Para Que Servem Os Números Irracionais?

Manifestações em Aritmética, Combinatória e Geometria

Graziele Souza Mózer[1] Humberto José Bortolossi[2]

[1]Colégio Pedro II - RJ

[2]Universidade Federal Fluminense - RJ

VII Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática – UFAL

2 a 6 de novembro de 2014

Introdução

Números irracionais

Números irracionais

- Os números irracionais no Ensino Básico:

  Geometria e Equações no 8º ano do Ensino Fundamental.

  Funções Reais e Geometria Espacial no 1º ano do Ensino Médio.

Números irracionais

- Os números irracionais no Ensino Básico:

  Geometria e Equações no 8º ano do Ensino Fundamental.
  Funções Reais e Geometria Espacial no 1º ano do Ensino Médio.

- Dificuldades em se ensinar e se aprender o assunto:

  Ferreira e Barros, Ripoll, Pasquini, Pommer, Santos, Souto.

Números irracionais

- Os números irracionais no Ensino Básico:

  Geometria e Equações no 8º ano do Ensino Fundamental.
  Funções Reais e Geometria Espacial no 1º ano do Ensino Médio.

- Dificuldades em se ensinar e se aprender o assunto:

  Ferreira e Barros, Ripoll, Pasquini, Pommer, Santos, Souto.

- Erro frenquente: "π é 3,14" e "$\sqrt{3}$ é 1,73"

  É o que se se faz, no final, no cálculo de comprimentos, áreas e volumes.
  O aluno não se depara com situações onde ele precisa usar o fato de que π e $\sqrt{3}$ são números irracionais.

"Se a razão entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro fosse escrita com 35 casas decimais, isto seria suficiente para determinar toda a circunferência do universo visível com um erro não maior do que o menor comprimento visível no mais potente microscópio."

Simon Newcomb (1882)

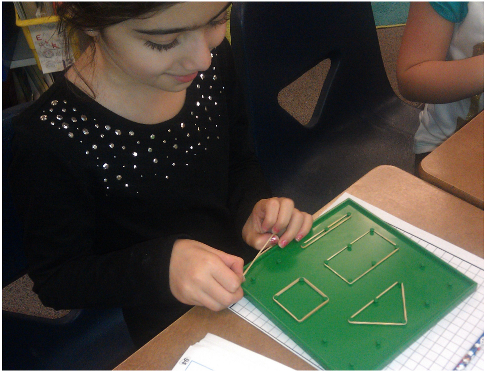
em *Logarithmic and Other Mathematical Tables: with Examples of Their Use and Hints On The Art of Computation*

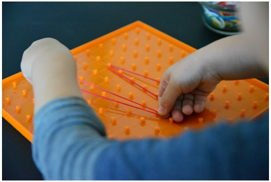
NOSSA PROPOSTA

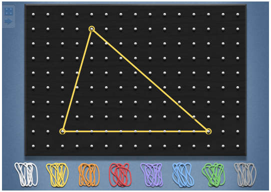
Em vez de relacionar números irracionais com cálculos de perímetros, áreas e volumes ou soluções de equações como costumam fazer muitos livros didáticos, neste minicurso procuramos dar um enfoque diferente aos números irracionais: apresentamos exemplos onde algo interessante e não óbvio acontece porque um determinado número é irracional.

Números Irracionais e Geoplanos

Geoplanos

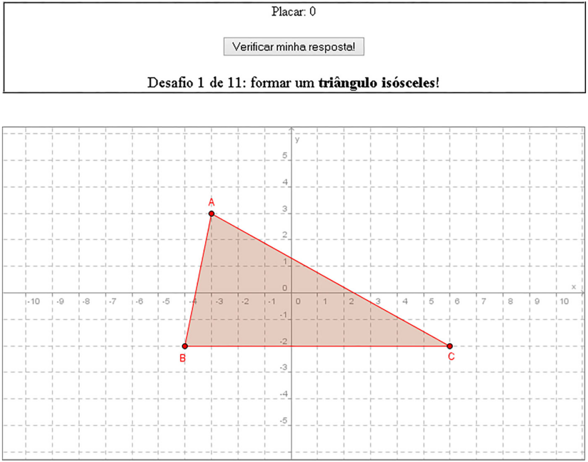






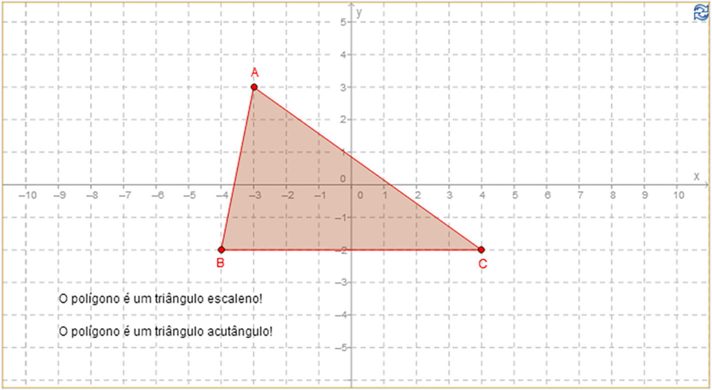
<https://itunes.apple.com/en/app/geoboard-by-math-learning/id519896952>

Quem quer jogar?



<www.uff.br/cdme/jct/>

Faltou algum tipo especial de triângulo?



<http://www.geogebratube.org/student/m39903?mobile=true>

$\sqrt{3}$ e triângulos equiláteros em geoplanos

Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices de coordenadas inteiras.

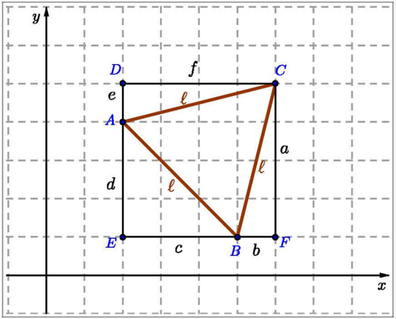
$\sqrt{3}$ e triângulos equiláteros em geoplanos

Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices de coordenadas inteiras.

Demonstração (via áreas).

Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices de coordenadas inteiras.

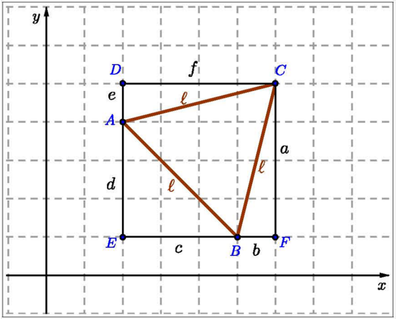
Demonstração (via áreas). Suponha, por absurdo, que tal triângulo equilátero exista (ver figura).



Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices de coordenadas inteiras.

Demonstração (via áreas). Suponha, por absurdo, que tal triângulo equilátero exista (ver figura). Então

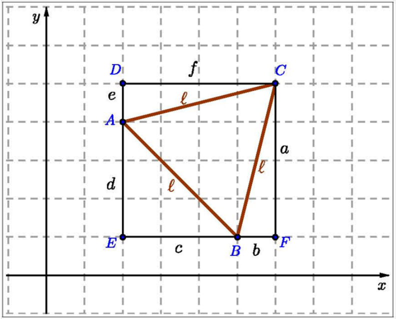
$$S_{ABC} = S_{EDCF} - (S_{BFC} + S_{AEB} + S_{ADC})$$



Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices de coordenadas inteiras.

Demonstração (via áreas). Suponha, por absurdo, que tal triângulo equilátero exista (ver figura). Então

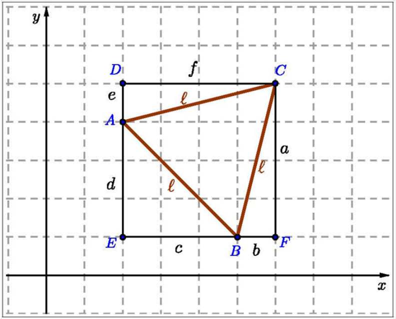
$$S_{ABC} = S_{EDCF} - (S_{BFC} + S_{AEB} + S_{ADC})$$
$$\Downarrow$$
$$\ell^2\sqrt{3}/4 = af - (ab/2 + cd/2 + ef/2)$$



Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices de coordenadas inteiras.

Demonstração (via áreas). Suponha, por absurdo, que tal triângulo equilátero exista (ver figura). Então

$$S_{ABC} = S_{EDCF} - (S_{BFC} + S_{AEB} + S_{ADC})$$
$$\Downarrow$$
$$\ell^2\sqrt{3}/4 = af - (ab/2 + cd/2 + ef/2)$$
$$\Downarrow$$
$$\ell^2\sqrt{3} = 4\,af - 2\,(ab + cd + ef)$$



Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices de coordenadas inteiras.

Demonstração (via áreas). Suponha, por absurdo, que tal triângulo equilátero exista (ver figura). Então

$$S_{ABC} = S_{EDCF} - (S_{BFC} + S_{AEB} + S_{ADC})$$

$$\Downarrow$$

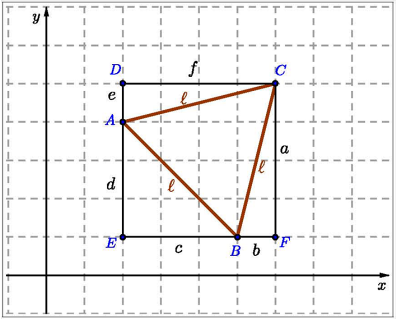
$$\ell^2\sqrt{3}/4 = af - (ab/2 + cd/2 + ef/2)$$

$$\Downarrow$$

$$\ell^2\sqrt{3} = 4\,af - 2\,(ab + cd + ef)$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{3} = \frac{4\,af - 2\,(ab + cd + ef)}{\ell^2}.$$

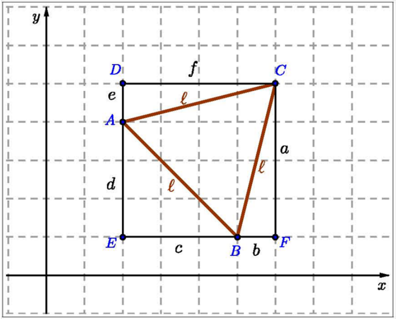


$\sqrt{3}$ e triângulos equiláteros em geoplanos

Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices de coordenadas inteiras.

Demonstração (via áreas). Suponha, por absurdo, que tal triângulo equilátero exista (ver figura). Então

$$S_{ABC} = S_{EDCF} - (S_{BFC} + S_{AEB} + S_{ADC})$$
$$\Downarrow$$
$$\ell^2\sqrt{3}/4 = af - (ab/2 + cd/2 + ef/2)$$
$$\Downarrow$$
$$\ell^2\sqrt{3} = 4\,af - 2\,(ab + cd + ef)$$
$$\Downarrow$$
$$\sqrt{3} = \frac{4\,af - 2\,(ab + cd + ef)}{\ell^2}.$$

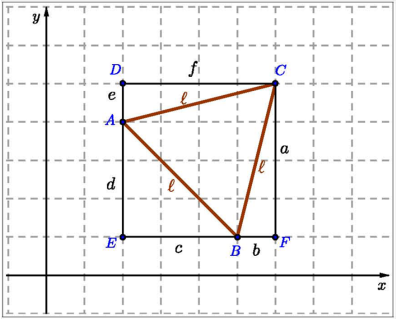


Contradição

Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices de coordenadas inteiras.

Demonstração (via áreas). Suponha, por absurdo, que tal triângulo equilátero exista (ver figura). Então

$$S_{ABC} = S_{EDCF} - (S_{BFC} + S_{AEB} + S_{ADC})$$
$$\Downarrow$$
$$\ell^2\sqrt{3}/4 = af - (ab/2 + cd/2 + ef/2)$$
$$\Downarrow$$
$$\ell^2\sqrt{3} = 4\,af - 2\,(ab + cd + ef)$$
$$\Downarrow$$
$$\sqrt{3} = \frac{4\,af - 2\,(ab + cd + ef)}{\ell^2}.$$

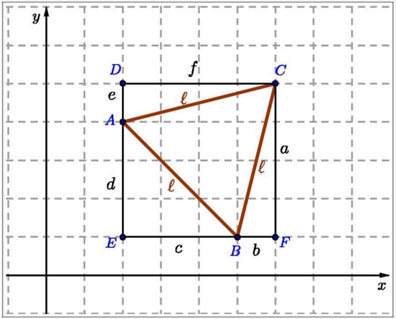


Contradição: $\sqrt{3}$ é irracional

Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices de coordenadas inteiras.

Demonstração (via áreas). Suponha, por absurdo, que tal triângulo equilátero exista (ver figura). Então

$$S_{ABC} = S_{EDCF} - (S_{BFC} + S_{AEB} + S_{ADC})$$
$$\Downarrow$$
$$\ell^2\sqrt{3}/4 = af - (ab/2 + cd/2 + ef/2)$$
$$\Downarrow$$
$$\ell^2\sqrt{3} = 4\,af - 2\,(ab + cd + ef)$$
$$\Downarrow$$
$$\sqrt{3} = \frac{4\,af - 2\,(ab + cd + ef)}{\ell^2}.$$



Contradição: $\sqrt{3}$ é irracional e $\frac{4\,af-2\,(ab+cd+ef)}{\ell^2}$ é racional. ■

$\sqrt{3}$ e triângulos equiláteros em geoplanos

Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices de coordenadas inteiras.

$\sqrt{3}$ e triângulos equiláteros em geoplanos

Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices de coordenadas inteiras.

Demonstração (via trigonometria).

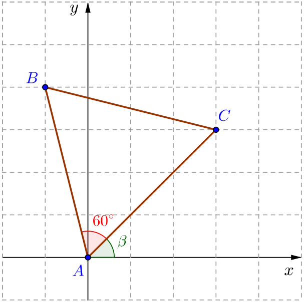
Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices de coordenadas inteiras.

Demonstração (via trigonometria). Suponha, por absurdo, que tal triângulo equilátero exista.

$\sqrt{3}$ e triângulos equiláteros em geoplanos

Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices de coordenadas inteiras.

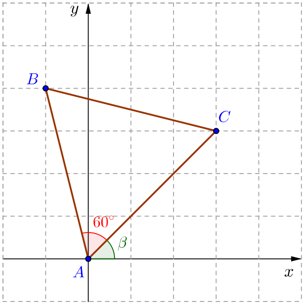
Demonstração (via trigonometria). Suponha, por absurdo, que tal triângulo equilátero exista. Sem perda, suponha um de seus vértices na origem (ver figura) com $0° \leq \beta < 90°$ e $\beta \neq 30°$.



$\sqrt{3}$ e triângulos equiláteros em geoplanos

Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices de coordenadas inteiras.

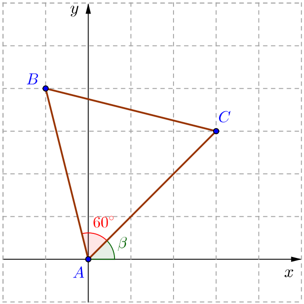
Demonstração (via trigonometria). Suponha, por absurdo, que tal triângulo equilátero exista. Sem perda, suponha um de seus vértices na origem (ver figura) com $0° \leq \beta < 90°$ e $\beta \neq 30°$. Seja $\alpha = 60° + \beta$.



Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices de coordenadas inteiras.

Demonstração (via trigonometria). Suponha, por absurdo, que tal triângulo equilátero exista. Sem perda, suponha um de seus vértices na origem (ver figura) com $0° \leq \beta < 90°$ e $\beta \neq 30°$. Seja $\alpha = 60° + \beta$.

$$60° = \alpha - \beta$$

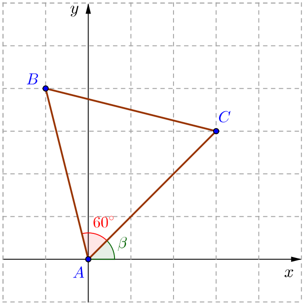


$\sqrt{3}$ e triângulos equiláteros em geoplanos

Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices de coordenadas inteiras.

Demonstração (via trigonometria). Suponha, por absurdo, que tal triângulo equilátero exista. Sem perda, suponha um de seus vértices na origem (ver figura) com $0° \leq \beta < 90°$ e $\beta \neq 30°$. Seja $\alpha = 60° + \beta$.

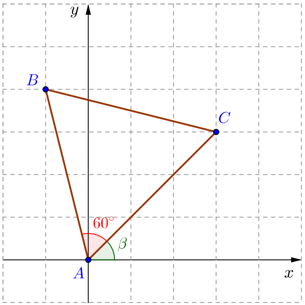
$$60° = \alpha - \beta$$
$$\Downarrow$$
$$\text{tg}(60°) = \text{tg}(\alpha - \beta)$$



Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices de coordenadas inteiras.

Demonstração (via trigonometria). Suponha, por absurdo, que tal triângulo equilátero exista. Sem perda, suponha um de seus vértices na origem (ver figura) com $0^\circ \leq \beta < 90^\circ$ e $\beta \neq 30^\circ$. Seja $\alpha = 60^\circ + \beta$.

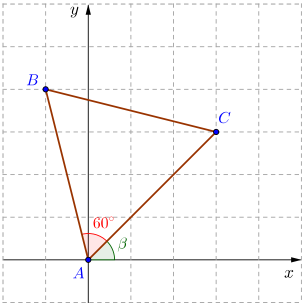
$$60^\circ = \alpha - \beta$$
$$\Downarrow$$
$$\sqrt{3} = \operatorname{tg}(60^\circ) = \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$$



Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices de coordenadas inteiras.

Demonstração (via trigonometria). Suponha, por absurdo, que tal triângulo equilátero exista. Sem perda, suponha um de seus vértices na origem (ver figura) com $0^\circ \leq \beta < 90^\circ$ e $\beta \neq 30^\circ$. Seja $\alpha = 60^\circ + \beta$.

$$60^\circ = \alpha - \beta$$
$$\Downarrow$$
$$\sqrt{3} = \mathrm{tg}(60^\circ) = \mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}(\alpha) - \mathrm{tg}(\beta)}{1 + \mathrm{tg}(\alpha) \cdot \mathrm{tg}(\beta)}$$

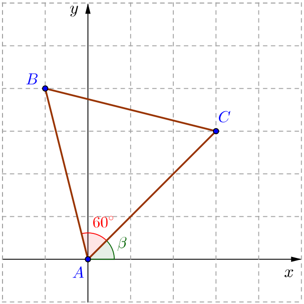


Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices de coordenadas inteiras.

Demonstração (via trigonometria). Suponha, por absurdo, que tal triângulo equilátero exista. Sem perda, suponha um de seus vértices na origem (ver figura) com $0^\circ \leq \beta < 90^\circ$ e $\beta \neq 30^\circ$. Seja $\alpha = 60^\circ + \beta$.

$$60^\circ = \alpha - \beta$$
$$\Downarrow$$
$$\sqrt{3} = \operatorname{tg}(60^\circ) = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta)}{1 + \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \operatorname{tg}(\beta)}$$

$$\operatorname{tg}(\beta) = y(C)/x(C) \in \mathbb{Q}$$

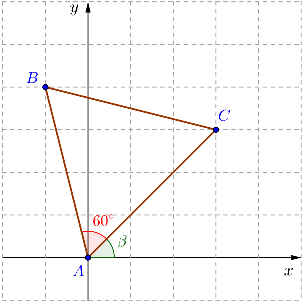


Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices de coordenadas inteiras.

Demonstração (via trigonometria). Suponha, por absurdo, que tal triângulo equilátero exista. Sem perda, suponha um de seus vértices na origem (ver figura) com $0° \leq \beta < 90°$ e $\beta \neq 30°$. Seja $\alpha = 60° + \beta$.

$$60° = \alpha - \beta$$
$$\Downarrow$$
$$\sqrt{3} = \operatorname{tg}(60°) = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta)}{1 + \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \operatorname{tg}(\beta)}$$

$$\operatorname{tg}(\beta) = y(C)/x(C) \in \mathbb{Q}$$
$$\operatorname{tg}(\alpha) = y(B)/x(B) \in \mathbb{Q}$$



Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices de coordenadas inteiras.

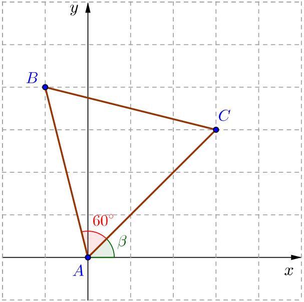
Demonstração (via trigonometria). Suponha, por absurdo, que tal triângulo equilátero exista. Sem perda, suponha um de seus vértices na origem (ver figura) com $0^\circ \leq \beta < 90^\circ$ e $\beta \neq 30^\circ$. Seja $\alpha = 60^\circ + \beta$.

$$60^\circ = \alpha - \beta$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{3} = \operatorname{tg}(60^\circ) = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta)}{1 + \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \operatorname{tg}(\beta)}$$

$$\operatorname{tg}(\beta) = y(C)/x(C) \in \mathbb{Q}$$
$$\operatorname{tg}(\alpha) = y(B)/x(B) \in \mathbb{Q}$$



Contradição

Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices de coordenadas inteiras.

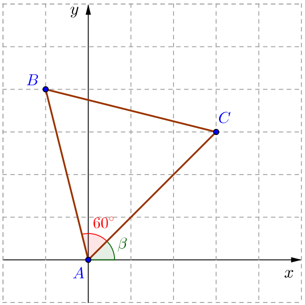
Demonstração (via trigonometria). Suponha, por absurdo, que tal triângulo equilátero exista. Sem perda, suponha um de seus vértices na origem (ver figura) com $0^\circ \leq \beta < 90^\circ$ e $\beta \neq 30^\circ$. Seja $\alpha = 60^\circ + \beta$.

$$60^\circ = \alpha - \beta$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{3} = \text{tg}(60^\circ) = \text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}(\alpha) - \text{tg}(\beta)}{1 + \text{tg}(\alpha) \cdot \text{tg}(\beta)}$$

$$\text{tg}(\beta) = y(C)/x(C) \in \mathbb{Q}$$
$$\text{tg}(\alpha) = y(B)/x(B) \in \mathbb{Q}$$



Contradição: $\sqrt{3}$ é irracional

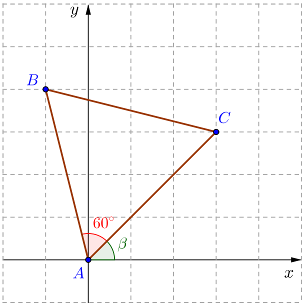
$\sqrt{3}$ e triângulos equiláteros em geoplanos

Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices de coordenadas inteiras.

Demonstração (via trigonometria). Suponha, por absurdo, que tal triângulo equilátero exista. Sem perda, suponha um de seus vértices na origem (ver figura) com $0° \leq \beta < 90°$ e $\beta \neq 30°$. Seja $\alpha = 60° + \beta$.

$$60° = \alpha - \beta$$
$$\Downarrow$$
$$\sqrt{3} = \operatorname{tg}(60°) = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta)}{1 + \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \operatorname{tg}(\beta)}$$

$$\operatorname{tg}(\beta) = y(C)/x(C) \in \mathbb{Q}$$
$$\operatorname{tg}(\alpha) = y(B)/x(B) \in \mathbb{Q}$$



Contradição: $\sqrt{3}$ é irracional e $\frac{\operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta)}{1 + \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \operatorname{tg}(\beta)}$ é racional. ■

Corolário: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices de coordenadas racionais.

Corolário: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices de coordenadas racionais.

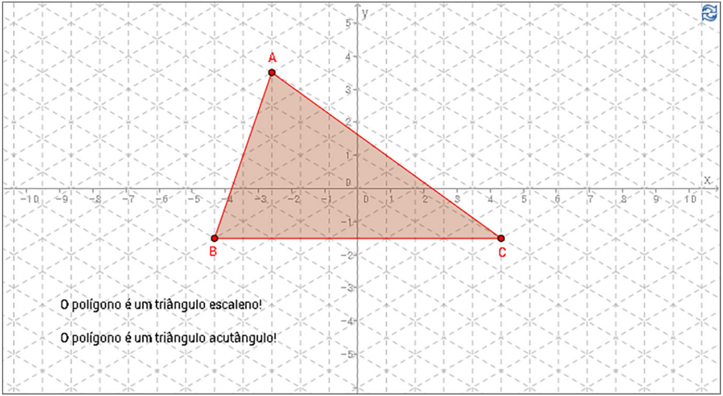
Demonstração.

$\sqrt{3}$ e triângulos equiláteros em geoplanos

Corolário: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices de coordenadas racionais.

Demonstração. Se, por absurdo, existisse um triângulo equilátero com coordenadas racionais, multiplicando suas coordenadas por um número inteiro suficientemente grande, obteríamos um triângulo equilátero com coordenadas inteiras, o que contradiz o teorema anterior. ■

Quais tipos de triângulos podem ser construídos?



<http://tube.geogebra.org/student/m228141?mobile=true>

Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo retângulo isósceles com vértices sobre os pontos de uma malha isométrica.

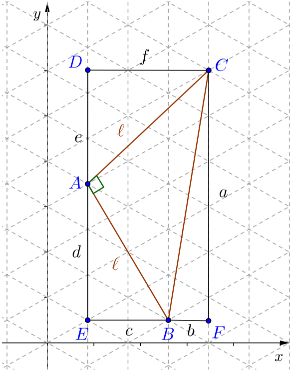
Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo retângulo isósceles com vértices sobre os pontos de uma malha isométrica.

Demonstração.

$\sqrt{3}$ e triângulos retângulos isósceles em geoplanos

Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo retângulo isósceles com vértices sobre os pontos de uma malha isométrica.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que tal triângulo exista (ver figura).

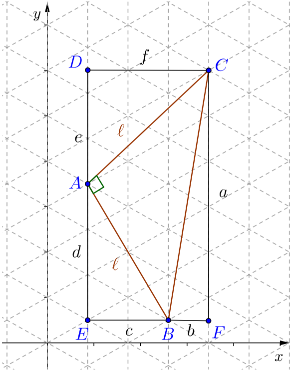


$\sqrt{3}$ e triângulos retângulos isósceles em geoplanos

Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo retângulo isósceles com vértices sobre os pontos de uma malha isométrica.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que tal triângulo exista (ver figura).

Pontos A, B, C, D, E e F: $\quad (i\sqrt{3}/2, j/2),\ \ i, j \in \mathbb{Z}$

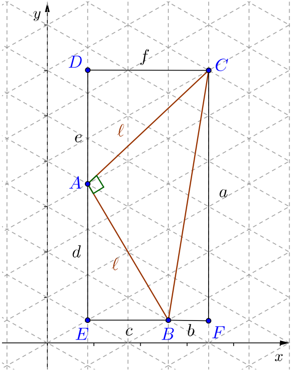


Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo retângulo isósceles com vértices sobre os pontos de uma malha isométrica.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que tal triângulo exista (ver figura).

Pontos A, B, C, D, E e F: $(i\sqrt{3}/2, j/2)$, $i, j \in \mathbb{Z}$

Medidas a, d e e: $i\sqrt{3}/2$, com $i \in \mathbb{Z}$

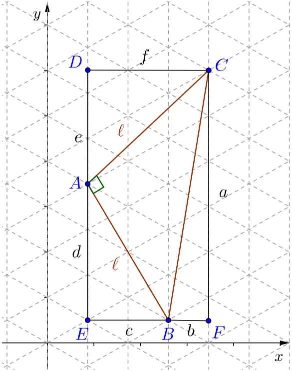


Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo retângulo isósceles com vértices sobre os pontos de uma malha isométrica.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que tal triângulo exista (ver figura).

Pontos A, B, C, D, E e F: $(i\sqrt{3}/2, j/2)$, $i, j \in \mathbb{Z}$

Medidas a, d e e: $i\sqrt{3}/2$, com $i \in \mathbb{Z}$
Medidas b, c e f: $j/2$, com $j \in \mathbb{Z}$



$\sqrt{3}$ e triângulos retângulos isósceles em geoplanos

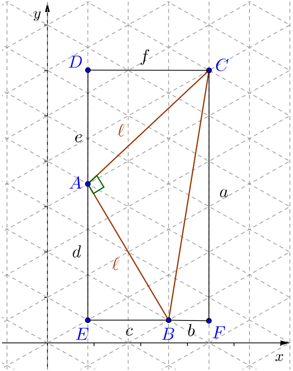
Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo retângulo isósceles com vértices sobre os pontos de uma malha isométrica.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que tal triângulo exista (ver figura).

Pontos A, B, C, D, E e F: $(i\sqrt{3}/2, j/2)$, $i, j \in \mathbb{Z}$

Medidas a, d e e: $i\sqrt{3}/2$, com $i \in \mathbb{Z}$
Medidas b, c e f: $j/2$, com $j \in \mathbb{Z}$

$$S_{ABC} = S_{CDEF} - (S_{ACD} + S_{ABE} + S_{BCF})$$



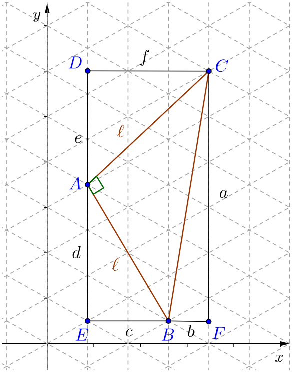
Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo retângulo isósceles com vértices sobre os pontos de uma malha isométrica.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que tal triângulo exista (ver figura).

Pontos A, B, C, D, E e F: $(i\sqrt{3}/2, j/2)$, $i, j \in \mathbb{Z}$

Medidas a, d e e: $i\sqrt{3}/2$, com $i \in \mathbb{Z}$
Medidas b, c e f: $j/2$, com $j \in \mathbb{Z}$

$$S_{ABC} = S_{CDEF} - (S_{ACD} + S_{ABE} + S_{BCF})$$
$$\Downarrow$$
$$\ell^2/2 = af - (ef/2 + cd/2 + ab/2)$$



Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo retângulo isósceles com vértices sobre os pontos de uma malha isométrica.

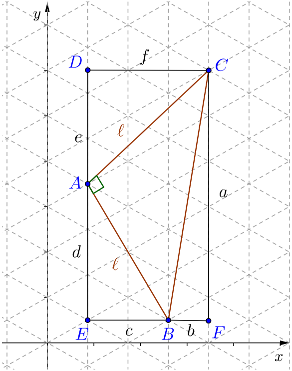
Demonstração. Suponha, por absurdo, que tal triângulo exista (ver figura).

Pontos A, B, C, D, E e F: $\quad (i\sqrt{3}/2, j/2), \ \ i, j \in \mathbb{Z}$

Medidas a, d e e: $\quad i\sqrt{3}/2$, com $i \in \mathbb{Z}$
Medidas b, c e f: $\quad j/2$, com $j \in \mathbb{Z}$

$$S_{ABC} = S_{CDEF} - (S_{ACD} + S_{ABE} + S_{BCF})$$
$$\Downarrow$$
$$\ell^2/2 = af - (ef/2 + cd/2 + ab/2) = (r - t)\sqrt{3}$$

$$r, t \in \mathbb{Q}$$



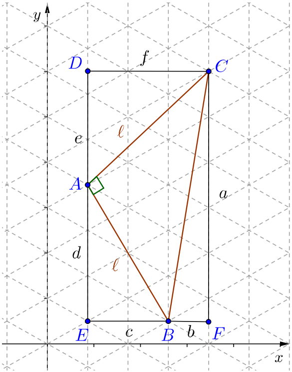
Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo retângulo isósceles com vértices sobre os pontos de uma malha isométrica.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que tal triângulo exista (ver figura).

Pontos A, B, C, D, E e F: $\quad (i\sqrt{3}/2, j/2), \;\; i, j \in \mathbb{Z}$

Medidas a, d e e: $\quad i\sqrt{3}/2$, com $i \in \mathbb{Z}$
Medidas b, c e f: $\quad j/2$, com $j \in \mathbb{Z}$

$$S_{ABC} = S_{CDEF} - (S_{ACD} + S_{ABE} + S_{BCF})$$
$$\Downarrow$$
$$\ell^2/2 = af - (ef/2 + cd/2 + ab/2) = (r - t)\sqrt{3}$$
$$\Downarrow$$
$$\sqrt{3} = (\ell^2/2)/(r - t), \;\; r, t \in \mathbb{Q}$$



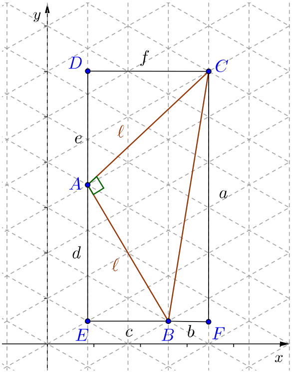
Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo retângulo isósceles com vértices sobre os pontos de uma malha isométrica.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que tal triângulo exista (ver figura).

Pontos A, B, C, D, E e F: $(i\sqrt{3}/2, j/2),\ i, j \in \mathbb{Z}$

Medidas a, d e e: $i\sqrt{3}/2$, com $i \in \mathbb{Z}$
Medidas b, c e f: $j/2$, com $j \in \mathbb{Z}$

$$S_{ABC} = S_{CDEF} - (S_{ACD} + S_{ABE} + S_{BCF})$$
$$\Downarrow$$
$$\ell^2/2 = af - (ef/2 + cd/2 + ab/2) = (r - t)\sqrt{3}$$
$$\Downarrow$$
$$\sqrt{3} = (\ell^2/2)/(r - t),\ r, t \in \mathbb{Q}$$



Contradição

Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo retângulo isósceles com vértices sobre os pontos de uma malha isométrica.

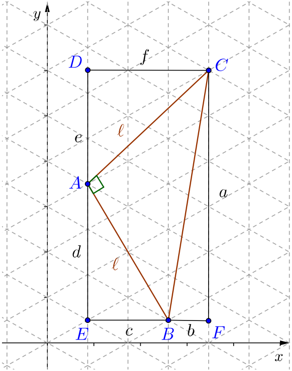
Demonstração. Suponha, por absurdo, que tal triângulo exista (ver figura).

Pontos A, B, C, D, E e F: $\quad (i\sqrt{3}/2, j/2),\ \ i, j \in \mathbb{Z}$

Medidas a, d e e: $\quad i\sqrt{3}/2$, com $i \in \mathbb{Z}$

Medidas b, c e f: $\quad j/2$, com $j \in \mathbb{Z}$

$$S_{ABC} = S_{CDEF} - (S_{ACD} + S_{ABE} + S_{BCF})$$
$$\Downarrow$$
$$\ell^2/2 = af - (ef/2 + cd/2 + ab/2) = (r - t)\sqrt{3}$$
$$\Downarrow$$
$$\sqrt{3} = (\ell^2/2)/(r - t), \ \ r, t \in \mathbb{Q}$$



Contradição: $\sqrt{3}$ é irracional

$\sqrt{3}$ e triângulos retângulos isósceles em geoplanos

Teorema: não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo retângulo isósceles com vértices sobre os pontos de uma malha isométrica.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que tal triângulo exista (ver figura).

Pontos A, B, C, D, E e F: $(i\sqrt{3}/2, j/2)$, $i, j \in \mathbb{Z}$

Medidas a, d e e: $i\sqrt{3}/2$, com $i \in \mathbb{Z}$
Medidas b, c e f: $j/2$, com $j \in \mathbb{Z}$

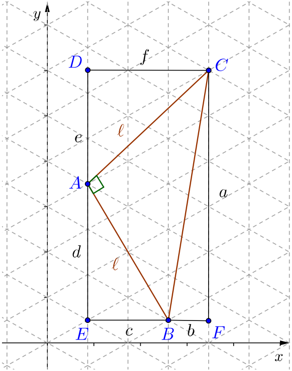
$$S_{ABC} = S_{CDEF} - (S_{ACD} + S_{ABE} + S_{BCF})$$

$$\Downarrow$$

$$\ell^2/2 = af - (ef/2 + cd/2 + ab/2) = (r - t)\sqrt{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{3} = (\ell^2/2)/(r - t), \ r, t \in \mathbb{Q}$$



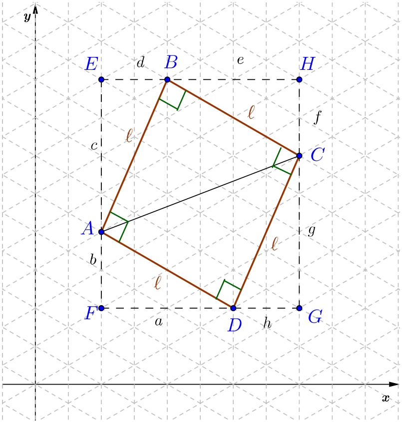
Contradição: $\sqrt{3}$ é irracional e $(\ell^2/2)/(r - t)$ é racional. ∎

A vingança do triângulo equilátero

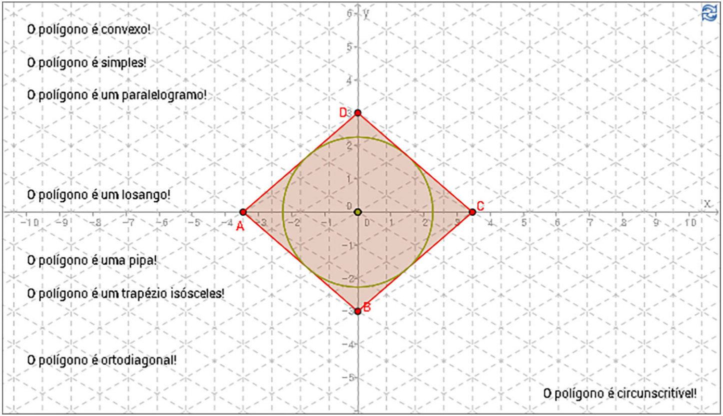
Corolário: não existe em $\mathbb{R}^2$ quadrado com vértices sobre os pontos de uma malha isométrica.

A vingança do triângulo equilátero

Corolário: não existe em $\mathbb{R}^2$ quadrado com vértices sobre os pontos de uma malha isométrica.

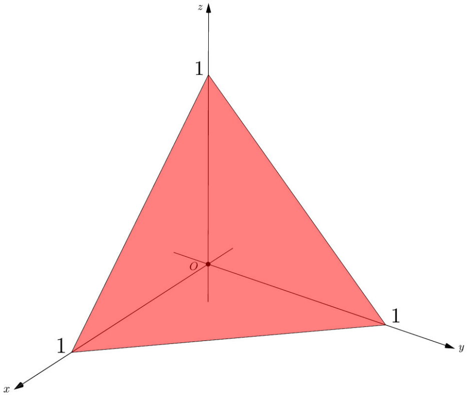


Quais tipos de quadriláteros podem ser construídos?



<http://tube.geogebra.org/student/m228783?mobile=true>

Em $\mathbb{R}^3$ existe um triângulo equilátero com vértices de coordenadas inteiras

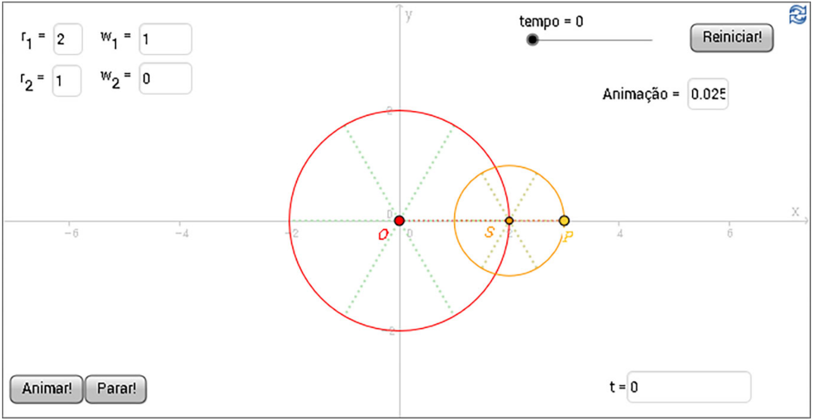


Discriminação contra judeus nos exames orais de acesso
ao Departamento de Mecânica e Matemática
da Universidade Estadual de Moscou nas décadas de 1970 e 1980

Problem 8. Is it possible to put an equilateral triangle onto a square grid so that all the vertices are in corners?

Fonte:
Tanya Khovanova e Alexey Radul. *Killer Problems*.
The American Mathematical Monthly, v. 119, n. 10, p. 815-823, 2012.

Números Irracionais e Epiciclos



<http://www.geogebratube.org/student/m41370?mobile=true>

Definição. Dizemos que uma trajetória $t \mapsto (x(t), y(t))$ é periódica com período $T > 0$ se, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$x(t+T) = x(t)$$

$$e$$

$$y(t+T) = y(t).$$

O menor $T > 0$, se existir, tal que $x(t+T) = x(t)$ e $y(t+T) = y(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, é denominado o período fundamental da trajetória.

Teorema:

Um movimento epicíclico descreve uma trajetória periódica se,

$$\Updownarrow$$

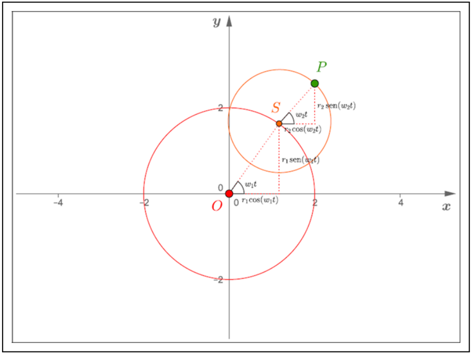
$w_2 = 0$ ou a razão w_1/w_2 é um número racional caso $w_2 \neq 0$.

Teorema:

Um movimento epicíclico descreve uma trajetória periódica se,

$$\Updownarrow$$

$w_2 = 0$ ou a razão w_1/w_2 é um número racional caso $w_2 \neq 0$.



Números irracionais e epiciclos

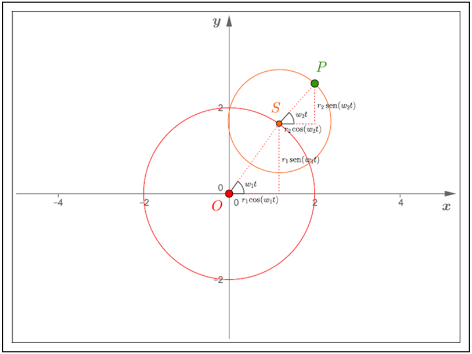
Teorema:

Um movimento epicíclico descreve uma trajetória periódica se,

$$\Updownarrow$$

$w_2 = 0$ ou a razão w_1/w_2 é um número racional caso $w_2 \neq 0$.

$$\begin{cases} x(t) &= r_1\cos(w_1 t) + r_2\cos(w_2 t), \\ y(t) &= r_1\,\mathrm{sen}(w_1 t) + r_2\,\mathrm{sen}(w_2 t). \end{cases}$$



Demonstração (⇒)

Demonstração ($\Rightarrow$)

Suponha que a trajetória seja periódica.

Demonstração ($\Rightarrow$)

Suponha que a trajetória seja periódica. Existe então $T > 0$ tal que $x(T+t) = x(t)$ e $y(T+t) = y(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração ($\Rightarrow$)

Suponha que a trajetória seja periódica. Existe então $T > 0$ tal que $x(T+t) = x(t)$ e $y(T+t) = y(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Se $w_2 = 0$, nada há para se fazer.

Demonstração ($\Rightarrow$)

Suponha que a trajetória seja periódica. Existe então $T > 0$ tal que $x(T+t) = x(t)$ e $y(T+t) = y(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Se $w_2 = 0$, nada há para se fazer. Suponha então que $w_2 \neq 0$.

Demonstração ($\Rightarrow$)

Suponha que a trajetória seja periódica. Existe então $T > 0$ tal que $x(T+t) = x(t)$ e $y(T+t) = y(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Se $w_2 = 0$, nada há para se fazer. Suponha então que $w_2 \neq 0$. Fazendo $t = 0$, obtemos que $x(T) = x(0)$ e $y(T) = y(0)$.

Demonstração ($\Rightarrow$)

Suponha que a trajetória seja periódica. Existe então $T > 0$ tal que $x(T+t) = x(t)$ e $y(T+t) = y(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Se $w_2 = 0$, nada há para se fazer. Suponha então que $w_2 \neq 0$. Fazendo $t = 0$, obtemos que $x(T) = x(0)$ e $y(T) = y(0)$. Portanto:

Demonstração ($\Rightarrow$)

Suponha que a trajetória seja periódica. Existe então $T > 0$ tal que $x(T+t) = x(t)$ e $y(T+t) = y(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Se $w_2 = 0$, nada há para se fazer. Suponha então que $w_2 \neq 0$. Fazendo $t = 0$, obtemos que $x(T) = x(0)$ e $y(T) = y(0)$. Portanto:

$$r_1 \cos(w_1 T) + r_2 \cos(w_2 T) = r_1 + r_2$$

$$r_1 \operatorname{sen}(w_1 T) + r_2 \operatorname{sen}(w_2 T) = 0$$

Demonstração ($\Rightarrow$)

Suponha que a trajetória seja periódica. Existe então $T > 0$ tal que $x(T+t) = x(t)$ e $y(T+t) = y(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Se $w_2 = 0$, nada há para se fazer. Suponha então que $w_2 \neq 0$. Fazendo $t = 0$, obtemos que $x(T) = x(0)$ e $y(T) = y(0)$. Portanto:

$$r_1 \cos(w_1 T) + r_2 \cos(w_2 T) = r_1 + r_2$$

$$\Downarrow$$

$$r_1 \operatorname{sen}(w_1 T) + r_2 \operatorname{sen}(w_2 T) = 0$$

Demonstração ($\Rightarrow$)

Suponha que a trajetória seja periódica. Existe então $T > 0$ tal que $x(T+t) = x(t)$ e $y(T+t) = y(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Se $w_2 = 0$, nada há para se fazer. Suponha então que $w_2 \neq 0$. Fazendo $t = 0$, obtemos que $x(T) = x(0)$ e $y(T) = y(0)$. Portanto:

$$r_1 \cos(w_1 T) + r_2 \cos(w_2 T) = r_1 + r_2$$

$$\Downarrow$$

$$\cos(w_1 T) = \frac{r_1 + r_2 - r_2 \cos(w_2 T)}{r_1}$$

$$r_1 \operatorname{sen}(w_1 T) + r_2 \operatorname{sen}(w_2 T) = 0$$

Demonstração ($\Rightarrow$)

Suponha que a trajetória seja periódica. Existe então $T > 0$ tal que $x(T+t) = x(t)$ e $y(T+t) = y(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Se $w_2 = 0$, nada há para se fazer. Suponha então que $w_2 \neq 0$. Fazendo $t = 0$, obtemos que $x(T) = x(0)$ e $y(T) = y(0)$. Portanto:

$$r_1 \cos(w_1 T) + r_2 \cos(w_2 T) = r_1 + r_2$$

$$\Downarrow$$

$$\cos(w_1 T) = \frac{r_1 + r_2 - r_2 \cos(w_2 T)}{r_1} = \frac{r_1 + r_2 - r_2 a}{r_1}$$

$$r_1 \operatorname{sen}(w_1 T) + r_2 \operatorname{sen}(w_2 T) = 0$$

Demonstração ($\Rightarrow$)

Suponha que a trajetória seja periódica. Existe então $T > 0$ tal que $x(T+t) = x(t)$ e $y(T+t) = y(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Se $w_2 = 0$, nada há para se fazer. Suponha então que $w_2 \neq 0$. Fazendo $t = 0$, obtemos que $x(T) = x(0)$ e $y(T) = y(0)$. Portanto:

$$r_1 \cos(w_1 T) + r_2 \cos(w_2 T) = r_1 + r_2$$

$$\Downarrow$$

$$\cos(w_1 T) = \frac{r_1 + r_2 - r_2 \cos(w_2 T)}{r_1} = \frac{r_1 + r_2 - r_2 a}{r_1}$$

$$r_1 \operatorname{sen}(w_1 T) + r_2 \operatorname{sen}(w_2 T) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$r_1 \operatorname{sen}(w_1 T) = -r_2 \operatorname{sen}(w_2 T)$$

Demonstração ($\Rightarrow$)

Suponha que a trajetória seja periódica. Existe então $T > 0$ tal que $x(T+t) = x(t)$ e $y(T+t) = y(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Se $w_2 = 0$, nada há para se fazer. Suponha então que $w_2 \neq 0$. Fazendo $t = 0$, obtemos que $x(T) = x(0)$ e $y(T) = y(0)$. Portanto:

$$r_1 \cos(w_1 T) + r_2 \cos(w_2 T) = r_1 + r_2$$

$$\Downarrow$$

$$\cos(w_1 T) = \frac{r_1 + r_2 - r_2 \cos(w_2 T)}{r_1} = \frac{r_1 + r_2 - r_2 a}{r_1}$$

$$r_1 \operatorname{sen}(w_1 T) + r_2 \operatorname{sen}(w_2 T) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$r_1 \operatorname{sen}(w_1 T) = -r_2 \operatorname{sen}(w_2 T)$$

$$\Downarrow$$

$$r_1^2 \operatorname{sen}^2(w_1 T) = r_2^2 \operatorname{sen}^2(w_2 T)$$

Demonstração ($\Rightarrow$)

Suponha que a trajetória seja periódica. Existe então $T > 0$ tal que $x(T+t) = x(t)$ e $y(T+t) = y(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Se $w_2 = 0$, nada há para se fazer. Suponha então que $w_2 \neq 0$. Fazendo $t = 0$, obtemos que $x(T) = x(0)$ e $y(T) = y(0)$. Portanto:

$$r_1 \cos(w_1 T) + r_2 \cos(w_2 T) = r_1 + r_2$$
$$\Downarrow$$
$$\cos(w_1 T) = \frac{r_1 + r_2 - r_2 \cos(w_2 T)}{r_1} = \frac{r_1 + r_2 - r_2 a}{r_1}$$

$$r_1 \operatorname{sen}(w_1 T) + r_2 \operatorname{sen}(w_2 T) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$r_1 \operatorname{sen}(w_1 T) = -r_2 \operatorname{sen}(w_2 T)$$
$$\Downarrow$$
$$r_1^2[1 - \cos^2(w_1 T)] = r_2^2[1 - \cos^2(w_2 T)]$$

Demonstração ($\Rightarrow$)

Suponha que a trajetória seja periódica. Existe então $T > 0$ tal que $x(T+t) = x(t)$ e $y(T+t) = y(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Se $w_2 = 0$, nada há para se fazer. Suponha então que $w_2 \neq 0$. Fazendo $t = 0$, obtemos que $x(T) = x(0)$ e $y(T) = y(0)$. Portanto:

$$r_1 \cos(w_1 T) + r_2 \cos(w_2 T) = r_1 + r_2$$

$$\Downarrow$$

$$\cos(w_1 T) = \frac{r_1 + r_2 - r_2 \cos(w_2 T)}{r_1} = \frac{r_1 + r_2 - r_2 a}{r_1}$$

$$r_1 \operatorname{sen}(w_1 T) + r_2 \operatorname{sen}(w_2 T) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$r_1 \operatorname{sen}(w_1 T) = -r_2 \operatorname{sen}(w_2 T)$$

$$\Downarrow$$

$$r_1^2 \left[1 - \left(\frac{r_1 + r_2 - r_2 a}{r_1} \right)^2 \right] = r_2^2 (1 - a^2)$$

Demonstração ($\Rightarrow$)

$$r_1^2\left[1-\left(\frac{r_1+r_2-r_2a}{r_1}\right)^2\right]=r_2^2(1-a^2)$$

Demonstração ($\Rightarrow$)

$$r_1^2\left[1-\left(\frac{r_1+r_2-r_2a}{r_1}\right)^2\right]=r_2^2(1-a^2)$$

$$\Downarrow$$

$$r_1^2-(r_1^2+r_2^2+r_2^2a^2+2r_1r_2-2r_1r_2a-2r_2^2a)=r_2^2(1-a^2)$$

Demonstração ($\Rightarrow$)

$$r_1^2\left[1-\left(\frac{r_1+r_2-r_2a}{r_1}\right)^2\right]=r_2^2(1-a^2)$$

$$\Downarrow$$

$$r_1^2-(r_1^2+r_2^2+r_2^2a^2+2r_1r_2-2r_1r_2a-2r_2^2a)=r_2^2(1-a^2)$$

$$\Downarrow$$

$$-2r_1r_2+2r_1r_2a+2r_2^2a=2r_2^2$$

Demonstração ($\Rightarrow$)

$$r_1^2\left[1-\left(\frac{r_1+r_2-r_2a}{r_1}\right)^2\right]=r_2^2(1-a^2)$$

$$\Downarrow$$

$$r_1^2-(r_1^2+r_2^2+r_2^2a^2+2r_1r_2-2r_1r_2a-2r_2^2a)=r_2^2(1-a^2)$$

$$\Downarrow$$

$$-2r_1r_2+2r_1r_2a+2r_2^2a=2r_2^2$$

$$\Downarrow$$

$$-r_1+r_1a+r_2a=r_2$$

Demonstração ($\Rightarrow$)

$$r_1^2\left[1-\left(\frac{r_1+r_2-r_2a}{r_1}\right)^2\right]=r_2^2(1-a^2)$$

$$\Downarrow$$

$$r_1^2-(r_1^2+r_2^2+r_2^2a^2+2r_1r_2-2r_1r_2a-2r_2^2a)=r_2^2(1-a^2)$$

$$\Downarrow$$

$$-2r_1r_2+2r_1r_2a+2r_2^2a=2r_2^2$$

$$\Downarrow$$

$$-r_1+r_1a+r_2a=r_2$$

$$\Downarrow$$

$$r_1(a-1)=-r_2(a-1)$$

Demonstração ($\Rightarrow$)

$$r_1^2\left[1-\left(\frac{r_1+r_2-r_2a}{r_1}\right)^2\right]=r_2^2(1-a^2)$$

$$\Downarrow$$

$$r_1^2-(r_1^2+r_2^2+r_2^2a^2+2r_1r_2-2r_1r_2a-2r_2^2a)=r_2^2(1-a^2)$$

$$\Downarrow$$

$$-2r_1r_2+2r_1r_2a+2r_2^2a=2r_2^2$$

$$\Downarrow$$

$$-r_1+r_1a+r_2a=r_2$$

$$\Downarrow$$

$$r_1(a-1)=-r_2(a-1)$$

$$\Downarrow \ (r_1\neq -r_2)$$

Demonstração ($\Rightarrow$)

$$r_1^2\left[1-\left(\frac{r_1+r_2-r_2a}{r_1}\right)^2\right]=r_2^2(1-a^2)$$

$$\Downarrow$$

$$r_1^2-(r_1^2+r_2^2+r_2^2a^2+2r_1r_2-2r_1r_2a-2r_2^2a)=r_2^2(1-a^2)$$

$$\Downarrow$$

$$-2r_1r_2+2r_1r_2a+2r_2^2a=2r_2^2$$

$$\Downarrow$$

$$-r_1+r_1a+r_2a=r_2$$

$$\Downarrow$$

$$r_1(a-1)=-r_2(a-1)$$

$$\Downarrow \, (r_1\neq -r_2)$$

$$a-1=0$$

Demonstração ($\Rightarrow$)

$$r_1^2\left[1-\left(\frac{r_1+r_2-r_2a}{r_1}\right)^2\right]=r_2^2(1-a^2)$$

$$\Downarrow$$

$$r_1^2-(r_1^2+r_2^2+r_2^2a^2+2r_1r_2-2r_1r_2a-2r_2^2a)=r_2^2(1-a^2)$$

$$\Downarrow$$

$$-2r_1r_2+2r_1r_2a+2r_2^2a=2r_2^2$$

$$\Downarrow$$

$$-r_1+r_1a+r_2a=r_2$$

$$\Downarrow$$

$$r_1(a-1)=-r_2(a-1)$$

$$\Downarrow (r_1\neq -r_2)$$

$$a-1=0$$

$$\Downarrow$$

$$\cos(w_2T)=1$$

Demonstração ($\Rightarrow$)

$$\cos(w_2 T) = 1$$

Demonstração ($\Rightarrow$)

$$\cos(w_2 T) = 1$$
$$\Downarrow$$
$$w_2 T = 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$$

Demonstração ($\Rightarrow$)

$$\cos(w_2 T) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$w_2 T = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Downarrow$$

$$r_1 \operatorname{sen}(w_1 T) + r_2 \operatorname{sen}(2k\pi) = 0$$

Demonstração ($\Rightarrow$)

$$\cos(w_2 T) = 1$$
$$\Downarrow$$
$$w_2 T = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$
$$\Downarrow$$
$$r_1 \operatorname{sen}(w_1 T) + r_2 \operatorname{sen}(2k\pi) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$r_1 \operatorname{sen}(w_1 T) = 0$$

Demonstração ($\Rightarrow$)

$$\cos(w_2 T) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$w_2 T = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Downarrow$$

$$r_1 \operatorname{sen}(w_1 T) + r_2 \operatorname{sen}(2k\pi) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$r_1 \operatorname{sen}(w_1 T) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{sen}(w_1 T) = 0$$

Demonstração ($\Rightarrow$)

$$\cos(w_2 T) = 1$$
$$\Downarrow$$
$$w_2 T = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\Downarrow$$
$$r_1 \operatorname{sen}(w_1 T) + r_2 \operatorname{sen}(2k\pi) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$r_1 \operatorname{sen}(w_1 T) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\operatorname{sen}(w_1 T) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$w_1 T = q\pi$$

Demonstração ($\Rightarrow$)

$$\cos(w_2 T) = 1$$
$$\Downarrow$$
$$w_2 T = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\Downarrow$$
$$r_1 \operatorname{sen}(w_1 T) + r_2 \operatorname{sen}(2k\pi) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$r_1 \operatorname{sen}(w_1 T) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\operatorname{sen}(w_1 T) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$w_1 T = q\pi$$
$$\Downarrow$$

$$\frac{w_1}{w_2} =$$

Demonstração ($\Rightarrow$)

$$\cos(w_2 T) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$w_2 T = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Downarrow$$

$$r_1 \operatorname{sen}(w_1 T) + r_2 \operatorname{sen}(2k\pi) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$r_1 \operatorname{sen}(w_1 T) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{sen}(w_1 T) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$w_1 T = q\pi$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{w_1 T}{w_2 T}$$

Demonstração ($\Rightarrow$)

$$\cos(w_2 T) = 1$$
$$\Downarrow$$
$$w_2 T = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\Downarrow$$
$$r_1 \operatorname{sen}(w_1 T) + r_2 \operatorname{sen}(2k\pi) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$r_1 \operatorname{sen}(w_1 T) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\operatorname{sen}(w_1 T) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$w_1 T = q\pi$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{w_1 T}{w_2 T} = \frac{q\pi}{2k\pi}$$

Demonstração ($\Rightarrow$)

$$\cos(w_2 T) = 1$$
$$\Downarrow$$
$$w_2 T = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\Downarrow$$
$$r_1 \operatorname{sen}(w_1 T) + r_2 \operatorname{sen}(2k\pi) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$r_1 \operatorname{sen}(w_1 T) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\operatorname{sen}(w_1 T) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$w_1 T = q\pi$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{w_1 T}{w_2 T} = \frac{q\pi}{2k\pi} = \frac{q}{2k}$$

Demonstração ($\Rightarrow$)

$$\cos(w_2 T) = 1$$
$$\Downarrow$$
$$w_2 T = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\Downarrow$$
$$r_1 \operatorname{sen}(w_1 T) + r_2 \operatorname{sen}(2k\pi) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$r_1 \operatorname{sen}(w_1 T) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\operatorname{sen}(w_1 T) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$w_1 T = q\pi$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{w_1 T}{w_2 T} = \frac{q\pi}{2k\pi} = \frac{q}{2k} \text{ é um número racional.}$$

Demonstração ($\Leftarrow$)

CASO $w_2 = 0$.

Demonstração ($\Leftarrow$)

CASO $w_2 = 0$.

Se $w_2 = 0$, então $x(t) = r_1 \cos(w_1 t) + r_2$ e $y(t) = r_2 \operatorname{sen}(w_1 t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Demonstração ($\Leftarrow$)

CASO $w_2 = 0$.

Se $w_2 = 0$, então $x(t) = r_1 \cos(w_1 t) + r_2$ e $y(t) = r_2 \operatorname{sen}(w_1 t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Subcaso $w_1 = 0$.

Subcaso $w_1 \neq 0$.

Demonstração ($\Leftarrow$)

CASO $w_2 = 0$.

Se $w_2 = 0$, então $x(t) = r_1 \cos(w_1 t) + r_2$ e $y(t) = r_2 \operatorname{sen}(w_1 t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Subcaso $w_1 = 0$.
Se $w_1 = 0$, então $x(t) = r_1 + r_2$ e $y(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Subcaso $w_1 \neq 0$.

Demonstração ($\Leftarrow$)

CASO $w_2 = 0$.

Se $w_2 = 0$, então $x(t) = r_1 \cos(w_1 t) + r_2$ e $y(t) = r_2 \operatorname{sen}(w_1 t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Subcaso $w_1 = 0$.
Se $w_1 = 0$, então $x(t) = r_1 + r_2$ e $y(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Em particular, a trajetória $t \mapsto (x(t), y(t))$ é periódica de período T, qualquer que seja $T > 0$.

Subcaso $w_1 \neq 0$.

Demonstração ($\Leftarrow$)

CASO $w_2 = 0$.

Se $w_2 = 0$, então $x(t) = r_1 \cos(w_1 t) + r_2$ e $y(t) = r_2 \operatorname{sen}(w_1 t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Subcaso $w_1 = 0$.
Se $w_1 = 0$, então $x(t) = r_1 + r_2$ e $y(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Em particular, a trajetória $t \mapsto (x(t), y(t))$ é periódica de período T, qualquer que seja $T > 0$.

Subcaso $w_1 \neq 0$.
Tome $T = (2\pi/|w_1|)$.

Demonstração ($\Leftarrow$)

CASO $w_2 = 0$.

Se $w_2 = 0$, então $x(t) = r_1 \cos(w_1 t) + r_2$ e $y(t) = r_2 \operatorname{sen}(w_1 t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Subcaso $w_1 = 0$.
Se $w_1 = 0$, então $x(t) = r_1 + r_2$ e $y(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Em particular, a trajetória $t \mapsto (x(t), y(t))$ é periódica de período T, qualquer que seja $T > 0$.

Subcaso $w_1 \neq 0$.
Tome $T = (2\pi/|w_1|)$. Então, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$x(t+T) =$$

$$y(t+T) =$$

CASO $w_2 = 0$.

Se $w_2 = 0$, então $x(t) = r_1 \cos(w_1 t) + r_2$ e $y(t) = r_2 \operatorname{sen}(w_1 t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Subcaso $w_1 = 0$.
Se $w_1 = 0$, então $x(t) = r_1 + r_2$ e $y(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Em particular, a trajetória $t \mapsto (x(t), y(t))$ é periódica de período T, qualquer que seja $T > 0$.

Subcaso $w_1 \neq 0$.
Tome $T = (2\pi/|w_1|)$. Então, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
x(t+T) &= r_1 \cos(w_1(t + 2\pi/|w_1|)) + r_2 \\
\\
y(t+T) &=
\end{aligned}
$$

Demonstração ($\Leftarrow$)

CASO $w_2 = 0$.

Se $w_2 = 0$, então $x(t) = r_1 \cos(w_1 t) + r_2$ e $y(t) = r_2 \,\text{sen}(w_1 t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Subcaso $w_1 = 0$.
Se $w_1 = 0$, então $x(t) = r_1 + r_2$ e $y(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Em particular, a trajetória $t \mapsto (x(t), y(t))$ é periódica de período T, qualquer que seja $T > 0$.

Subcaso $w_1 \neq 0$.
Tome $T = (2\pi/|w_1|)$. Então, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
x(t+T) &= r_1 \cos(w_1(t + 2\pi/|w_1|)) + r_2 = r_1 \cos(w_1 t \pm 2\pi) + r_2 \\
y(t+T) &=
\end{aligned}
$$

Demonstração ($\Leftarrow$)

CASO $w_2 = 0$.

Se $w_2 = 0$, então $x(t) = r_1 \cos(w_1 t) + r_2$ e $y(t) = r_2 \operatorname{sen}(w_1 t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Subcaso $w_1 = 0$.
Se $w_1 = 0$, então $x(t) = r_1 + r_2$ e $y(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Em particular, a trajetória $t \mapsto (x(t), y(t))$ é periódica de período T, qualquer que seja $T > 0$.

Subcaso $w_1 \neq 0$.
Tome $T = (2\pi/|w_1|)$. Então, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x(t+T) &= r_1 \cos(w_1 (t + 2\pi/|w_1|)) + r_2 = r_1 \cos(w_1 t \pm 2\pi) + r_2 \\ &= r_1 \cos(w_1 t) + r_2 = x(t), \\ y(t+T) &= \end{aligned}$$

Demonstração ($\Leftarrow$)

CASO $w_2 = 0$.

Se $w_2 = 0$, então $x(t) = r_1 \cos(w_1 t) + r_2$ e $y(t) = r_2 \operatorname{sen}(w_1 t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Subcaso $w_1 = 0$.
Se $w_1 = 0$, então $x(t) = r_1 + r_2$ e $y(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Em particular, a trajetória $t \mapsto (x(t), y(t))$ é periódica de período T, qualquer que seja $T > 0$.

Subcaso $w_1 \neq 0$.
Tome $T = (2\pi/|w_1|)$. Então, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
x(t+T) &= r_1 \cos(w_1(t + 2\pi/|w_1|)) + r_2 = r_1 \cos(w_1 t \pm 2\pi) + r_2 \\
&= r_1 \cos(w_1 t) + r_2 = x(t), \\
y(t+T) &= r_1 \operatorname{sen}(w_1(t + 2\pi/|w_1|))
\end{aligned}$$

Demonstração ($\Leftarrow$)

CASO $w_2 = 0$.

Se $w_2 = 0$, então $x(t) = r_1 \cos(w_1 t) + r_2$ e $y(t) = r_2 \operatorname{sen}(w_1 t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Subcaso $w_1 = 0$.
Se $w_1 = 0$, então $x(t) = r_1 + r_2$ e $y(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Em particular, a trajetória $t \mapsto (x(t), y(t))$ é periódica de período T, qualquer que seja $T > 0$.

Subcaso $w_1 \neq 0$.
Tome $T = (2\pi/|w_1|)$. Então, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x(t+T) &= r_1 \cos(w_1(t + 2\pi/|w_1|)) + r_2 = r_1 \cos(w_1 t \pm 2\pi) + r_2 \\ &= r_1 \cos(w_1 t) + r_2 = x(t), \\ y(t+T) &= r_1 \operatorname{sen}(w_1(t + 2\pi/|w_1|)) = r_1 \operatorname{sen}(w_1 t \pm 2\pi) \end{aligned}$$

CASO $w_2 = 0$.

Se $w_2 = 0$, então $x(t) = r_1 \cos(w_1 t) + r_2$ e $y(t) = r_2 \operatorname{sen}(w_1 t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Subcaso $w_1 = 0$.
Se $w_1 = 0$, então $x(t) = r_1 + r_2$ e $y(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Em particular, a trajetória $t \mapsto (x(t), y(t))$ é periódica de período T, qualquer que seja $T > 0$.

Subcaso $w_1 \neq 0$.
Tome $T = (2\pi/|w_1|)$. Então, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
x(t+T) &= r_1 \cos(w_1(t + 2\pi/|w_1|)) + r_2 = r_1 \cos(w_1 t \pm 2\pi) + r_2 \\
&= r_1 \cos(w_1 t) + r_2 = x(t), \\
y(t+T) &= r_1 \operatorname{sen}(w_1(t + 2\pi/|w_1|)) = r_1 \operatorname{sen}(w_1 t \pm 2\pi) \\
&= r_1 \operatorname{sen}(w_1 t) = y(t).
\end{aligned}
$$

Demonstração ($\Leftarrow$)

CASO $w_2 = 0$.

Se $w_2 = 0$, então $x(t) = r_1 \cos(w_1 t) + r_2$ e $y(t) = r_2 \operatorname{sen}(w_1 t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Subcaso $w_1 = 0$.
Se $w_1 = 0$, então $x(t) = r_1 + r_2$ e $y(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Em particular, a trajetória $t \mapsto (x(t), y(t))$ é periódica de período T, qualquer que seja $T > 0$.

Subcaso $w_1 \neq 0$.
Tome $T = (2\pi/|w_1|)$. Então, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
x(t+T) &= r_1 \cos(w_1(t + 2\pi/|w_1|)) + r_2 = r_1 \cos(w_1 t \pm 2\pi) + r_2 \\
&= r_1 \cos(w_1 t) + r_2 = x(t), \\
y(t+T) &= r_1 \operatorname{sen}(w_1(t + 2\pi/|w_1|)) = r_1 \operatorname{sen}(w_1 t \pm 2\pi) \\
&= r_1 \operatorname{sen}(w_1 t) = y(t).
\end{aligned}$$

Logo a trajetória do movimento epicíclico também é periódica se $w_1 \neq 0$.

Demonstração ($\Leftarrow$)

CASO $w_2 = 0$.

Se $w_2 = 0$, então $x(t) = r_1 \cos(w_1 t) + r_2$ e $y(t) = r_2 \operatorname{sen}(w_1 t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Subcaso $w_1 = 0$.
Se $w_1 = 0$, então $x(t) = r_1 + r_2$ e $y(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Em particular, a trajetória $t \mapsto (x(t), y(t))$ é periódica de período T, qualquer que seja $T > 0$.

Subcaso $w_1 \neq 0$.
Tome $T = (2\pi/|w_1|)$. Então, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
x(t+T) &= r_1 \cos(w_1(t + 2\pi/|w_1|)) + r_2 = r_1 \cos(w_1 t \pm 2\pi) + r_2 \\
&= r_1 \cos(w_1 t) + r_2 = x(t), \\
y(t+T) &= r_1 \operatorname{sen}(w_1(t + 2\pi/|w_1|)) = r_1 \operatorname{sen}(w_1 t \pm 2\pi) \\
&= r_1 \operatorname{sen}(w_1 t) = y(t).
\end{aligned}$$

Logo a trajetória do movimento epicíclico também é periódica se $w_1 \neq 0$. Isto encerra o caso $w_2 = 0$.

Demonstração ($\Leftarrow$)

CASO $w_2 \neq 0$.

Demonstração ($\Leftarrow$)

CASO $w_2 \neq 0$.
Aqui, $w_1 / w_2 \in \mathbb{Q}$

Demonstração ($\Leftarrow$)

CASO $w_2 \neq 0$.
Aqui, $w_1/w_2 \in \mathbb{Q}$, digamos, $w_1/w_2 = a/b$, com a e b inteiros,

Demonstração ($\Leftarrow$)

CASO $w_2 \neq 0$.
Aqui, $w_1/w_2 \in \mathbb{Q}$, digamos, $w_1/w_2 = a/b$, com a e b inteiros, b com o mesmo sinal de w_2.

Demonstração ($\Leftarrow$)

CASO $w_2 \neq 0$.
Aqui, $w_1/w_2 \in \mathbb{Q}$, digamos, $w_1/w_2 = a/b$, com a e b inteiros, b com o mesmo sinal de w_2. Tome $T = 2b\pi/w_2$.

Demonstração ($\Leftarrow$)

CASO $w_2 \neq 0$.
Aqui, $w_1/w_2 \in \mathbb{Q}$, digamos, $w_1/w_2 = a/b$, com a e b inteiros, b com o mesmo sinal de w_2. Tome $T = 2b\pi/w_2$. Note que $T > 0$

Demonstração ($\Leftarrow$)

CASO $w_2 \neq 0$.
Aqui, $w_1/w_2 \in \mathbb{Q}$, digamos, $w_1/w_2 = a/b$, com a e b inteiros, b com o mesmo sinal de w_2. Tome $T = 2b\pi/w_2$. Note que $T > 0$ e, para todo $t \in \mathbb{R}$,

Demonstração ($\Leftarrow$)

CASO $w_2 \neq 0$.
Aqui, $w_1/w_2 \in \mathbb{Q}$, digamos, $w_1/w_2 = a/b$, com a e b inteiros, b com o mesmo sinal de w_2. Tome $T = 2b\pi/w_2$. Note que $T > 0$ e, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$x(t+T) \quad =$$

Demonstração ($\Leftarrow$)

CASO $w_2 \neq 0$.
Aqui, $w_1/w_2 \in \mathbb{Q}$, digamos, $w_1/w_2 = a/b$, com a e b inteiros, b com o mesmo sinal de w_2. Tome $T = 2b\pi/w_2$. Note que $T > 0$ e, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$x(t+T) = r_1 \cos(w_1(t+T)) + r_2 \cos(w_2(t+T))$$

Demonstração ($\Leftarrow$)

CASO $w_2 \neq 0$.
Aqui, $w_1/w_2 \in \mathbb{Q}$, digamos, $w_1/w_2 = a/b$, com a e b inteiros, b com o mesmo sinal de w_2. Tome $T = 2b\pi/w_2$. Note que $T > 0$ e, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
x(t+T) &= r_1 \cos(w_1(t+T)) + r_2 \cos(w_2(t+T)) \\
&= r_1 \cos(w_1 T)\cos(w_1 t) - r_1 \operatorname{sen}(w_1 t)\operatorname{sen}(w_1 T) + \\
&\quad r_2 \cos(w_2 T)\cos(w_2 t) - r_2 \operatorname{sen}(w_2 t)\operatorname{sen}(w_2 T)
\end{aligned}
$$

Demonstração ($\Leftarrow$)

CASO $w_2 \neq 0$.
Aqui, $w_1/w_2 \in \mathbb{Q}$, digamos, $w_1/w_2 = a/b$, com a e b inteiros, b com o mesmo sinal de w_2. Tome $T = 2b\pi/w_2$. Note que $T > 0$ e, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
x(t+T) &= r_1\cos(w_1(t+T)) + r_2\cos(w_2(t+T)) \\
&= r_1\cos(w_1T)\cos(w_1t) - r_1\,\mathrm{sen}(w_1t)\,\mathrm{sen}(w_1T) + \\
&\quad r_2\cos(w_2T)\cos(w_2t) - r_2\,\mathrm{sen}(w_2t)\,\mathrm{sen}(w_2T) \\
&= r_1\cos(w_1(2b\pi/w_2))\cos(w_1t) - r_1\,\mathrm{sen}(w_1t)\,\mathrm{sen}(w_1(2b\pi/w_2)) + \\
&\quad r_2\cos(w_2(2b\pi/w_2))\cos(w_2t) - r_2\,\mathrm{sen}(w_2t)\,\mathrm{sen}(w_2(2b\pi/w_2))
\end{aligned}$$

CASO $w_2 \neq 0$.
Aqui, $w_1/w_2 \in \mathbb{Q}$, digamos, $w_1/w_2 = a/b$, com a e b inteiros, b com o mesmo sinal de w_2. Tome $T = 2b\pi/w_2$. Note que $T > 0$ e, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
x(t+T) &= r_1\cos(w_1(t+T)) + r_2\cos(w_2(t+T)) \\
&= r_1\cos(w_1 T)\cos(w_1 t) - r_1\,\mathrm{sen}(w_1 t)\,\mathrm{sen}(w_1 T) + \\
&\quad\; r_2\cos(w_2 T)\cos(w_2 t) - r_2\,\mathrm{sen}(w_2 t)\,\mathrm{sen}(w_2 T) \\
&= r_1\cos(w_1(2b\pi/w_2))\cos(w_1 t) - r_1\,\mathrm{sen}(w_1 t)\,\mathrm{sen}(w_1(2b\pi/w_2)) + \\
&\quad\; r_2\cos(w_2(2b\pi/w_2))\cos(w_2 t) - r_2\,\mathrm{sen}(w_2 t)\,\mathrm{sen}(w_2(2b\pi/w_2)) \\
&= r_1\cos(2b\pi(w_1/w_2))\cos(w_1 t) - r_1\,\mathrm{sen}(w_1 t)\,\mathrm{sen}(2b\pi(w_1/w_2)) + \\
&\quad\; r_2\cos(2b\pi(w_2/w_2))\cos(w_2 t) - r_2\,\mathrm{sen}(w_2 t)\,\mathrm{sen}(2b\pi(w_2/w_2))
\end{aligned}$$

Demonstração ($\Leftarrow$)

CASO $w_2 \neq 0$.
Aqui, $w_1/w_2 \in \mathbb{Q}$, digamos, $w_1/w_2 = a/b$, com a e b inteiros, b com o mesmo sinal de w_2. Tome $T = 2b\pi/w_2$. Note que $T > 0$ e, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
x(t+T) &= r_1\cos(w_1(t+T)) + r_2\cos(w_2(t+T)) \\
&= r_1\cos(w_1T)\cos(w_1t) - r_1\operatorname{sen}(w_1t)\operatorname{sen}(w_1T) + \\
&\quad r_2\cos(w_2T)\cos(w_2t) - r_2\operatorname{sen}(w_2t)\operatorname{sen}(w_2T) \\
&= r_1\cos(w_1(2b\pi/w_2))\cos(w_1t) - r_1\operatorname{sen}(w_1t)\operatorname{sen}(w_1(2b\pi/w_2)) + \\
&\quad r_2\cos(w_2(2b\pi/w_2))\cos(w_2t) - r_2\operatorname{sen}(w_2t)\operatorname{sen}(w_2(2b\pi/w_2)) \\
&= r_1\cos(2b\pi(w_1/w_2))\cos(w_1t) - r_1\operatorname{sen}(w_1t)\operatorname{sen}(2b\pi(w_1/w_2)) + \\
&\quad r_2\cos(2b\pi(w_2/w_2))\cos(w_2t) - r_2\operatorname{sen}(w_2t)\operatorname{sen}(2b\pi(w_2/w_2)) \\
&= r_1\cos(2b\pi(a/b))\cos(w_1t) - r_1\operatorname{sen}(w_1t)\operatorname{sen}(2b\pi(a/b)) + \\
&\quad r_2\cos(2b\pi)\cos(w_2t) - r_2\operatorname{sen}(w_2t)\operatorname{sen}(2b\pi)
\end{aligned}$$

Demonstração ($\Leftarrow$)

CASO $w_2 \neq 0$.

Aqui, $w_1/w_2 \in \mathbb{Q}$, digamos, $w_1/w_2 = a/b$, com a e b inteiros, b com o mesmo sinal de w_2. Tome $T = 2b\pi/w_2$. Note que $T > 0$ e, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
x(t+T) &= r_1\cos(w_1(t+T)) + r_2\cos(w_2(t+T)) \\
&= r_1\cos(w_1T)\cos(w_1t) - r_1\,\text{sen}(w_1t)\,\text{sen}(w_1T) + \\
&\quad r_2\cos(w_2T)\cos(w_2t) - r_2\,\text{sen}(w_2t)\,\text{sen}(w_2T) \\
&= r_1\cos(w_1(2b\pi/w_2))\cos(w_1t) - r_1\,\text{sen}(w_1t)\,\text{sen}(w_1(2b\pi/w_2)) + \\
&\quad r_2\cos(w_2(2b\pi/w_2))\cos(w_2t) - r_2\,\text{sen}(w_2t)\,\text{sen}(w_2(2b\pi/w_2)) \\
&= r_1\cos(2b\pi(w_1/w_2))\cos(w_1t) - r_1\,\text{sen}(w_1t)\,\text{sen}(2b\pi(w_1/w_2)) + \\
&\quad r_2\cos(2b\pi(w_2/w_2))\cos(w_2t) - r_2\,\text{sen}(w_2t)\,\text{sen}(2b\pi(w_2/w_2)) \\
&= r_1\cos(2b\pi(a/b))\cos(w_1t) - r_1\,\text{sen}(w_1t)\,\text{sen}(2b\pi(a/b)) + \\
&\quad r_2\cos(2b\pi)\cos(w_2t) - r_2\,\text{sen}(w_2t)\,\text{sen}(2b\pi) \\
&= r_1\cos(2a\pi)\cos(w_1t) - r_1\,\text{sen}(w_1t)\,\text{sen}(2a\pi) + \\
&\quad r_2\cos(2b\pi)\cos(w_2t) - r_2\,\text{sen}(w_2t)\,\text{sen}(2b\pi)
\end{aligned}$$

CASO $w_2 \neq 0$.
Aqui, $w_1/w_2 \in \mathbb{Q}$, digamos, $w_1/w_2 = a/b$, com a e b inteiros, b com o mesmo sinal de w_2. Tome $T = 2b\pi/w_2$. Note que $T > 0$ e, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
x(t+T) &= r_1\cos(w_1(t+T)) + r_2\cos(w_2(t+T)) \\
&= r_1\cos(w_1T)\cos(w_1t) - r_1\,\mathrm{sen}(w_1t)\,\mathrm{sen}(w_1T) + \\
&\quad\; r_2\cos(w_2T)\cos(w_2t) - r_2\,\mathrm{sen}(w_2t)\,\mathrm{sen}(w_2T) \\
&= r_1\cos(w_1(2b\pi/w_2))\cos(w_1t) - r_1\,\mathrm{sen}(w_1t)\,\mathrm{sen}(w_1(2b\pi/w_2)) + \\
&\quad\; r_2\cos(w_2(2b\pi/w_2))\cos(w_2t) - r_2\,\mathrm{sen}(w_2t)\,\mathrm{sen}(w_2(2b\pi/w_2)) \\
&= r_1\cos(2b\pi(w_1/w_2))\cos(w_1t) - r_1\,\mathrm{sen}(w_1t)\,\mathrm{sen}(2b\pi(w_1/w_2)) + \\
&\quad\; r_2\cos(2b\pi(w_2/w_2))\cos(w_2t) - r_2\,\mathrm{sen}(w_2t)\,\mathrm{sen}(2b\pi(w_2/w_2)) \\
&= r_1\cos(2b\pi(a/b))\cos(w_1t) - r_1\,\mathrm{sen}(w_1t)\,\mathrm{sen}(2b\pi(a/b)) + \\
&\quad\; r_2\cos(2b\pi)\cos(w_2t) - r_2\,\mathrm{sen}(w_2t)\,\mathrm{sen}(2b\pi) \\
&= r_1\cos(2a\pi)\cos(w_1t) - r_1\,\mathrm{sen}(w_1t)\,\mathrm{sen}(2a\pi) + \\
&\quad\; r_2\cos(2b\pi)\cos(w_2t) - r_2\,\mathrm{sen}(w_2t)\,\mathrm{sen}(2b\pi) \\
&= r_1\cos(w_1t) + r_2\cos(w_2t) = x(t).
\end{aligned}$$

Demonstração ($\Leftarrow$)

Argumentos análogos mostram que $y(t+T) = y(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração ($\Leftarrow$)

Argumentos análogos mostram que $y(t+T) = y(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo,

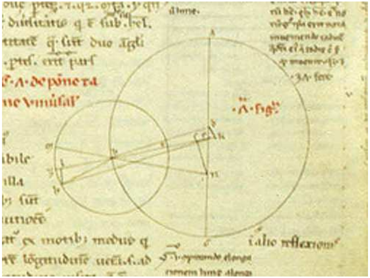
$$T = 2b\pi/w_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x(t+T) = x(t) \text{ e } y(t+T) = y(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração ($\Leftarrow$)

Argumentos análogos mostram que $y(t+T) = y(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo,

$$T = 2b\pi/w_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x(t+T) = x(t) \text{ e } y(t+T) = y(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Sendo assim, a trajetória do movimento epicíclico é periódica. ■



Livro Almagesto de Claudio Ptolomeu:
epiciclos para explicar o movimento retrógrado aparente dos planetas

<http://www.uff.br/cdme/epiciclos/epiciclos-html/epiciclos-t-01-2c-02-br.html>

(GeoGebra)

Epiciclos e Análise de Fourier

$$\begin{cases} x(t) &= r_1 \cos(w_1 t) + r_2 \cos(w_2 t), \\ y(t) &= r_1 \operatorname{sen}(w_1 t) + r_2 \operatorname{sen}(w_2 t), \end{cases}$$

Epiciclos e Análise de Fourier

$$\begin{cases} x(t) & = & r_1 \cos(w_1 t) + r_2 \cos(w_2 t), \\ y(t) & = & r_1 \operatorname{sen}(w_1 t) + r_2 \operatorname{sen}(w_2 t), \end{cases} \qquad z(t) = x(t) + iy(t) = r_1 e^{iw_1 t} + r_2 e^{iw_2 t}$$

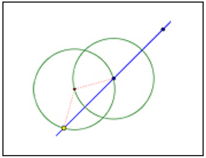
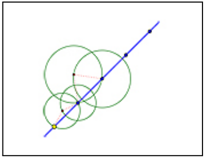
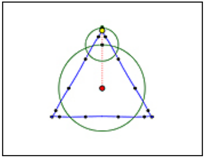
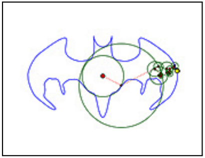
$$\begin{cases} x(t) & = & r_1 \cos(w_1 t) + r_2 \cos(w_2 t), \\ y(t) & = & r_1 \operatorname{sen}(w_1 t) + r_2 \operatorname{sen}(w_2 t), \end{cases} \qquad z(t) = x(t) + iy(t) = r_1 e^{iw_1 t} + r_2 e^{iw_2 t}$$

E se acrescentarmos mais círculos? O que podemos desenhar?

Epiciclos e Análise de Fourier

$$\begin{cases} x(t) = r_1 \cos(w_1 t) + r_2 \cos(w_2 t), \\ y(t) = r_1 \operatorname{sen}(w_1 t) + r_2 \operatorname{sen}(w_2 t), \end{cases} \qquad z(t) = x(t) + iy(t) = r_1 e^{iw_1 t} + r_2 e^{iw_2 t}$$

E se acrescentarmos mais círculos? O que podemos desenhar?

<http://tube.geogebra.org/student/m233565?mobile=true>

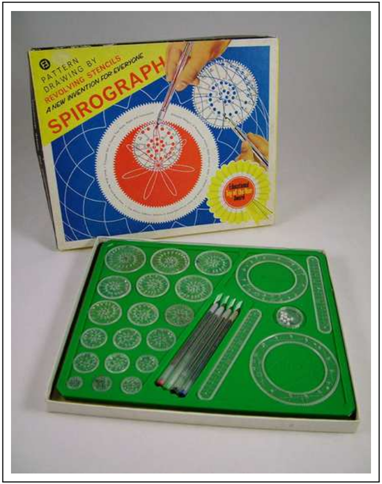
<http://tube.geogebra.org/student/m233583?mobile=true>

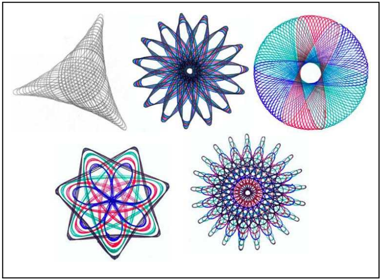
<http://tube.geogebra.org/student/m233591?mobile=true>

<http://tube.geogebra.org/student/m116478?mobile=true>

Números Irracionais e Espirógrafos

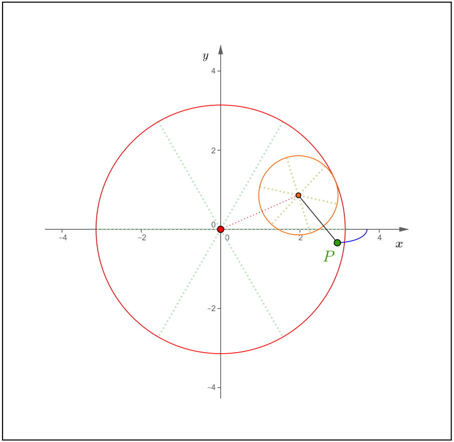
Números irracionais e espirógrafos





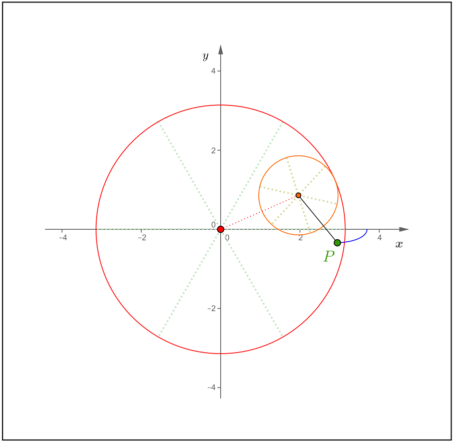
Hipotrocoides

Hipotrocoides



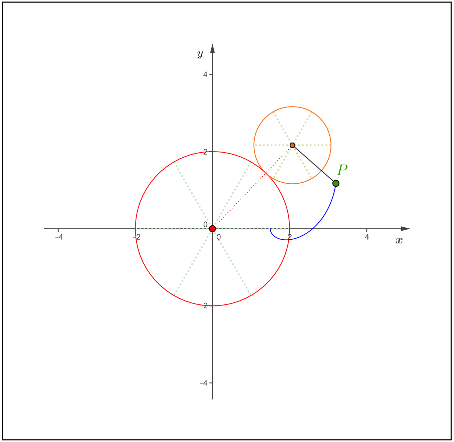
Hipotrocoides

$$\begin{cases} x(\theta) &= (R-r)\cos(\theta) + d\cos\left(\dfrac{R-r}{r}\theta\right), \\ y(\theta) &= (R-r)\,\mathrm{sen}(\theta) - d\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{R-r}{r}\theta\right). \end{cases}$$



Epitrocoides

$$\begin{cases} x(\theta) & = & (R+r)\cos(\theta) - d\cos\left(\dfrac{R+r}{r}\theta\right), \\ y(\theta) & = & (R+r)\,\mathrm{sen}(\theta) - d\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{R+r}{r}\theta\right). \end{cases}$$



Teorema:

hipotrocoides e epitrocoides são curvas periódicas

$$\Updownarrow$$

R/r é um número racional.

Números Irracionais e Representações Decimais

Números irracionais e representações decimais

O que é uma representação decimal?

O que é uma representação decimal?

- Qual é o significado de 2506?

O que é uma representação decimal?

- Qual é o significado de 2506?
- Qual é o significado de 0,25?

O que é uma representação decimal?

- Qual é o significado de 2506?
- Qual é o significado de 0,25? Por que $0{,}25 = \frac{1}{4}$?

O que é uma representação decimal?

- Qual é o significado de 2506?
- Qual é o significado de 0,25? Por que $0{,}25 = \frac{1}{4}$?
- Qual é o significado de $0{,}\overline{3} = 0{,}333\ldots$?

O que é uma representação decimal?

- Qual é o significado de 2506?
- Qual é o significado de 0,25? Por que $0{,}25 = \frac{1}{4}$?
- Qual é o significado de $0{,}\overline{3} = 0{,}333\ldots$? Por que $0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}$?

Números irracionais e representações decimais

O que é uma representação decimal?

- Qual é o significado de 2506?
- Qual é o significado de 0,25? Por que $0{,}25 = \frac{1}{4}$?
- Qual é o significado de $0{,}\overline{3} = 0{,}333\ldots$? Por que $0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}$?
- Qual é o significado de $0{,}\overline{9} = 0{,}999\ldots$?

Números irracionais e representações decimais

O que é uma representação decimal?

- Qual é o significado de 2506?
- Qual é o significado de 0,25? Por que $0{,}25 = \frac{1}{4}$?
- Qual é o significado de $0{,}\overline{3} = 0{,}333\ldots$? Por que $0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}$?
- Qual é o significado de $0{,}\overline{9} = 0{,}999\ldots$? Por que $0{,}\overline{9} = 1$?

O que é uma representação decimal?

- Qual é o significado de 2506?
- Qual é o significado de 0,25? Por que $0{,}25 = \frac{1}{4}$?
- Qual é o significado de $0{,}\overline{3} = 0{,}333\ldots$? Por que $0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}$?
- Qual é o significado de $0{,}\overline{9} = 0{,}999\ldots$? Por que $0{,}\overline{9} = 1$?
- Qual é o significado de $0{,}1010010001\ldots\underbrace{0\ldots0}_{k \text{ zeros}}1\ldots$?

Números irracionais e representações decimais

Qual é o significado de 2506?

Qual é o significado de 2506?

2506 são 2 milhares, 5 centenas, 0 dezenas e 6 unidades.

Qual é o significado de 2506?

2506 são 2 milhares, 5 centenas, 0 dezenas e 6 unidades.

$$2506 = 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0.$$

Qual é o significado de 0,25?

Números irracionais e representações decimais

Qual é o significado de 0,25?

0,25 são 2 décimos e 5 centésimos.

Qual é o significado de 0,25?

0,25 são 2 décimos e 5 centésimos.

$$0{,}25 = 2 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot \frac{1}{100}$$

Qual é o significado de 0,25?

0,25 são 2 décimos e 5 centésimos.

$$0{,}25 = 2 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot \frac{1}{100} = 2 \cdot \frac{10}{100} + 5 \cdot \frac{1}{100}$$

Qual é o significado de 0,25?

0,25 são 2 décimos e 5 centésimos.

$$0{,}25 = 2 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot \frac{1}{100} = 2 \cdot \frac{10}{100} + 5 \cdot \frac{1}{100} = \frac{2 \cdot 10 + 5}{100}$$

Qual é o significado de 0,25?

0,25 são 2 décimos e 5 centésimos.

$$0{,}25 = 2 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot \frac{1}{100} = 2 \cdot \frac{10}{100} + 5 \cdot \frac{1}{100} = \frac{2 \cdot 10 + 5}{100} = \frac{25}{100}$$

Qual é o significado de 0,25?

0,25 são 2 décimos e 5 centésimos.

$$0{,}25 = 2 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot \frac{1}{100} = 2 \cdot \frac{10}{100} + 5 \cdot \frac{1}{100} = \frac{2 \cdot 10 + 5}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1 \cdot 25}{4 \cdot 25}$$

Qual é o significado de 0,25?

0,25 são 2 décimos e 5 centésimos.

$$0{,}25 = 2 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot \frac{1}{100} = 2 \cdot \frac{10}{100} + 5 \cdot \frac{1}{100} = \frac{2 \cdot 10 + 5}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{1}{4}.$$

Qual é o significado de 0,25?

0,25 são 2 décimos e 5 centésimos.

$$0{,}25 = 2 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot \frac{1}{100} = 2 \cdot \frac{10}{100} + 5 \cdot \frac{1}{100} = \frac{2 \cdot 10 + 5}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{1}{4}.$$

$\frac{1}{4}$ é um exemplo de um número real que tem representação decimal finita.

Definição:

dizemos que um $x \geq 0$ tem uma representação decimal finita se existem dígitos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e $a_1, a_2, \ldots, a_m$ tais que:

$$\begin{aligned} x &= A_1 A_2 \ldots A_n{,}a_1 a_2 \ldots a_m \\ &= A_1 \cdot 10^{n-1} + A_2 \cdot 10^{n-2} + \cdots + A_n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_m}{10^m} \\ &= \frac{A_1 A_2 \ldots A_n a_1 a_2 \ldots a_m}{10^m}, \end{aligned}$$

com $A_1 \neq 0$ se $n > 1$.

Números irracionais e representações decimais

Qual é o significado de $0{,}\overline{3} = 0{,}333\ldots$?

Qual é o significado de $0{,}\overline{3} = 0{,}333\ldots$?

$0{,}\overline{3} = 0{,}333\ldots$ é uma notação

Números irracionais e representações decimais

Qual é o significado de $0{,}\overline{3} = 0{,}333\ldots$?

$0{,}\overline{3} = 0{,}333\ldots$ é uma notação para o número real x que é limite da seguinte sequência:

Números irracionais e representações decimais

Qual é o significado de $0{,}\overline{3} = 0{,}333\ldots$?

$0{,}\overline{3} = 0{,}333\ldots$ é uma notação para o número real x que é limite da seguinte sequência:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \\
x_2 &= \\
&\vdots \\
x_k &=
\end{aligned}
$$

Qual é o significado de $0{,}\overline{3} = 0{,}333\ldots$?

$0{,}\overline{3} = 0{,}333\ldots$ é uma notação para o número real x que é limite da seguinte sequência:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0{,}3 \\
x_2 &= \\
&\vdots \\
x_k &=
\end{aligned}
$$

Qual é o significado de $0{,}\overline{3} = 0{,}333\ldots$?

$0{,}\overline{3} = 0{,}333\ldots$ é uma notação para o número real x que é limite da seguinte sequência:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0{,}3 \\
x_2 &= 0{,}33 \\
&\vdots \\
x_k &=
\end{aligned}
$$

Qual é o significado de $0{,}\overline{3} = 0{,}333\ldots$?

$0{,}\overline{3} = 0{,}333\ldots$ é uma notação para o número real x que é limite da seguinte sequência:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0{,}3 \\
x_2 &= 0{,}33 \\
&\vdots \\
x_k &= 0{,}\underbrace{3\ldots3}_{k \text{ dígitos } 3}
\end{aligned}
$$

Números irracionais e representações decimais

Qual é o significado de $0{,}\overline{3} = 0{,}333\ldots$?

$0{,}\overline{3} = 0{,}333\ldots$ é uma notação para o número real x que é limite da seguinte sequência:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0{,}3 &&= \frac{3}{10}, \\
x_2 &= 0{,}33 &&= \frac{3}{10^2}, \\
&\vdots \\
x_k &= 0{,}\underbrace{3\ldots3}_{k \text{ dígitos } 3} &&= \frac{\overbrace{3 \quad \ldots \quad 3}^{k \text{ dígitos } 3}}{10^k}.
\end{aligned}
$$

Números irracionais e representações decimais

Por que $0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}$?

Números irracionais e representações decimais

Por que $0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}$?

$$x_k = 0,\underbrace{3 \quad \ldots \quad 3}_{k \text{ dígitos } 3} = \frac{\overbrace{3 \quad \ldots \quad 3}^{k \text{ dígitos } 3}}{10^k}$$

Por que $0,\overline{3} = \frac{1}{3}$?

$$\begin{aligned} x_k &= 0,\underbrace{3 \quad \ldots \quad 3}_{k \text{ dígitos } 3} = \frac{\overbrace{3 \quad \ldots \quad 3}^{k \text{ dígitos } 3}}{10^k} \\ &= \frac{3 \cdot 10^{k-1} + 3 \cdot 10^{k-2} + \cdots + 3 \cdot 10 + 3}{10^k} \end{aligned}$$

Números irracionais e representações decimais

Por que $0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}$?

$$
\begin{aligned}
x_k &= 0,\underbrace{3 \quad \ldots \quad 3}_{k \text{ dígitos } 3} = \frac{\overbrace{3 \quad \ldots \quad 3}^{k \text{ dígitos } 3}}{10^k} \\
&= \frac{3 \cdot 10^{k-1} + 3 \cdot 10^{k-2} + \cdots + 3 \cdot 10 + 3}{10^k} \\
&= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots + \frac{3}{10^k}
\end{aligned}
$$

Números irracionais e representações decimais

Por que $0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}$?

$$
\begin{aligned}
x_k &= 0,\underbrace{3 \quad \ldots \quad 3}_{k \text{ dígitos } 3} = \frac{\overbrace{3 \quad \ldots \quad 3}^{k \text{ dígitos } 3}}{10^k} \\
&= \frac{3 \cdot 10^{k-1} + 3 \cdot 10^{k-2} + \cdots + 3 \cdot 10 + 3}{10^k} \\
&= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots + \frac{3}{10^k} \\
&= \frac{3/10 \cdot ((1/10)^k - 1)}{1/10 - 1}.
\end{aligned}
$$

Números irracionais e representações decimais

Por que $0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}$?

$$
\begin{aligned}
x_k &= 0,\underbrace{3 \quad \ldots \quad 3}_{k \text{ dígitos } 3} = \frac{\overbrace{3 \quad \ldots \quad 3}^{k \text{ dígitos } 3}}{10^k} \\
&= \frac{3 \cdot 10^{k-1} + 3 \cdot 10^{k-2} + \cdots + 3 \cdot 10 + 3}{10^k} \\
&= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots + \frac{3}{10^k} \\
&= \frac{3/10 \cdot ((1/10)^k - 1)}{1/10 - 1}.
\end{aligned}
$$

Como $(1/10)^k \to 0$, segue-se que x_k converge para $\frac{-3/10}{1/10-1} = \frac{1}{3}$.

Representações decimais finitas

$\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3} = 0{,}333\ldots$ é um exemplo de número real com expansão decimal infinita e periódica.

$\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3} = 0{,}333\ldots$ é um exemplo de número real com expansão decimal infinita e periódica.

Definição:

dizemos que um número real $x \geq 0$ tem uma representação decimal infinita se existem dígitos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ tais que

$$x = A_1 A_2 \ldots A_n{,}a_1 a_2 \ldots a_k \ldots, \tag{1}$$

com $A_1 \neq 0$ se $n > 1$ e, também, não existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $a_k = 0$ para todo $k \geq p$ (isto é, nem todo a_k é zero a partir de certo ponto).

$\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3} = 0{,}333\ldots$ é um exemplo de número real com expansão decimal infinita e periódica.

Definição:

dizemos que um número real $x \geq 0$ tem uma representação decimal infinita se existem dígitos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ tais que

$$x = A_1 A_2 \ldots A_n{,}a_1 a_2 \ldots a_k \ldots, \tag{1}$$

com $A_1 \neq 0$ se $n > 1$ e, também, não existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $a_k = 0$ para todo $k \geq p$ (isto é, nem todo a_k é zero a partir de certo ponto).

Definição:

dizemos que um número reak x possui uma representação decimal infinita periódica se existem dígitos $A_1, \ldots, A_s$, $b_1, \ldots, b_m$, $a_1, \ldots, a_n$ tais que

$$x = A_1 \ldots A_s{,}b_1 \ldots b_m\overline{a_1 \ldots a_n}.$$

Qual é o significado de $0{,}\overline{9} = 0{,}999\ldots$?

Números irracionais e representações decimais

Qual é o significado de $0{,}\overline{9} = 0{,}999\ldots$?

$0{,}\overline{9} = 0{,}999\ldots$ é uma notação

Números irracionais e representações decimais

Qual é o significado de $0{,}\overline{9} = 0{,}999\ldots$?

$0{,}\overline{9} = 0{,}999\ldots$ é uma notação para o número real x que é limite da seguinte sequência:

Qual é o significado de $0{,}\overline{9} = 0{,}999\ldots$?

$0{,}\overline{9} = 0{,}999\ldots$ é uma notação para o número real x que é limite da seguinte sequência:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \\
x_2 &= \\
&\vdots \\
x_k &=
\end{aligned}
$$

Qual é o significado de $0,\overline{9} = 0,999\ldots$?

$0,\overline{9} = 0,999\ldots$ é uma notação para o número real x que é limite da seguinte sequência:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0,9 \\
x_2 &= \\
&\vdots \\
x_k &=
\end{aligned}
$$

Números irracionais e representações decimais

Qual é o significado de $0{,}\overline{9} = 0{,}999\ldots$?

$0{,}\overline{9} = 0{,}999\ldots$ é uma notação para o número real x que é limite da seguinte sequência:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0{,}9 \\
x_2 &= 0{,}99 \\
&\vdots \\
x_k &=
\end{aligned}
$$

Qual é o significado de $0,\overline{9} = 0,999\ldots$?

$0,\overline{9} = 0,999\ldots$ é uma notação para o número real x que é limite da seguinte sequência:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0,9 \\
x_2 &= 0,99 \\
&\vdots \\
x_k &= 0,\underbrace{9\ldots9}_{k \text{ dígitos } 9}
\end{aligned}
$$

Qual é o significado de $0{,}\overline{9} = 0{,}999\ldots$?

$0{,}\overline{9} = 0{,}999\ldots$ é uma notação para o número real x que é limite da seguinte sequência:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0{,}9 &&= \frac{9}{10}, \\
x_2 &= 0{,}99 &&= \frac{9}{10^2}, \\
&\vdots \\
x_k &= 0{,}\underbrace{9\ldots9}_{k \text{ dígitos } 9} &&= \frac{\overbrace{9 \quad \ldots \quad 9}^{k \text{ dígitos } 9}}{10^k}.
\end{aligned}
$$

Números irracionais e representações decimais

Por que $0{,}\overline{9} = 1$?

Por que $0{,}\overline{9} = 1$?

$$x_k = 0,\underbrace{9 \quad \ldots \quad 9}_{k \text{ dígitos } 3} = \frac{\overbrace{9 \quad \ldots \quad 9}^{k \text{ dígitos } 9}}{10^k}$$

Por que $0,\overline{9} = 1$?

$$\begin{aligned} x_k &= 0,\underbrace{9 \quad \ldots \quad 9}_{k \text{ dígitos } 3} = \frac{\overbrace{9 \quad \ldots \quad 9}^{k \text{ dígitos } 9}}{10^k} \\ &= \frac{9 \cdot 10^{k-1} + 9 \cdot 10^{k-2} + \cdots + 9 \cdot 10 + 9}{10^k} \end{aligned}$$

Por que $0,\overline{9} = 1$?

$$
\begin{aligned}
x_k &= 0,\underbrace{9 \quad \ldots \quad 9}_{k \text{ dígitos } 3} = \frac{\overbrace{9 \quad \ldots \quad 9}^{k \text{ dígitos } 9}}{10^k} \\
&= \frac{9 \cdot 10^{k-1} + 9 \cdot 10^{k-2} + \cdots + 9 \cdot 10 + 9}{10^k} \\
&= \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^k}
\end{aligned}
$$

Números irracionais e representações decimais

Por que $0{,}\overline{9} = 1$?

$$
\begin{aligned}
x_k &= 0,\underbrace{9 \quad \ldots \quad 9}_{k \text{ dígitos } 3} = \frac{\overbrace{9 \quad \ldots \quad 9}^{k \text{ dígitos } 9}}{10^k} \\
&= \frac{9 \cdot 10^{k-1} + 9 \cdot 10^{k-2} + \cdots + 9 \cdot 10 + 9}{10^k} \\
&= \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^k} \\
&= \frac{9/10 \cdot ((1/10)^k - 1)}{1/10 - 1}.
\end{aligned}
$$

Por que $0{,}\overline{9} = 1$?

$$
\begin{aligned}
x_k &= 0,\underbrace{9 \quad \ldots \quad 9}_{k \text{ dígitos } 3} = \frac{\overbrace{9 \quad \ldots \quad 9}^{k \text{ dígitos } 9}}{10^k} \\
&= \frac{9 \cdot 10^{k-1} + 9 \cdot 10^{k-2} + \cdots + 9 \cdot 10 + 9}{10^k} \\
&= \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^k} \\
&= \frac{9/10 \cdot ((1/10)^k - 1)}{1/10 - 1}.
\end{aligned}
$$

Como $(1/10)^k \to 0$, segue-se que x_k converge para $\frac{-9/10}{1/10-1} = 1$.

$$0{,}\overline{9} = 1$$

Moral 1:

$0{,}\overline{9} = 1$ possui uma representação decimal finita e uma representação decimal infinita periódica.

$$0{,}\overline{9} = 1$$

Moral 1:
$0{,}\overline{9} = 1$ possui uma representação decimal finita e uma representação decimal infinita periódica.

Moral 2:
existem números reais que possuem duas representações decimais diferentes!

Mais uma vez:

$$A_1A_2\ldots A_n{,}a_1a_2\ldots a_k\ldots.$$

é uma notação o número real x que é o limite da sequência (x_k) definida por

$$\begin{aligned}
x_1 &= A_1A_2\ldots A_n{,}a_1 &&= A_1A_2\ldots A_n + \frac{a_1}{10},\\
x_2 &= A_1A_2\ldots A_n{,}a_1a_2 &&= A_1A_2\ldots A_n + \frac{a_1a_2}{100},\\
x_3 &= A_1A_2\ldots A_n{,}a_1a_2a_3 &&= A_1A_2\ldots A_n + \frac{a_1a_2a_3}{1000},\\
&\vdots\\
x_k &= A_1A_2\ldots A_n{,}a_1a_2\ldots a_k &&= A_1A_2\ldots A_n + \frac{a_1a_2\ldots a_k}{10^k}.
\end{aligned}$$

[Por que o limite existe?]

Números irracionais e representações decimais

Qual é o significado de $0{,}1010010001\ldots\underbrace{0\ldots0}_{k \text{ zeros}}1\ldots$?

Qual é o significado de $0{,}1010010001\ldots\underbrace{0\ldots0}_{k \text{ zeros}}1\ldots$?

$0{,}1010010001\ldots\overbrace{0\ldots0}^{k \text{ zeros}}1\ldots$ é uma notação para o número real x que é limite da seguinte sequência de números racionais:

Qual é o significado de $0{,}1010010001\ldots\underbrace{0\ldots0}_{k\text{ zeros}}1\ldots$?

$0{,}1010010001\ldots\overbrace{0\ldots0}^{k\text{ zeros}}1\ldots$ é uma notação para o número real x que é limite da seguinte sequência de números racionais:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0{,}1,\\
x_2 &= 0{,}10,\\
x_3 &= 0{,}101,\\
x_4 &= 0{,}1010,\\
x_5 &= 0{,}10100,\\
x_6 &= 0{,}101001,\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Números irracionais e representações decimais

Qual é o significado de $0{,}1010010001\ldots\underbrace{0\ldots0}_{k\text{ zeros}}1\ldots$?

$0{,}1010010001\ldots\overbrace{0\ldots0}^{k\text{ zeros}}1\ldots$ é uma notação para o número real x que é limite da seguinte sequência de números racionais:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0{,}1, \\ x_2 &= 0{,}10, \\ x_3 &= 0{,}101, \\ x_4 &= 0{,}1010, \\ x_5 &= 0{,}10100, \\ x_6 &= 0{,}101001, \\ &\vdots \end{aligned}$$

x é um número real que possui representação decimal infinita e não periódica.

Todo número real x possui uma representação decimal?

Resposta:

Números irracionais e representações decimais

Todo número real x possui uma representação decimal?

Resposta: sim!

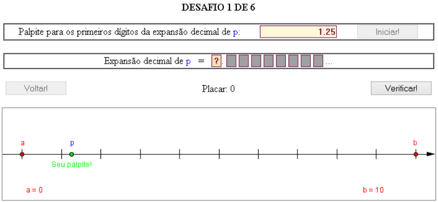
Números irracionais e representações decimais

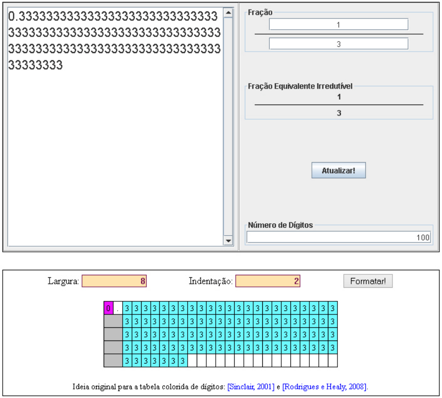
Todo número real x possui uma representação decimal?

Resposta: sim!

Demonstração: Mózer (2013) seguindo *An Introduction to the Theory of Numbers* de Hardy, Wright, Heath-Brown e Silverman, 2009.

Números irracionais e representações decimais





<http://www.uff.br/cdme/edn/>

Números irracionais e representações decimais

Teorema:
um número real x é irracional

$$\Updownarrow$$

x possui uma representação decimal que é infinita e não periódica.

Números irracionais e representações decimais

Teorema:
um número real x é irracional

$$\Updownarrow$$

x possui uma representação decimal que é infinita e não periódica.

Teorema:
um número real x é racional

$$\Updownarrow$$

x possui uma representação decimal finita ou infinita periódica.

Demonstração (⇒, quase completa)

Demonstração (⇒, quase completa)

Sem perda de generalidade, vamos supor $x \in [0, 1[$.

Demonstração ($\Rightarrow$, quase completa)

Sem perda de generalidade, vamos supor $x \in [0, 1[$. Se $x \in \mathbb{Q}$, então $x = p/q$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $0 < p < q$.

Demonstração ($\Rightarrow$, quase completa)

Sem perda de generalidade, vamos supor $x \in [0,1[$. Se $x \in \mathbb{Q}$, então $x = p/q$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $0 < p < q$. O Algoritmo da Divisão obtém uma sequência (x_k) de números racionais com representação decimal finita que converge para x:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0{,}a_1\,, \\ x_2 &= 0{,}a_1 a_2\,, \\ x_3 &= 0{,}a_1 a_2 a_3\,, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l|l} p & \ q \\ \cline{2-2} r_1 & 0{,}a_1 a_2 a_3 \\ \ \ r_2 & \\ \ \ \ \ r_3 & \end{array}$$

Demonstração (⇒, quase completa)

Sem perda de generalidade, vamos supor $x \in [0,1[$. Se $x \in \mathbb{Q}$, então $x = p/q$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $0 < p < q$. O Algoritmo da Divisão obtém uma sequência (x_k) de números racionais com representação decimal finita que converge para x:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0{,}a_1, \\
x_2 &= 0{,}a_1a_2, \\
x_3 &= 0{,}a_1a_2a_3, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
p & q \\ \hline
r_1 & 0{,}a_1a_2a_3 \\
\quad r_2 & \\
\qquad r_3 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
12 & 99 \\ \hline
-\ 0 & 0 \\ \hline
12 &
\end{array}
$$

Demonstração ($\Rightarrow$, quase completa)

Sem perda de generalidade, vamos supor $x \in [0,1[$. Se $x \in \mathbb{Q}$, então $x = p/q$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $0 < p < q$. O Algoritmo da Divisão obtém uma sequência (x_k) de números racionais com representação decimal finita que converge para x:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0{,}a_1, \\ x_2 & = & 0{,}a_1 a_2, \\ x_3 & = & 0{,}a_1 a_2 a_3, \\ & \vdots & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} p & q \\ \cline{2-2} r_1 & 0{,}a_1 a_2 a_3 \\ \quad r_2 & \\ \qquad r_3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1\,2 & 9\,9 \\ \cline{2-2} -0 & 0{,}1 \\ \cline{1-1} 1\,2\,0 & \\ -9\,9 & \\ \cline{1-1} 2\,1 & \end{array}$$

Demonstração ($\Rightarrow$, quase completa)

Sem perda de generalidade, vamos supor $x \in [0, 1[$. Se $x \in \mathbb{Q}$, então $x = p/q$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $0 < p < q$. O Algoritmo da Divisão obtém uma sequência (x_k) de números racionais com representação decimal finita que converge para x:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0{,}a_1, \\ x_2 &= 0{,}a_1 a_2, \\ x_3 &= 0{,}a_1 a_2 a_3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l|l} p & q \\ \hline r_1 & 0{,}a_1 a_2 a_3 \\ \quad r_2 & \\ \qquad r_3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 12 & 99 \\ \hline -\ \ 0 & 0{,}12 \\ \hline 120 & \\ -\ \ 99 & \\ \hline 210 & \\ -\ 198 & \\ \hline 12 & \end{array}$$

Demonstração ($\Rightarrow$, quase completa)

Sem perda de generalidade, vamos supor $x \in [0, 1[$. Se $x \in \mathbb{Q}$, então $x = p/q$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $0 < p < q$. O Algoritmo da Divisão obtém uma sequência (x_k) de números racionais com representação decimal finita que converge para x:

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 & = & 0{,}a_1\,, \\
x_2 & = & 0{,}a_1 a_2\,, \\
x_3 & = & 0{,}a_1 a_2 a_3\,, \\
 & \vdots &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
p & q \\ \cline{2-2}
r_1 & 0{,}a_1 a_2 a_3 \\
\quad r_2 & \\
\qquad r_3 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrr|l}
- & 1 & 2 & & 9\ 9 \\ \cline{5-5}
 & & 0 & & 0{,}1\ 2 \\ \cline{2-3}
- & 1 & 2 & 0 & \\
 & & 9 & 9 & \\ \cline{2-4}
- & 2 & 1 & 0 & \\
 & 1 & 9 & 8 & \\ \cline{2-4}
 & & 1 & 2 &
\end{array}
$$

Os restos r_k podem ser: $0, 1, 2, 3, \ldots, q-1$.

Demonstração ($\Rightarrow$, quase completa)

Sem perda de generalidade, vamos supor $x \in [0, 1[$. Se $x \in \mathbb{Q}$, então $x = p/q$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $0 < p < q$. O Algoritmo da Divisão obtém uma sequência (x_k) de números racionais com representação decimal finita que converge para x:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0{,}a_1, \\ x_2 &= 0{,}a_1a_2, \\ x_3 &= 0{,}a_1a_2a_3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l|l} p & q \\ \hline r_1 & 0{,}a_1a_2a_3 \\ \quad r_2 & \\ \qquad r_3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 12 & 99 \\ \hline -\ \ 0 & 0{,}1\,2 \\ \hline 120 & \\ -\ \ 99 & \\ \hline 210 & \\ -\ 198 & \\ \hline 12 & \end{array}$$

Os restos r_k podem ser: $0, 1, 2, 3, \ldots, q-1$. Se algum r_k for zero, então x terá representação finita.

Demonstração ($\Rightarrow$, quase completa)

Sem perda de generalidade, vamos supor $x \in [0,1[$. Se $x \in \mathbb{Q}$, então $x = p/q$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $0 < p < q$. O Algoritmo da Divisão obtém uma sequência (x_k) de números racionais com representação decimal finita que converge para x:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0{,}a_1, \\
x_2 &= 0{,}a_1 a_2, \\
x_3 &= 0{,}a_1 a_2 a_3, \\
&\vdots
\end{aligned}
\qquad
\begin{array}{l|l}
p & q \\ \cline{2-2}
r_1 & 0{,}a_1 a_2 a_3 \\
\quad r_2 & \\
\qquad r_3 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
12 & 99 \\ \cline{2-2}
-\ \ 0 & 0{,}1\ 2 \\ \cline{1-1}
120 & \\
-\ 99 & \\ \cline{1-1}
210 & \\
-198 & \\ \cline{1-1}
12 &
\end{array}
$$

Os restos r_k podem ser: $0, 1, 2, 3, \ldots, q-1$. Se algum r_k for zero, então x terá representação finita. Se nenhum r_k for zero, então, pelo Princípio da Casa dos Pombos, os restos começam a se repetir. Com isto, a representação decimal de x é infinita e periódica.

Demonstração ($\Leftarrow$)

Demonstração ($\Leftarrow$)

Seja $x \in [0,1[$ um número real que possui uma representação decimal finita ou infinita periódica.

Demonstração ($\Leftarrow$)

Seja $x \in [0, 1[$ um número real que possui uma representação decimal finita ou infinita periódica.

Se a representação decimal de x é finita, então podemos escrever

Demonstração ($\Leftarrow$)

Seja $x \in [0, 1[$ um número real que possui uma representação decimal finita ou infinita periódica.

Se a representação decimal de x é finita, então podemos escrever $x = 0{,}a_1 a_2 ... a_n$, com $a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Demonstração ($\Leftarrow$)

Seja $x \in [0,1[$ um número real que possui uma representação decimal finita ou infinita periódica.

Se a representação decimal de x é finita, então podemos escrever $x = 0{,}a_1 a_2 ... a_n$, com $a_1, \ldots, a_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Assim,

Demonstração ($\Leftarrow$)

Seja $x \in [0, 1[$ um número real que possui uma representação decimal finita ou infinita periódica.

Se a representação decimal de x é finita, então podemos escrever $x = 0{,}a_1 a_2 ... a_n$, com $a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Assim,

$$x = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} = \frac{a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_n}{10^n}$$

Demonstração ($\Leftarrow$)

Seja $x \in [0, 1[$ um número real que possui uma representação decimal finita ou infinita periódica.

Se a representação decimal de x é finita, então podemos escrever $x = 0{,}a_1 a_2 ... a_n$, com $a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Assim,

$$x = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} = \frac{a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_n}{10^n}$$

é um número racional como queríamos.

Seja $x \in [0, 1[$ um número real que possui uma representação decimal finita ou infinita periódica.

Se a representação decimal de x é finita, então podemos escrever $x = 0{,}a_1a_2...a_n$, com $a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Assim,

$$x = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} = \frac{a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_n}{10^n}$$

é um número racional como queríamos.

Agora suponha que a representação decimal de x é infinita e periódica.

Demonstração ($\Leftarrow$)

Seja $x \in [0, 1[$ um número real que possui uma representação decimal finita ou infinita periódica.

Se a representação decimal de x é finita, então podemos escrever $x = 0{,}a_1 a_2 ... a_n$, com $a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Assim,

$$x = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} = \frac{a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_n}{10^n}$$

é um número racional como queríamos.

Agora suponha que a representação decimal de x é infinita e periódica. Logo, podemos escrever

$$x = 0{,}b_1 b_2 ... b_m \overline{a_1 a_2 ... a_n},$$

Demonstração ($\Leftarrow$)

Seja $x \in [0,1[$ um número real que possui uma representação decimal finita ou infinita periódica.

Se a representação decimal de x é finita, então podemos escrever $x = 0{,}a_1a_2\ldots a_n$, com $a_1, \ldots, a_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Assim,

$$x = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} = \frac{a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_n}{10^n}$$

é um número racional como queríamos.

Agora suponha que a representação decimal de x é infinita e periódica. Logo, podemos escrever

$$x = 0{,}b_1b_2\ldots b_m\overline{a_1a_2\ldots a_n},$$

com $b_1, \ldots, b_m, a_1, \ldots, a_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Demonstração ($\Leftarrow$)

$$
\begin{aligned}
x &= 0{,}b_1 b_2 \ldots b_m \overline{a_1 a_2 \ldots a_n} \\
&= \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \cdots + \frac{b_m}{10^m} \\
&\quad + \frac{a_1}{10^{m+1}} + \frac{a_2}{10^{m+2}} + \cdots + \frac{a_n}{10^{m+n}} \\
&\quad + \frac{a_1}{10^{m+n+1}} + \frac{a_2}{10^{m+n+2}} + \cdots + \frac{a_n}{10^{m+2n}} \\
&\quad + \frac{a_1}{10^{m+2n+1}} + \frac{a_2}{10^{m+2n+2}} + \cdots + \frac{a_n}{10^{m+3n}} \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + \frac{a_1}{10^{m+(k-1)n+1}} + \frac{a_2}{10^{m+(k-1)n+2}} + \cdots + \frac{a_n}{10^{m+kn}} + \cdots
\end{aligned}
$$

Demonstração ($\Leftarrow$)

$$
\begin{aligned}
x \quad = \quad & \frac{\overbrace{b_1.10^{m-1} + b_2.10^{m-2} + \cdots + b_m}^{b}}{10^m} \\
& + \frac{\overbrace{a_1.10^{n-1} + a_2.10^{n-2} + \cdots + a_n}^{a}}{10^{m+n}} \\
& + \frac{\overbrace{a_1.10^{n-1} + a_2.10^{n-2} + \cdots + a_n}^{a}}{10^{m+2n}} \\
& \quad \vdots \\
& + \frac{\overbrace{a_1.10^{n-1} + a_2.10^{n-2} + \cdots + a_n}^{a}}{10^{m+kn}} + \cdots
\end{aligned}
$$

Demonstração ($\Leftarrow$)

$$\begin{aligned}
x &= \frac{b}{10^m} + \frac{a}{10^{m+n}}\left(1 + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}} + \cdots + \frac{1}{10^{(k-1)n}} + \cdots\right) \\
&= \frac{b}{10^m} + \frac{a}{10^{m+n}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^n}} = \frac{b}{10^m} + \frac{a}{10^{m+n}} \cdot \frac{10^n}{10^n - 1} \\
&= \frac{b}{10^m} + \frac{a}{10^n - 1} \cdot \frac{1}{10^m} = \frac{b\,(10^n - 1) + a}{10^m(10^n - 1)}.
\end{aligned}$$

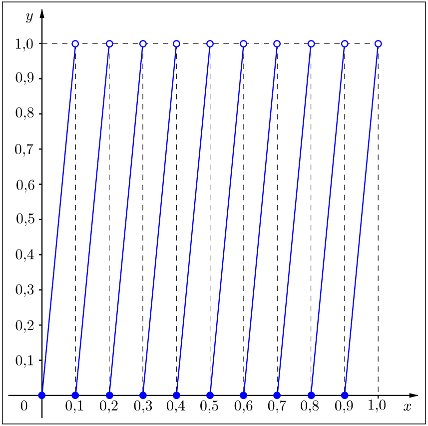
Demonstração ($\Leftarrow$)

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{b}{10^m} + \frac{a}{10^{m+n}}\left(1 + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}} + \cdots + \frac{1}{10^{(k-1)n}} + \cdots\right) \\
&= \frac{b}{10^m} + \frac{a}{10^{m+n}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^n}} = \frac{b}{10^m} + \frac{a}{10^{m+n}} \cdot \frac{10^n}{10^n - 1} \\
&= \frac{b}{10^m} + \frac{a}{10^n - 1} \cdot \frac{1}{10^m} = \frac{b\,(10^n - 1) + a}{10^m(10^n - 1)}.
\end{aligned}
$$

Observe que tanto o numerador quanto o denominador de x são inteiros. Logo, x é um número racional. ∎

Interpretação Geométrica

$$T(x) = \begin{cases} 10x, & \text{se} \quad 0 \leq x < 1/10, \\ 10x - 1, & \text{se} \quad 1/10 \leq x < 2/10, \\ 10x - 2, & \text{se} \quad 2/10 \leq x < 3/10, \\ 10x - 3, & \text{se} \quad 3/10 \leq x < 4/10, \\ 10x - 4, & \text{se} \quad 4/10 \leq x < 5/10, \\ 10x - 5, & \text{se} \quad 5/10 \leq x < 6/10, \\ 10x - 6, & \text{se} \quad 6/10 \leq x < 7/10, \\ 10x - 7, & \text{se} \quad 7/10 \leq x < 8/10, \\ 10x - 8, & \text{se} \quad 8/10 \leq x < 9/10, \\ 10x - 9, & \text{se} \quad 9/10 \leq x < 1. \end{cases}$$



Números Irracionais e Representações Decimais

Dado $a \in [0, 1)$, considere a sequência:

Dado $a \in [0, 1)$, considere a sequência:

$$a_0 = a,$$

Dado $a \in [0, 1)$, considere a sequência:

$$\begin{aligned} a_0 &= a, \\ a_1 &= T(a), \end{aligned}$$

Dado $a \in [0, 1)$, considere a sequência:

$$\begin{aligned}
a_0 &= a, \\
a_1 &= T(a), \\
a_2 &= T^2(a) = (T \circ T)(a) = T(T(a)),
\end{aligned}$$

Dado $a \in [0, 1)$, considere a sequência:

$$\begin{aligned} a_0 &= a, \\ a_1 &= T(a), \\ a_2 &= T^2(a) = (T \circ T)(a) = T(T(a)), \\ a_3 &= T^3(a) = (T \circ T \circ T)(a) = T(T(T(a))), \end{aligned}$$

Dado $a \in [0, 1)$, considere a sequência:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= a, \\
a_1 &= T(a), \\
a_2 &= T^2(a) = (T \circ T)(a) = T(T(a)), \\
a_3 &= T^3(a) = (T \circ T \circ T)(a) = T(T(T(a))), \\
a_4 &= T^4(a) = (T \circ T \circ T \circ T)(a) = T(T(T(T(a)))),
\end{aligned}
$$

Dado $a \in [0,1)$, considere a sequência:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= a, \\
a_1 &= T(a), \\
a_2 &= T^2(a) = (T \circ T)(a) = T(T(a)), \\
a_3 &= T^3(a) = (T \circ T \circ T)(a) = T(T(T(a))), \\
a_4 &= T^4(a) = (T \circ T \circ T \circ T)(a) = T(T(T(T(a)))), \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Dado $a \in [0, 1)$, considere a sequência:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= a, \\
a_1 &= T(a), \\
a_2 &= T^2(a) = (T \circ T)(a) = T(T(a)), \\
a_3 &= T^3(a) = (T \circ T \circ T)(a) = T(T(T(a))), \\
a_4 &= T^4(a) = (T \circ T \circ T \circ T)(a) = T(T(T(T(a)))), \\
&\vdots \\
a_k &= T^k(a) = \underbrace{(T \circ T \circ \cdots \circ T)}_{k-1 \text{ composições}}(a).
\end{aligned}
$$

Dado $a \in [0, 1)$, considere a sequência:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= a, \\
a_1 &= T(a), \\
a_2 &= T^2(a) = (T \circ T)(a) = T(T(a)), \\
a_3 &= T^3(a) = (T \circ T \circ T)(a) = T(T(T(a))), \\
a_4 &= T^4(a) = (T \circ T \circ T \circ T)(a) = T(T(T(T(a)))), \\
&\vdots \\
a_k &= T^k(a) = \underbrace{(T \circ T \circ \cdots \circ T)}_{k-1 \text{ composições}}(a). \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Exemplo:

Exemplo: considere $a = 0{,}\overline{138}$.

Exemplo: considere $a = 0{,}\overline{138}$.

$$a_0 = a = 0{,}\overline{138};$$

Exemplo: considere $a = 0,\overline{138}$.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= a &&= 0,\overline{138};\\
a_1 &= T(a) &&= 0,38\overline{138};
\end{aligned}
$$

Exemplo: considere $a = 0{,}\overline{138}$.

$$\begin{aligned} a_0 &= a &&= 0{,}\overline{138}; \\ a_1 &= T(a) &&= 0{,}38\overline{138}; \\ a_2 &= T^2(a) &&= 0{,}8\overline{138}; \end{aligned}$$

Exemplo: considere $a = 0{,}\overline{138}$.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= a &&= 0{,}\overline{138};\\
a_1 &= T(a) &&= 0{,}38\overline{138};\\
a_2 &= T^2(a) &&= 0{,}8\overline{138};\\
a_3 &= T^3(a) &&= 0{,}\overline{138};
\end{aligned}
$$

Exemplo: considere $a = 0{,}\overline{138}$.

$$
\begin{array}{lclcl}
a_0 & = & a & = & 0{,}\overline{138}; \\
a_1 & = & T(a) & = & 0{,}38\overline{138}; \\
a_2 & = & T^2(a) & = & 0{,}8\overline{138}; \\
a_3 & = & T^3(a) & = & 0{,}\overline{138}; \\
a_4 & = & T^4(a) & = & 0{,}38\overline{138};
\end{array}
$$

Exemplo: considere $a = 0{,}\overline{138}$.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= a &&= 0{,}\overline{138};\\
a_1 &= T(a) &&= 0{,}38\overline{138};\\
a_2 &= T^2(a) &&= 0{,}8\overline{138};\\
a_3 &= T^3(a) &&= 0{,}\overline{138};\\
a_4 &= T^4(a) &&= 0{,}38\overline{138};\\
a_5 &= T^5(a) &&= 0{,}8\overline{138};
\end{aligned}
$$

Exemplo: considere $a = 0,\overline{138}$.

$$\begin{array}{lclcl}
a_0 & = & a & = & 0,\overline{138}; \\
a_1 & = & T(a) & = & 0,38\overline{138}; \\
a_2 & = & T^2(a) & = & 0,8\overline{138}; \\
a_3 & = & T^3(a) & = & 0,\overline{138}; \\
a_4 & = & T^4(a) & = & 0,38\overline{138}; \\
a_5 & = & T^5(a) & = & 0,8\overline{138}; \\
a_6 & = & T^6(a) & = & 0,\overline{138};
\end{array}$$

Exemplo: considere $a = 0{,}\overline{138}$.

$$
\begin{array}{lclcl}
a_0 & = & a & = & 0{,}\overline{138}; \\
a_1 & = & T(a) & = & 0{,}38\overline{138}; \\
a_2 & = & T^2(a) & = & 0{,}8\overline{138}; \\
a_3 & = & T^3(a) & = & 0{,}\overline{138}; \\
a_4 & = & T^4(a) & = & 0{,}38\overline{138}; \\
a_5 & = & T^5(a) & = & 0{,}8\overline{138}; \\
a_6 & = & T^6(a) & = & 0{,}\overline{138}; \\
a_7 & = & T^7(a) & = & 0{,}38\overline{138};
\end{array}
$$

Exemplo: considere $a = 0{,}\overline{138}$.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= a &&= 0{,}\overline{138};\\
a_1 &= T(a) &&= 0{,}38\overline{138};\\
a_2 &= T^2(a) &&= 0{,}8\overline{138};\\
a_3 &= T^3(a) &&= 0{,}\overline{138};\\
a_4 &= T^4(a) &&= 0{,}38\overline{138};\\
a_5 &= T^5(a) &&= 0{,}8\overline{138};\\
a_6 &= T^6(a) &&= 0{,}\overline{138};\\
a_7 &= T^7(a) &&= 0{,}38\overline{138};\\
a_8 &= T^8(a) &&= 0{,}8\overline{138};
\end{aligned}
$$

Exemplo: considere $a = 0{,}\overline{138}$.

$$
\begin{array}{lcll}
a_0 & = & a & = & 0{,}\overline{138}; \\
a_1 & = & T(a) & = & 0{,}38\overline{138}; \\
a_2 & = & T^2(a) & = & 0{,}8\overline{138}; \\
a_3 & = & T^3(a) & = & 0{,}\overline{138}; \\
a_4 & = & T^4(a) & = & 0{,}38\overline{138}; \\
a_5 & = & T^5(a) & = & 0{,}8\overline{138}; \\
a_6 & = & T^6(a) & = & 0{,}\overline{138}; \\
a_7 & = & T^7(a) & = & 0{,}38\overline{138}; \\
a_8 & = & T^8(a) & = & 0{,}8\overline{138}; \\
 & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

Números Irracionais e Representações Decimais

Exemplo: considere $a = 0{,}\overline{138}$.

$$\begin{array}{lclcl}
a_0 & = & a & = & 0{,}\overline{138}; \\
a_1 & = & T(a) & = & 0{,}38\overline{138}; \\
a_2 & = & T^2(a) & = & 0{,}8\overline{138}; \\
a_3 & = & T^3(a) & = & 0{,}\overline{138}; \\
a_4 & = & T^4(a) & = & 0{,}38\overline{138}; \\
a_5 & = & T^5(a) & = & 0{,}8\overline{138}; \\
a_6 & = & T^6(a) & = & 0{,}\overline{138}; \\
a_7 & = & T^7(a) & = & 0{,}38\overline{138}; \\
a_8 & = & T^8(a) & = & 0{,}8\overline{138}; \\
 & \vdots & & \vdots & \\
a_{3k} & = & T^{3k}(a) & = & 0{,}\overline{138};
\end{array}$$

Exemplo: considere $a = 0{,}\overline{138}$.

$$
\begin{array}{lclcl}
a_0 & = & a & = & 0{,}\overline{138}; \\
a_1 & = & T(a) & = & 0{,}38\overline{138}; \\
a_2 & = & T^2(a) & = & 0{,}8\overline{138}; \\
a_3 & = & T^3(a) & = & 0{,}\overline{138}; \\
a_4 & = & T^4(a) & = & 0{,}38\overline{138}; \\
a_5 & = & T^5(a) & = & 0{,}8\overline{138}; \\
a_6 & = & T^6(a) & = & 0{,}\overline{138}; \\
a_7 & = & T^7(a) & = & 0{,}38\overline{138}; \\
a_8 & = & T^8(a) & = & 0{,}8\overline{138}; \\
 & \vdots & & \vdots & \\
a_{3k} & = & T^{3k}(a) & = & 0{,}\overline{138}; \\
a_{3k+1} & = & T^{3k+1}(a) & = & 0{,}38\overline{138};
\end{array}
$$

Exemplo: considere $a = 0,\overline{138}$.

$$
\begin{array}{lcl cl}
a_0 & = & a & = & 0,\overline{138}; \\
a_1 & = & T(a) & = & 0,38\overline{138}; \\
a_2 & = & T^2(a) & = & 0,8\overline{138}; \\
a_3 & = & T^3(a) & = & 0,\overline{138}; \\
a_4 & = & T^4(a) & = & 0,38\overline{138}; \\
a_5 & = & T^5(a) & = & 0,8\overline{138}; \\
a_6 & = & T^6(a) & = & 0,\overline{138}; \\
a_7 & = & T^7(a) & = & 0,38\overline{138}; \\
a_8 & = & T^8(a) & = & 0,8\overline{138}; \\
 & \vdots & & \vdots & \\
a_{3k} & = & T^{3k}(a) & = & 0,\overline{138}; \\
a_{3k+1} & = & T^{3k+1}(a) & = & 0,38\overline{138}; \\
a_{3k+2} & = & T^{3k+2}(a) & = & 0,8\overline{138}. \\
 & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

- Observe que o conjunto $\{T^k(a) \mid k \in \mathbb{N}\}$ é finito, uma vez que possui apenas três elementos: $0{,}\overline{138}$; $0{,}38\overline{138}$ e $0{,}8\overline{138}$.

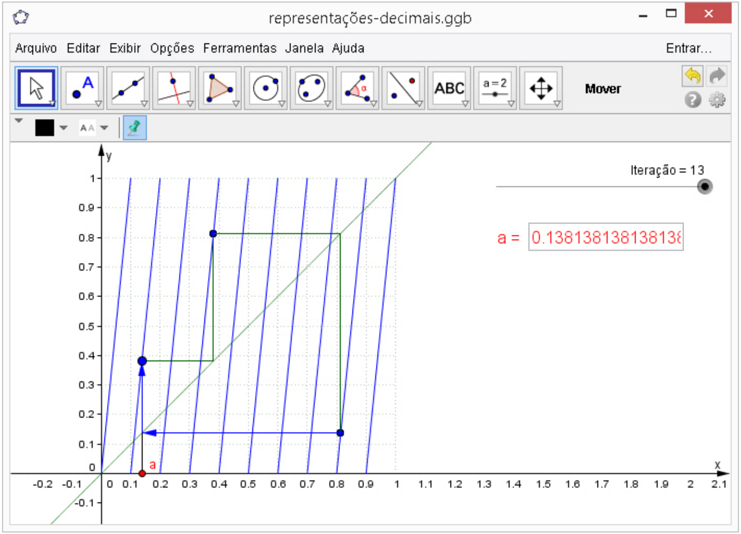
- Observe que o conjunto $\{T^k(a) \mid k \in \mathbb{N}\}$ é finito, uma vez que possui apenas três elementos: $0{,}\overline{138}$; $0{,}38\overline{138}$ e $0{,}8\overline{138}$.

- Uma forma de representar graficamente a sequência (a_n) é marcar os pares ordenados do tipo

$$(a_k, a_{k+1}) = (T^k(a), T^{k+1}(a))$$

no plano cartesiano. Assim, na Iteração 1 por exemplo, começamos pelo ponto

$$(a_0, a_1) = (a, T(a)) = (0{,}\overline{138}; 0{,}38\overline{138}).$$


representações-decimais.ggb
Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda
Entrar...
Mover
Iteração = 13
a = 0.13813813813813
a

Exemplo:

Exemplo: considere $a = \sqrt{2}/10 = 0{,}1414213562\ldots \in [0, 1)$.

Exemplo: considere $a = \sqrt{2}/10 = 0{,}1414213562\ldots \in [0, 1)$.

$$a_0 \quad = \quad a \qquad\qquad = \quad 0{,}1414213562\ldots;$$

Exemplo: considere $a = \sqrt{2}/10 = 0{,}1414213562\ldots \in [0,1)$.

$$\begin{aligned} a_0 &= a &&= 0{,}1414213562\ldots; \\ a_1 &= T(a) &&= 0,414213562\ldots; \end{aligned}$$

Exemplo: considere $a = \sqrt{2}/10 = 0{,}1414213562\ldots \in [0, 1)$.

$$\begin{array}{lllll} a_0 & = & a & = & 0{,}1414213562\ldots; \\ a_1 & = & T(a) & = & 0, 414213562\ldots; \\ a_2 & = & T^2(a) & = & 0, 14213562\ldots; \end{array}$$

Exemplo: considere $a = \sqrt{2}/10 = 0{,}1414213562\ldots \in [0, 1)$.

$$\begin{array}{lllll} a_0 & = & a & = & 0{,}1414213562\ldots; \\ a_1 & = & T(a) & = & 0, 414213562\ldots; \\ a_2 & = & T^2(a) & = & 0, 14213562\ldots; \\ a_3 & = & T^3(a) & = & 0, 4213562\ldots; \end{array}$$

Exemplo: considere $a = \sqrt{2}/10 = 0{,}1414213562\ldots \in [0,1)$.

$$
\begin{array}{lclcl}
a_0 & = & a & = & 0{,}1414213562\ldots; \\
a_1 & = & T(a) & = & 0,414213562\ldots; \\
a_2 & = & T^2(a) & = & 0,14213562\ldots; \\
a_3 & = & T^3(a) & = & 0,4213562\ldots; \\
a_4 & = & T^4(a) & = & 0,213562\ldots;
\end{array}
$$

Números Irracionais e Representações Decimais

Exemplo: considere $a = \sqrt{2}/10 = 0{,}1414213562\ldots \in [0,1)$.

$$\begin{aligned}
a_0 &= a &&= 0{,}1414213562\ldots;\\
a_1 &= T(a) &&= 0,414213562\ldots;\\
a_2 &= T^2(a) &&= 0,14213562\ldots;\\
a_3 &= T^3(a) &&= 0,4213562\ldots;\\
a_4 &= T^4(a) &&= 0,213562\ldots;\\
a_5 &= T^5(a) &&= 0,13562\ldots;
\end{aligned}$$

Exemplo: considere $a = \sqrt{2}/10 = 0{,}1414213562\ldots \in [0,1)$.

$$
\begin{array}{lllll}
a_0 & = & a & = & 0{,}1414213562\ldots; \\
a_1 & = & T(a) & = & 0,414213562\ldots; \\
a_2 & = & T^2(a) & = & 0,14213562\ldots; \\
a_3 & = & T^3(a) & = & 0,4213562\ldots; \\
a_4 & = & T^4(a) & = & 0,213562\ldots; \\
a_5 & = & T^5(a) & = & 0,13562\ldots; \\
a_6 & = & T^6(a) & = & 0,3562\ldots;
\end{array}
$$

Exemplo: considere $a = \sqrt{2}/10 = 0{,}1414213562\ldots \in [0,1)$.

$$
\begin{array}{lclcl}
a_0 & = & a & = & 0{,}1414213562\ldots; \\
a_1 & = & T(a) & = & 0,414213562\ldots; \\
a_2 & = & T^2(a) & = & 0,14213562\ldots; \\
a_3 & = & T^3(a) & = & 0,4213562\ldots; \\
a_4 & = & T^4(a) & = & 0,213562\ldots; \\
a_5 & = & T^5(a) & = & 0,13562\ldots; \\
a_6 & = & T^6(a) & = & 0,3562\ldots; \\
a_7 & = & T^7(a) & = & 0,562\ldots;
\end{array}
$$

Exemplo: considere $a = \sqrt{2}/10 = 0{,}1414213562\ldots \in [0,1)$.

$$
\begin{array}{lclcl}
a_0 & = & a & = & 0{,}1414213562\ldots; \\
a_1 & = & T(a) & = & 0,414213562\ldots; \\
a_2 & = & T^2(a) & = & 0,14213562\ldots; \\
a_3 & = & T^3(a) & = & 0,4213562\ldots; \\
a_4 & = & T^4(a) & = & 0,213562\ldots; \\
a_5 & = & T^5(a) & = & 0,13562\ldots; \\
a_6 & = & T^6(a) & = & 0,3562\ldots; \\
a_7 & = & T^7(a) & = & 0,562\ldots; \\
a_8 & = & T^7(a) & = & 0,62\ldots; \\
 & \vdots & & &
\end{array}
$$

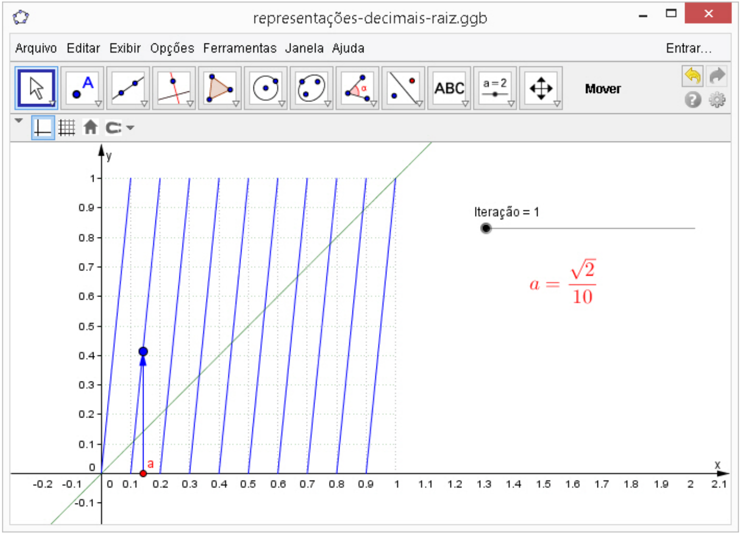
Exemplo: considere $a = \sqrt{2}/10 = 0{,}1414213562\ldots \in [0, 1)$.

$$
\begin{array}{rcl}
a_0 & = & a & = & 0{,}1414213562\ldots; \\
a_1 & = & T(a) & = & 0,414213562\ldots; \\
a_2 & = & T^2(a) & = & 0,14213562\ldots; \\
a_3 & = & T^3(a) & = & 0,4213562\ldots; \\
a_4 & = & T^4(a) & = & 0,213562\ldots; \\
a_5 & = & T^5(a) & = & 0,13562\ldots; \\
a_6 & = & T^6(a) & = & 0,3562\ldots; \\
a_7 & = & T^7(a) & = & 0,562\ldots; \\
a_8 & = & T^7(a) & = & 0,62\ldots; \\
 & \vdots & & & \\
a_k & = & T^k(a); & & \\
 & \vdots & & &
\end{array}
$$

Exemplo: considere $a = \sqrt{2}/10 = 0{,}1414213562\ldots \in [0,1)$.

$$
\begin{array}{lclcl}
a_0 & = & a & = & 0{,}1414213562\ldots; \\
a_1 & = & T(a) & = & 0,414213562\ldots; \\
a_2 & = & T^2(a) & = & 0,14213562\ldots; \\
a_3 & = & T^3(a) & = & 0,4213562\ldots; \\
a_4 & = & T^4(a) & = & 0,213562\ldots; \\
a_5 & = & T^5(a) & = & 0,13562\ldots; \\
a_6 & = & T^6(a) & = & 0,3562\ldots; \\
a_7 & = & T^7(a) & = & 0,562\ldots; \\
a_8 & = & T^7(a) & = & 0,62\ldots; \\
 & \vdots & & & \\
a_k & = & T^k(a); & & \\
 & \vdots & & &
\end{array}
$$

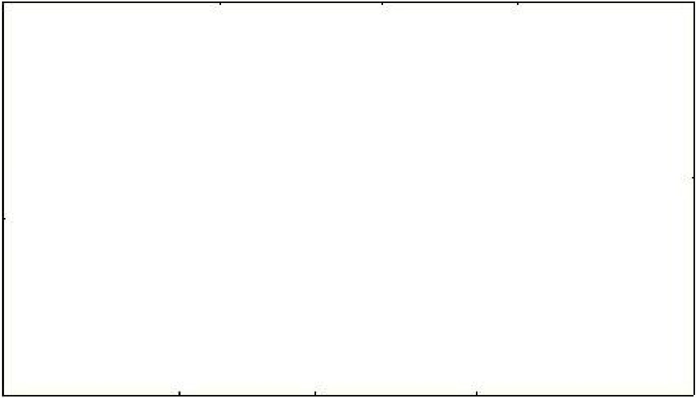
Observe que o conjunto $\{T^k(a) \mid k \in \mathbb{N}\}$ é infinito.


representações-decimais-raiz.ggb
Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda
Entrar...
Mover
Iteração = 1
$a = \frac{\sqrt{2}}{10}$
a
x
y

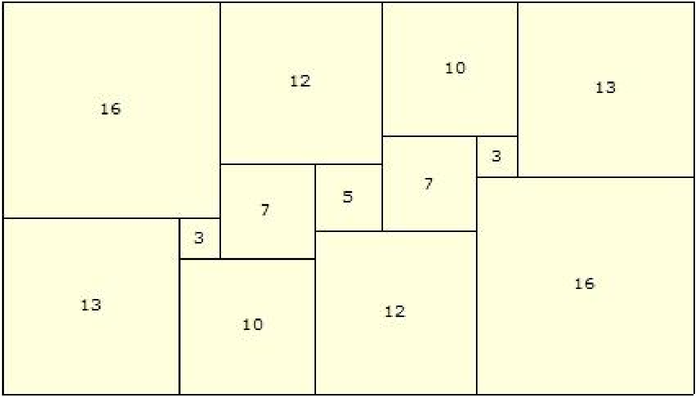
Números Irracionais e Dissecções

Números irracionais e dissecções

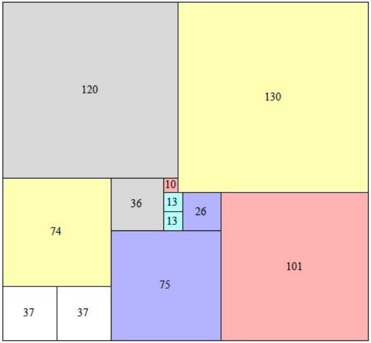
É sempre possível decompor um retângulo em quadrados?



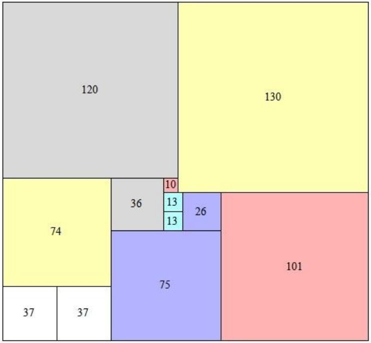
É sempre possível decompor um retângulo em quadrados?

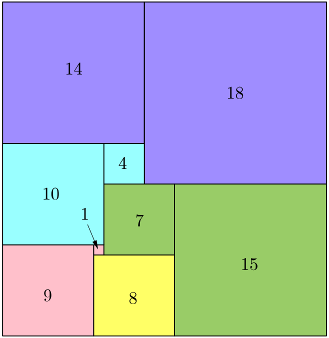


Números irracionais e dissecções



Números irracionais e dissecções

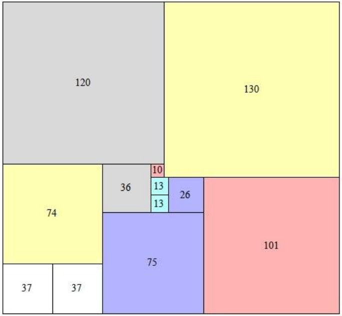




Retângulo perfeito de Zbigniew Morón

Teorema:
um retângulo pode ser decomposto em quadrados
$$\Updownarrow$$
a razão das medidas dos seus lados é um número racional

Demonstração: *Proofs from the Book* de M. Aigner e G. M. Ziegler, p. 173-177, 2010.



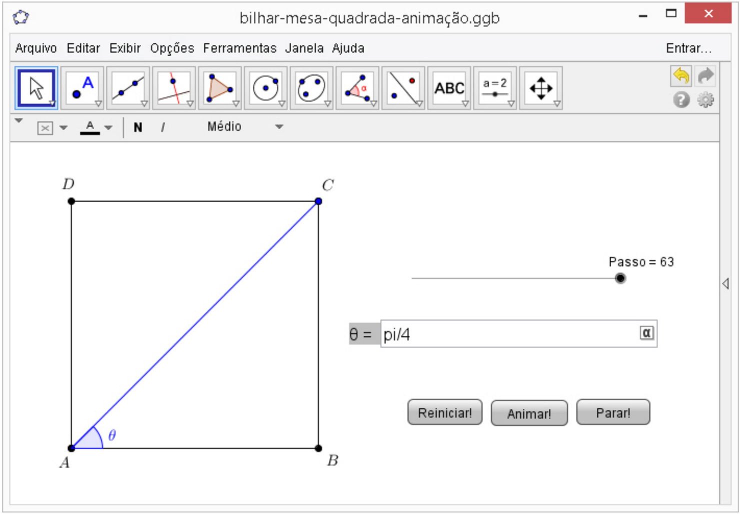
OBMEP 2005 Respostas sem justificativa não serão consideradas.

QUESTÃO 6

Capitu cortou uma folha de papel retangular em 9 pedaços quadrados de lados 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 e 18 centímetros cada um.

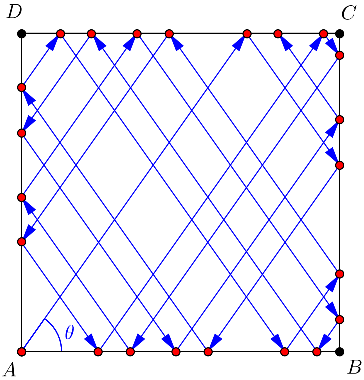
A) Qual era a área da folha antes de ser cortada?
B) Quais eram as dimensões da folha antes de ser cortada?
C) Capitu precisa montar a folha de novo. Ajude-a mostrando, com um desenho, como fazer esta montagem.

Números Irracionais e Bilhares



<http://geogebratube.org/student/m47807?mobile=false>

Para que valores de θ a bola irá encaçapar?

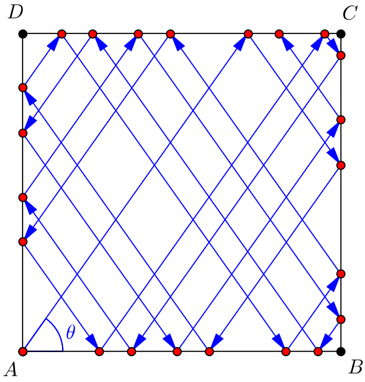


Para que valores de θ a bola irá encaçapar?

Teorema:

a bola irá encaçapar se, e somente se, $\text{tg}(\theta)$ é racional.

Demonstração: Bilhares de Inteiros de António Saraiva, SPM, v. 47, p. 1-31, 2007.



Conhece alguma aplicação interessante
dos números irracionais acessível ao Ensino Básico?
Entre em contato conosco!

Graziele S. Mózer – gramozer@gmail.com

Humberto J. Bortolossi – hjbortol@vm.uff.br

OBRIGADA!