \notin A, x_2 \notin A, X_3 \notin A) \\ & + \sum_{j \notin A} \sum_{k \notin A} \sum_{l \notin A} p_{kl} \cdot x_l. \end{aligned}$$

Repetindo este processo. após n passos, obteremos

$$\begin{aligned} x_i = \; & P_i(X_1 \in A) + \cdots + P_i(X_1 \notin A, \cdots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A) + \\ & + \sum_{j_1 \notin A} \sum_{j_2 \notin A} \cdots \sum_{j_n \notin A} p_{ij_1} \cdot p_{j_1 j_2} \cdots p_{j_{n-1} j_n} \cdot x_n. \end{aligned}$$

Se n é não negativo, a última parcela da soma acima também será, logo teremos

$$x_i \geq P_i(X_1 \in A) + \cdots + P_i(X_1 \notin A, \cdots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A).$$

Agora observamos que

$$P_i(X_1 \in A) + \cdots + P_i(X_1 \notin A, \cdots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A) = P_i(H^A \leq n).$$

Ou seja,

$$x_i \geq P_i(H^A \leq n), \text{ para todo} n.$$

Segue-se que

$$x_i \geq \lim_{n \to \infty} P_i(H^A \leq n) = P_i(H^A \leq \infty) = h_i^A.$$

Portanto, h^A é solução mínima do sistema. □

Exemplo 5.1.3. *Voltando a ruína do jogador. Afim de responder a pergunta inicial deste capítulo, queremos encontrar a probabilidade de $(S_n)_{n \geq 0}$ sempre bater no conjunto $A = \{0\}$, iniciando no estado i, ou seja, queremos encontrar h_i^A.*

Pelo teorema anterior, temos que o vetor probabilidade de batida $h^A := (h_i^A, i \geq 0)$ é a solução mínima do sistema

$$\begin{cases} h_i^A = 1, i = 0 \\ h_i^A = \frac{1}{2} h_{i-1}^A + \frac{1}{2} h_{i+1}^A, i \neq 0. \end{cases}$$

Para resolver o sistema, defina a variável aleatória

$$V_i = h_{i-1}^A - h_i^A, i \geq 1.$$

Da segunda equação do sistema, temos que

$$h_i^A = \frac{1}{2}h_{i-1}^A + \frac{1}{2}h_{i+1}^A = h_i^A = \frac{1}{2}h_i^A + \frac{1}{2}h_i^A,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}h_{i-1}^A - \frac{1}{2}h_i^A = \frac{1}{2}h_i^A - \frac{1}{2}h_{i+1}^A,$$

logo,

$$h_{i-1}^A - h_i^A = h_i^A - h_{i+1}^A,$$

donde temos que $V_i = V_{i+1}$*, para todo* $i \geq 1$.

Assim, temos que $V_1 + V_2 + \cdots + V_i = iV_1$. *Por outro lado, temos que*

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 + \cdots + V_i &= h_0^A - h_1^A + h_1^A - h_2^A + \cdots - h_{i-1}^A + h_{i-1}^A - h_i^A \\ &= h_0^A - h_i^A. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$iV_1 = h_0^A - h_i^A.$$

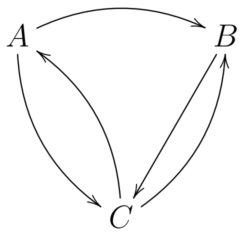
Segue-se então que $h_i^A = 1$ *para todo* $i \geq 0$. *Resolvendo o sistema, encontramos* $h_i = 1$ *para todo* $i \geq 0$. *Ou seja, com probabilidade* 1 *o jogador perderá todo dinheiro em algum momento!*

Lembrando que estávamos considerando um cassino. Mas vale ressaltar que, se a cada aposta o jogador tiver probabilidade maior que $1/2$ de vencer, então ele tem probabilidade positiva de nunca perder todo o dinheiro. Porém este modelo não é interessante, pois não modela a realidade.

Capítulo 6

Aplicações de Cadeias de Markov Regulares no PageRank

A princípio consideraremos que em nossa internet existem apenas três sites, são eles: A B e C.

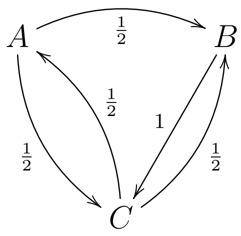


Dentro destes sites existem links que direcionamos ao site respectivo. É natural perguntar qual destes sites é o mais relevante, ou melhor, qual destes sites deve aparecer no topo de uma pesquisa em um buscador. Ou seja, se estes três são voltados à Matemática qual desses sites deve aparecer no topo de uma pesquisa. É intuitivo pensar que, como B tem dois links, B tem dois votos, e como C possui dois links que levam o acesso a C, C possui dois votos de popularidade e usando este raciocínio temos que

site	votos
A	1
B	2
C	2

Com este pensamento, diríamos que B e C estão empatados em relação a sua popularidade. Mas na vida real não podemos aplicar este método por muitos motivos.

A solução inicial para este problema desenvolvido pelo Google foi, em síntese, considerar que um usuário, estando no site A tem igual probabilidade de acessar o site B ou C. Ou seja,



montando uma matriz de transição temos,

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Note que P não é uma cadeia de Markov absorvente, e mais

$$P^2 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,25 & 0,25 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \end{bmatrix} \end{array}.$$

$$P^4 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,1875 & 0,3125 & 0,5 \\ 0,375 & 0,375 & 0,25 \\ 0,125 & 0,3125 & 0,5625 \end{bmatrix} \end{array}.$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ P^6 = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0,20 & 0,32 & 0,46 \\ 0,28 & 0,34 & 0,37 \\ 0,18 & 0,32 & 0,48 \end{bmatrix} \end{array}.$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ P^{10} = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0,21 & 0,33 & 0,44 \\ 0,22 & 0,33 & 0,43 \\ 0,21 & 0,33 & 0,44 \end{bmatrix} \end{array}.$$

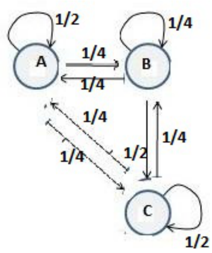
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ P^{12} = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0,221 & 0.333 & 0,445 \\ 0,224 & 0.333 & 0,442 \\ 0,221 & 0.333 & 0,445 \end{bmatrix} \end{array}.$$

O que temos é que P é uma matriz de transição de uma Cadeia de Markov regular. Observe também que para n suficientemente grande os vetores colunas são constantes. Exemplo:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ P^{16} = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0,222 & 0.333 & 0,444 \\ 0,222 & 0.333 & 0,444 \\ 0,222 & 0.333 & 0,444 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Então a probabilidade que o usuário acesse o site A depois de 16 cliques em links é igual a $0,2$, que também é a probabilidade de que o usuário acesse A depois de 16 cliques em links saindo de B ou C. Assim, a probabilidade de um usuário acessar A depois de 16 cliques em links é $0,2$, enquanto que em B e C são iguais a $0,3$ e $0,4$ respectivamente. Ou seja, o site C é o mais popular e A é o menos popular.

Novamente, sejam 3 sites existentes em toda a internet, mas agora de forma que nestes sites existam links que nos façam continuar no site, e em alguns casos a probabilidade de continuar no site é maior do que sair.



Montando a matriz de transição temos

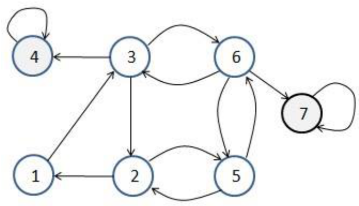
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ \\ B \\ \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Deste modo,

$$(X_1, X_2, X_3) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = (X_1, X_2, X_3).$$

Logo, $V = (X_1, \frac{3}{4}X_1, \frac{5}{4}X_1)$. Mas queremos que $X_1 = \frac{1}{3}$, assim $V = (\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{2})$.

Mas na prática não funciona bem assim. Sites são criados quase que a todo momento e um destes sites pode conter um link apenas para o seu próprio site. Considere



Nossa matriz de transição é escrita da seguinte forma

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

P é absorvente, mas não é regular e para estes casos a solução é feita da seguinte forma. Consideramos p igual a probabilidade do internauta saltar para uma página aleatória na internet, $p = \frac{1}{7}$.

$$A = (1-p)P^* + pM$$

$$M = \begin{bmatrix} 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \end{bmatrix}.$$

$$P^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}.$$

Na prática, seria como se o site estivesse colocando a probabilidade $\frac{1}{n}$ de saltar para um site qualquer.

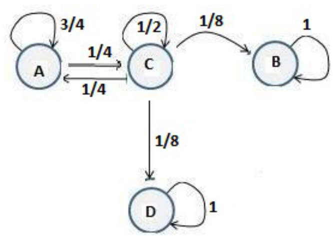
$$A = (0,85)P^{*}+(0,15)M = \begin{bmatrix} 0.21 & 0.21 & 0.87 & 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.02 \\ 0.44 & 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.44 & 0.02 & 0.02 \\ 0.02 & 0.304 & 0.02 & 0.30 & 0.21 & 0.30 & 0.02 \\ 0.14 & 0.14 & 0.14 & 0.14 & 0.14 & 0.14 & 0.14 \\ 0.02 & 0.44 & 0.02 & 0,021 & 0,021 & 0.44 & 0.02 \\ 0.02 & 0.021 & 0.30 & 0.021 & 0.30 & 0.02 & 0.30 \\ 0.14 & 0.142 & 0.14 & 0.14 & 0.14 & 0.14 & 0.14 \end{bmatrix}.$$

Interando a 11 vezes, obtemos

$$(0.11, 0.16, 0.19, 0.09, 0.16, 0.16, 0.09).$$

Ou seja, o site C é o mais popular.

Por fim, consideremos o esquema abaixo para nossa mini-internet.



Esse esquema pode ser interpretado da seguinte maneira: o site A tem 3 páginas para o seu próprio site e um link direcionado ao site C. Enquanto que o site C tem ao todo 8 links, 4 redirecionados a ele mesmo, 2 links para o site A e um link para B e outro para D.

Agora surgem perguntas interessantes a serem feitas como por exemplo, se o internauta está no site A, quantas vezes em média ele voltará ao site A antes de conhecer os sites B ou D? Outra pergunta seria, se o internauta está no site A, quantas vezes em média visitará outros sites antes de conhecer Bou D? E qual seria a probabilidade do internauta, saindo do site A, conhecer o site B?

As respostas para essas perguntas são encontradas no teorema visto para cadeias absorventes.

Montando a matriz de transição para o nosso problema temos

$$\begin{array}{c|cccc} & A & B & C & D \\ \hline A & & & & \\ B & & & & \\ C & & & & \\ D & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Pela forma canônica, temos que

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$(I - Q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Fazendo os cálculos, obtemos que

$$(I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = N.$$

Pelo teorema visto, temos que 8 é o número de vezes que o internauta passa em média por A antes de conhecer os sites B ou D saindo de A.

Para responder a segunda pergunta, temos que considerar

$$t = NC = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (12, 8).$$

Assim, o número esperado de sites que o internauta visite antes de conhecer o site B ou o site D, desde que saia do site A é 12.

A última pergunta é solucionada tomando

$$B = NR = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Deste modo a probabilidade do internauta acessar o site B, saindo do site A, é $\frac{1}{2}$.

Vamos agora calcular quem é o mais popular. Primeiro temos que colocar a probabilidade de escolher um site aleatório dentre os possíveis. No nosso caso esta probabilidade é $\frac{1}{4}$. Onde é a linha absorvente, colocamos a linha constante $\frac{1}{4}$.

$$P^* = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix};$$

e considerando

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

M é uma consideração para o caso em que o internauta não use os links e simplesmente saia pulando de site em site de modo aleatório.

$$A = 0,75 \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} + 0,25 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$p = 0,25$ é a probabilidade de saltar para um site qualquer desconsiderando o link.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{10}{16} & \frac{1}{16} & \frac{4}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{4}{16} & \frac{4}{16} & \frac{4}{16} & \frac{4}{16} \\ \frac{4}{16} & \frac{5}{32} & \frac{7}{16} & \frac{5}{32} \\ \frac{4}{16} & \frac{4}{16} & \frac{4}{16} & \frac{4}{16} \end{bmatrix}.$$

Calculando,

$$(X_1, X_2, X_3, X_4) \begin{bmatrix} \frac{10}{16} & \frac{1}{16} & \frac{4}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{4}{16} & \frac{4}{16} & \frac{4}{16} & \frac{4}{16} \\ \frac{4}{16} & \frac{5}{32} & \frac{7}{16} & \frac{5}{32} \\ \frac{4}{16} & \frac{4}{16} & \frac{4}{16} & \frac{4}{16} \end{bmatrix} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$$

obtemos o vetor solução

$$(X_1, \frac{19}{52}X_1, \frac{40}{52}X_1, \frac{19}{52}X_1),$$

mas desejamos que este vetor seja uma vetor linha da matriz de transição, assim sua soma tem que ser igual a 1. Desta forma, $X_1 = \frac{2}{5}$. Assim concluímos que o vetor é $(0.4, 0.1465, 0.30769, 0.14615)$. Dessa forma, o site mais acessado é o site A com 'popularidade' 0.4 e os que possuem a menor popularidade são os sites B e D. Podemos interpretar também da seguinte forma, se 1000 pessoas entrassem na mini-internet, $(0,4 \times 1000)$ pessoas, em média, acessariam o site A.

O PageRank é um mecanismo muito importante para o Google, mas um site cuja nota no método do PageRank é baixa não necessariamente tem menor prestígio. Atualmente o método que o Google usa é mais avançado e ainda considera mais coisas. Como por exemplo, se um site A é relacionado a música concede um link para um outro site B, que por sua vez é relacionado a matemática, este link de A para B é quase desprezível, pois estes sites não possuem a mesma base. Os conteúdos de A não estão muito relacionados com os conteúdos de B. A atualização é feita de 3 em 3 meses permitindo uma renovação dos dados.

Com isso encerramos a introdução ao algorítimo do PageRank criada por Larry Page, desenvolvida em 1995 na Universidade de Stanford. Aos interessados em calcular o PageRank de algum determinado site, o Google disponibiliza uma ferramenta online. Basta colocar o endereço do site, que o Google atribui uma nota em um escala de 0 a 10. Um meio de medir a relevância de um site, este é o objetivo do PageRank.

Toolbar PageRank	Real PageRank
0	1 - 6
1	6 - 30
2	30 - 166
3	166 - 915
4	915 - 5,033
5	5,033 - 27,681
6	27,681 - 152,244
7	152,244 - 837,339
8	837,339 - 4,605,367
9	4,605,367 - 25,329,516
10	25,329,516 +

Figura 6.1: Pagerank divulgado pelo google em uma escala de 0 a 10 e seus reais valores possíveis

Referências Bibliográficas

[1] Azevedo Filho, A., *Introdução ao Algoritmo PageRank do Google com o R: uma Aplicação de Autovalores/Autovetores e Cadeias de Markov* . Disponível em:. <http://rpubs.com/adriano/PageRank>. Acesso em: 31 outubro 2014.

[2] Brian, K.; Leise, T. -*The Linear Algebra Behind* , Dept. Mathematics and Computer Science, Amherst College. 2007. Brian, K. e Leise, T.

[3] Grinstead, C. M.; Snell, J. L. -*Introduction to Probability*, American Mathematical Society, 1997.

[4] Norris, J.R., *Markov Chains* Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, Cambridge University Press, 1997.

[5] Queiroz Pellegrino, G.; Ferreira dos Santos, L. R. *A Álgebra Linear por Trás do Google*. Disponível em:. <http://prezi.com/5g35pvki43-t/a-algebra-linear-por-tras-do-google/>. Acesso em: 31 outubro 2014.