Sistemas Dinâmicos em dimensão um

IMPA-Rio de Janeiro

4 de Novembro de 2014

Artur Avila, Marco Martens e Welington de Melo

- Dinâmica Unidimensional real e complexa
- Fluxo de Teichmuller, transformações de intercâmbio de intervalos, bilhares poligonais.
- Teoria Espectral dos operadores de Schrodinger
- Sistemas Dinâmicos conservativos.

Go to my frame

- Dinâmica Unidimensional real e complexa
- Fluxo de Teichmuller, transformações de intercâmbio de intervalos, bilhares poligonais.
- Teoria Espectral dos operadores de Schrodinger
- Sistemas Dinâmicos conservativos.

Go to my frame

- Dinâmica Unidimensional real e complexa
- Fluxo de Teichmuller, transformações de intercâmbio de intervalos, bilhares poligonais.
- Teoria Espectral dos operadores de Schrodinger
- Sistemas Dinâmicos conservativos.

Go to my frame

- Dinâmica Unidimensional real e complexa
- Fluxo de Teichmuller, transformações de intercâmbio de intervalos, bilhares poligonais.
- Teoria Espectral dos operadores de Schrodinger
- Sistemas Dinâmicos conservativos.

Go to my frame

Sistemas Dinâmicos

- Modelar fenômenos evolutivos e deterministicos.
- **Espaço de fase**: Um conjunto X tal que um ponto de X descreve completamente a condição do sistema.
- A **lei de evolução**: uma função $f : X \to X$ que descreve a evolução do sistema. Se no instante inicial o sistema estava descrito por $x_0 \in X$ no instante 1 está descrito pelo ponto $x_1 = f(x_0)$.
- Objetivo: descrever $x_n = f(x_{n-1})$ quando $n \to \infty$ para quase toda condição inicial x_0 e para quase toda lei de evolução f.

Sistemas Dinâmicos

- Modelar fenômenos evolutivos e deterministicos.
- **Espaço de fase**: Um conjunto X tal que um ponto de X descreve completamente a condição do sistema.
- A **lei de evolução**: uma função $f : X \to X$ que descreve a evolução do sistema. Se no instante inicial o sistema estava descrito por $x_0 \in X$ no instante 1 está descrito pelo ponto $x_1 = f(x_0)$.
- Objetivo: descrever $x_n = f(x_{n-1})$ quando $n \to \infty$ para quase toda condição inicial x_0 e para quase toda lei de evolução f.

Sistemas Dinâmicos

- Modelar fenômenos evolutivos e deterministicos.
- **Espaço de fase**: Um conjunto X tal que um ponto de X descreve completamente a condição do sistema.
- A **lei de evolução**: uma função $f : X \to X$ que descreve a evolução do sistema. Se no instante inicial o sistema estava descrito por $x_0 \in X$ no instante 1 está descrito pelo ponto $x_1 = f(x_0)$.
- Objetivo: descrever $x_n = f(x_{n-1})$ quando $n \to \infty$ para quase toda condição inicial x_0 e para quase toda lei de evolução f.

Sistemas Dinâmicos

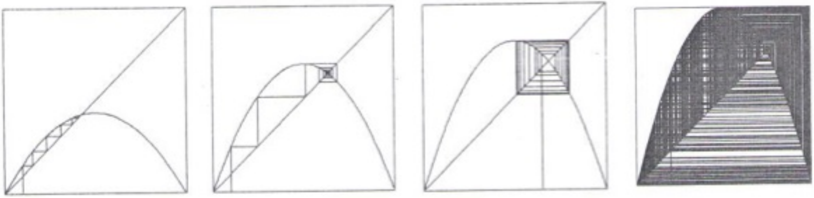
- Modelar fenômenos evolutivos e deterministicos.
- **Espaço de fase**: Um conjunto X tal que um ponto de X descreve completamente a condição do sistema.
- A **lei de evolução**: uma função $f : X \to X$ que descreve a evolução do sistema. Se no instante inicial o sistema estava descrito por $x_0 \in X$ no instante 1 está descrito pelo ponto $x_1 = f(x_0)$.
- Objetivo: descrever $x_n = f(x_{n-1})$ quando $n \to \infty$ para quase toda condição inicial x_0 e para quase toda lei de evolução f.

Dinâmica Unidimensional

- $f : [0,1] \to [0,1]$ função diferenciável.
- $f(x_0) = x_0$ e $|f'(x_0)| < 1 \implies x_0$ é ponto fixo atrator: $f^n(x) \to x_0$ para todo x próximo a x_0.
- $f(x_0) = x_0$ e $|f'(x_0)| > 1 \implies x_0$ é ponto fixo repulsor: a órbita de todo ponto $x \neq x_0$ próximo de x_0 escapa de uma vizinhança de x_0.
- $f'(x_0) = \pm 1$: bifurcação, a dinâmica local muda com pequenas perturbações de f.

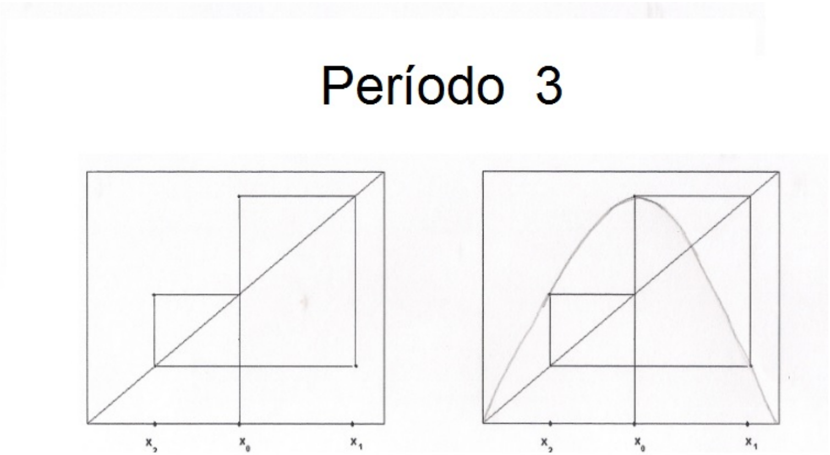
A família quadrática

$$f_a(x) = ax(1-x)$$



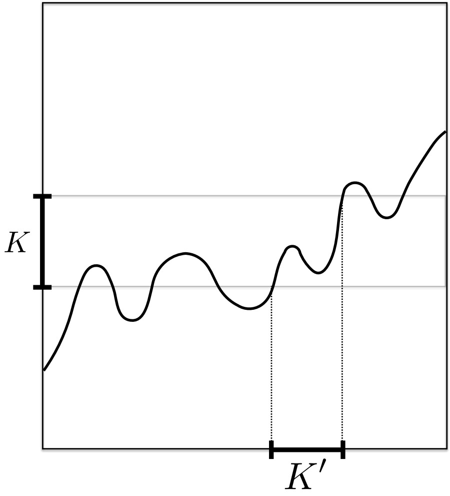
a=1.45 a=2.75 a=3.2 a= 4

período 3 $\Longrightarrow$ caos?



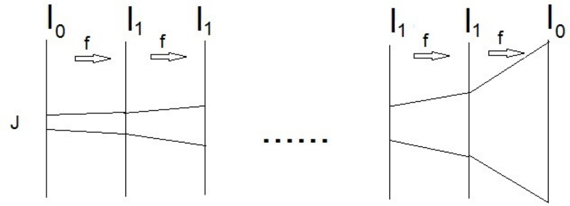
- Suponhamos $x_2 < x_0 < x_1$
- $I_0 = [x_2, x_0]$, $I_1 = [x_0, x_1]$
- Então $f(I_0) \supset I_1$ e
- $f(I_1) \supset I_0 \cup I_1$

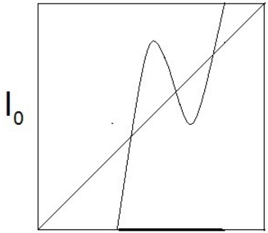
Um Lema elementar



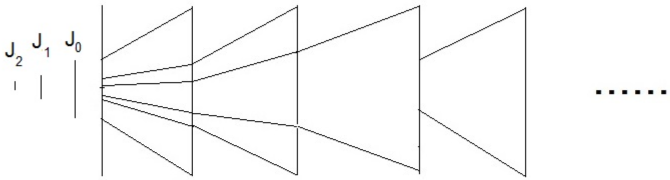
$$f(I) \supset K$$
$$\Downarrow$$
$$\exists K' \subset I \text{ t.q.}$$
$$f(K') = K$$

períod 3 $\Longrightarrow$ qualquer período





período 3 $\Longrightarrow$ qualquer itinerário $\Longrightarrow$ órbita cujo fecho não contém pontos periódicos $\Longrightarrow$ órbita recorrente não periódica.



Sensibilidade com respeito a condições iniciais.

- pequenas perturbações das condições iniciais são ampliadas exponencialmente com a iteração.
- caos: a sensibilidade ocorre em um conjunto grande de condições iniciais (medida de Lebesgue positiva).

Teoria da Medida

- $\mathcal{C}$ família de subconjuntos de [0,1] com as propriedades:
  1. $\mathcal{C}$ contém todos os intervalos;
  2. se $A \in \mathcal{C}$ então o complementar de A pertence a $\mathcal{C}$;
  3. Se A_i, $i = 1.2....$ pertencem a $\mathcal{C}$ então a união $\cup_i A_i$ pertence a $\mathcal{C}$.
- Uma medida de probabilidade é uma função $\mu\colon \mathcal{C} \to [0,1]$ tal que $\mu(\cup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i)$ se os A_i são dois a dois disjuntos
- A medida de Lebesgue é a medida m em $\mathcal{C}$ que associa a cada intervalo o seu comprimento.

Outras medidas

- Medidas atômicas: $C \subset [0,1]$ conjuto k pontos,. $\mu(A) = \frac{1}{k} \times$ número de pontos em$A \cap C$.
- Medida absolutamente contínua (com respeito a Lebesgue): $\mu(A) = 0$ sempre que $m(A) = 0$.

$$\Downarrow$$

$$\mu(A) = \int_A d(x)dx,$$

$d(x) \geq 0$.

período 3 $\not\Rightarrow$ caos

- $f_a(x) = ax(1-x)$ com atrator periódico de período 3;
- B bacia de atração do atrator periódico;
- fato: o complementar de B tem medida de Lebesgue zero;
- μ medida atômica com massa $1/3$ em cada ponto do atrator periódico então

$$\frac{1}{n}\#\{f^j(x) \in A; j \leq n\} \to \mu(A)$$

para todo $x \in B$.

Dinâmica estocástica

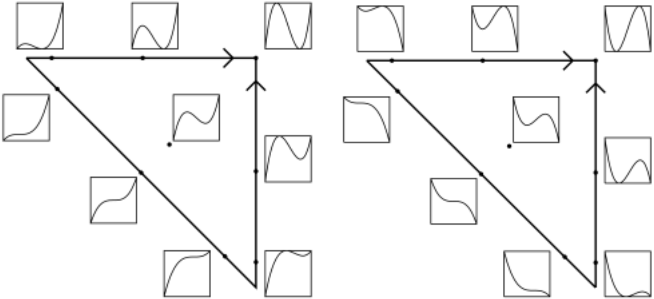
- $f : [0,1] \to [0,1]$ exibe sensibilidade com relação a condições iniciais.
- exite uma medida de probabilidade μ absolutamente contínua com respeito a Lebesgue tal que
$$\frac{1}{n}\#\{f^j(x) \in A; 0 \leq j \leq n\} \to \mu(A)$$
para quase toda condição inicial x.
- Jakobson (1981): o conjunto dos parâmetros $a \in (0,4]$ tal que f_a é estocástico tem medida de Lebesgue positiva.

Theorem (Avila-de Melo-Lyubich+ Avila-Moreira,)

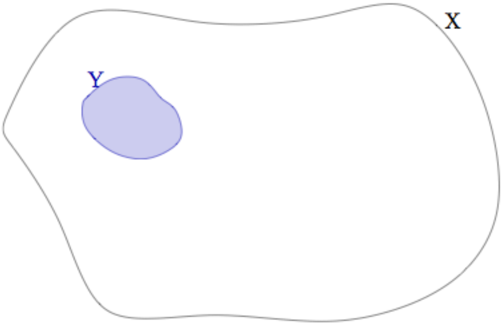
Em uma família típica de transformações unimodais, o conjunto dos parâmetros para os quais a dinâmica é ou regular ou estocástica tem medida de Lebesgue total no espaço de parâmetros

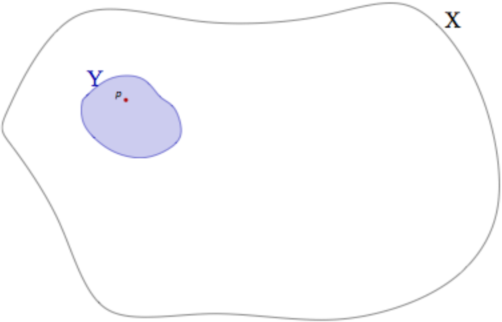
Observação: o complementar dos regulares+ estocásticos tem medida de Hausdorff positiva.

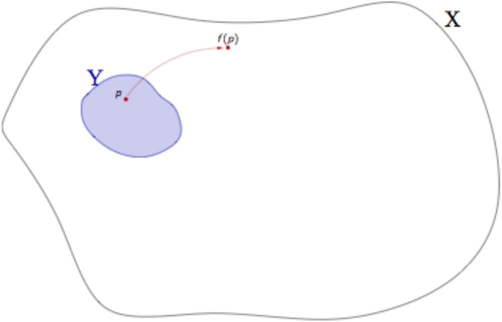
Problema aberto: estender teorema anterior para famílias típicas a dois parâmetros de transformações bimodais, mais geralmente, para famílias típicas a k parâmetros de transformações com k pontos críticos.

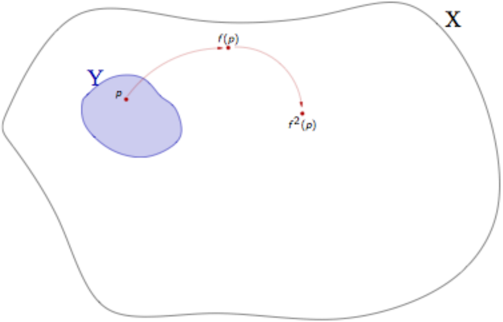


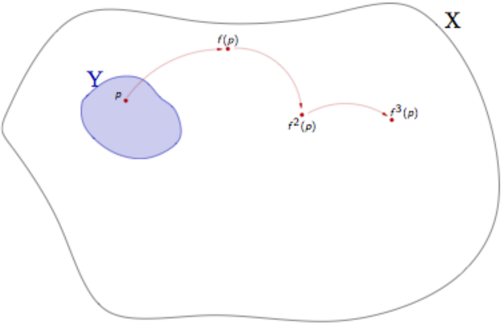
Renormalização : dinâmica no espaço dos sistemas dinâmicos.

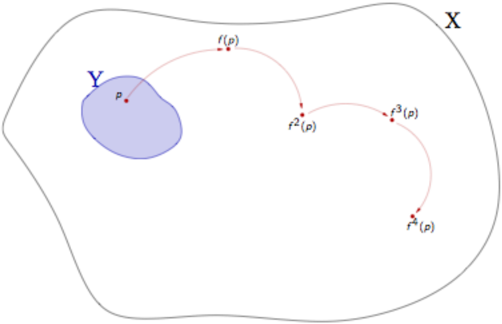


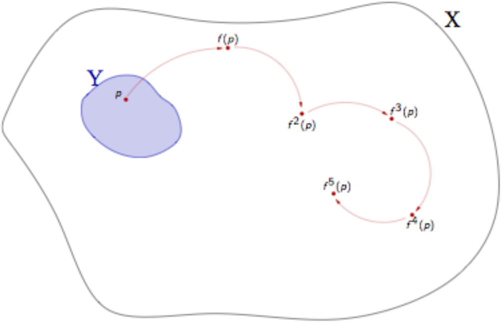

X
Y
p

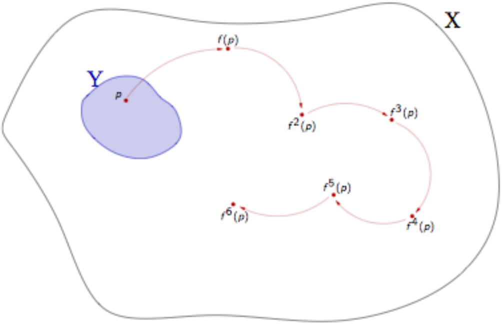

X
f(p)
Y
p

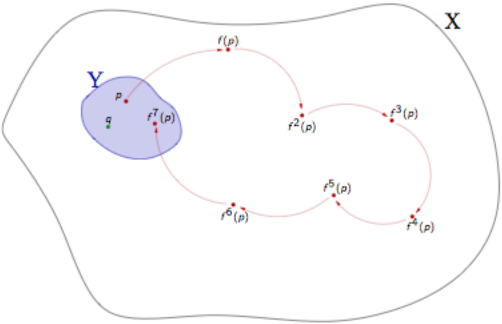

X
f(p)
Y
p
f2(p)

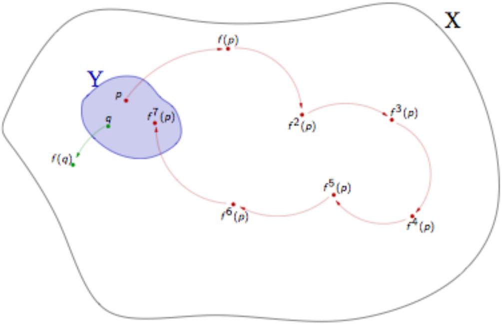

X
Y
p
f(p)
f2(p)
f3(p)

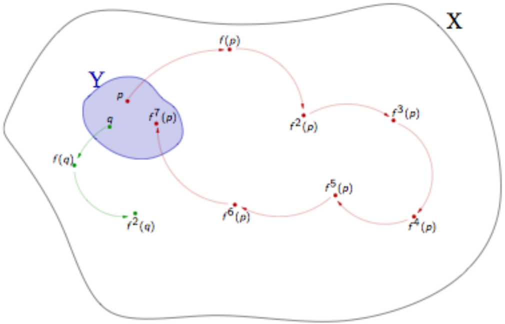

X
Y
p
f(p)
f2(p)
f3(p)
f4(p)

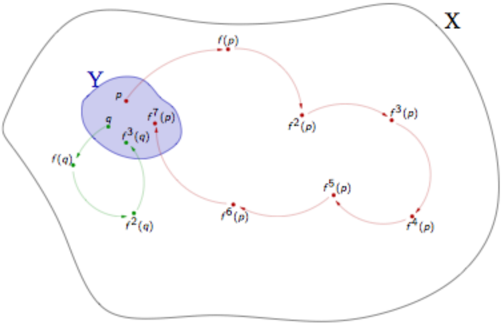

X
Y
p
f(p)
f^2(p)
f^3(p)
f^4(p)
f^5(p)

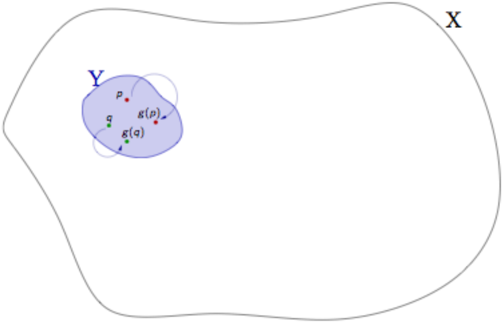

X
Y
p
f(p)
f2(p)
f3(p)
f4(p)
f5(p)
f6(p)

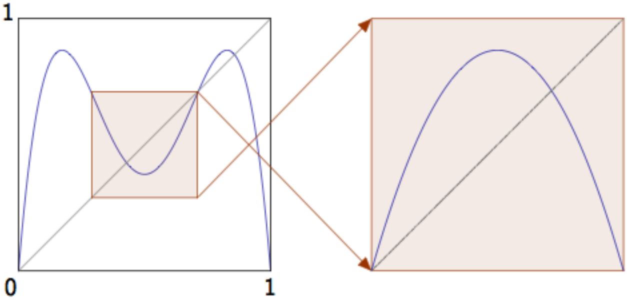

X
Y
p
q
$f(p)$
$f^2(p)$
$f^3(p)$
$f^4(p)$
$f^5(p)$
$f^6(p)$
$f^7(p)$

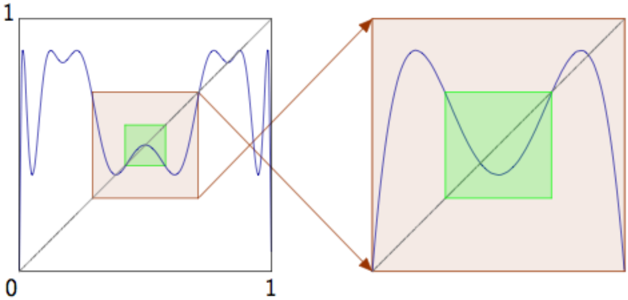

X
Y
p
q
f(p)
$f^2(p)$
$f^3(p)$
$f^4(p)$
$f^5(p)$
$f^6(p)$
$f^7(p)$
f(q)


X
Y
p
q
f(p)
$f^2(p)$
$f^3(p)$
$f^4(p)$
$f^5(p)$
$f^6(p)$
$f^7(p)$
f(q)
$f^2(q)$

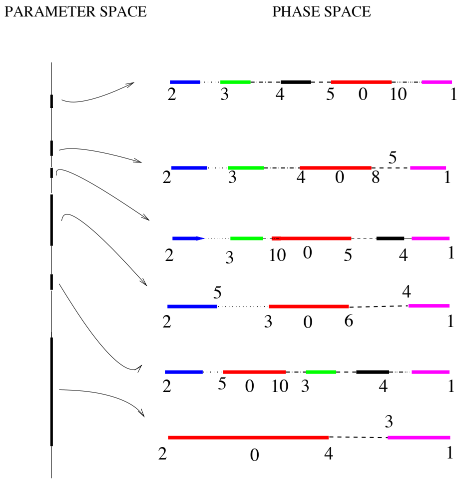

X
Y
p
q
$f(p)$
$f^2(p)$
$f^3(p)$
$f^4(p)$
$f^5(p)$
$f^6(p)$
$f^7(p)$
$f(q)$
$f^2(q)$
$f^3(q)$


X
Y
p
q
g(p)
g(q)


1
0
1

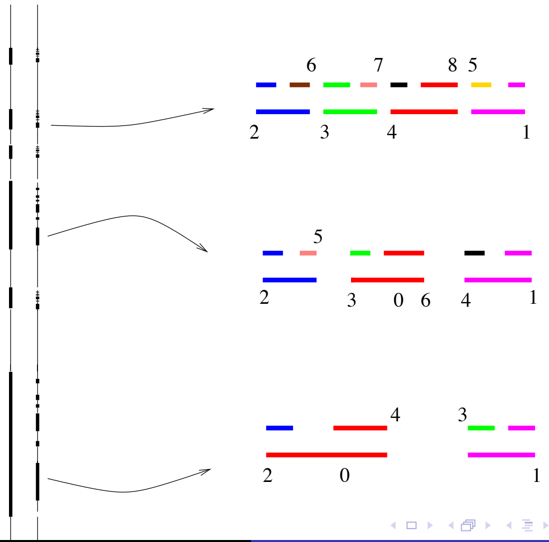

1
0
1

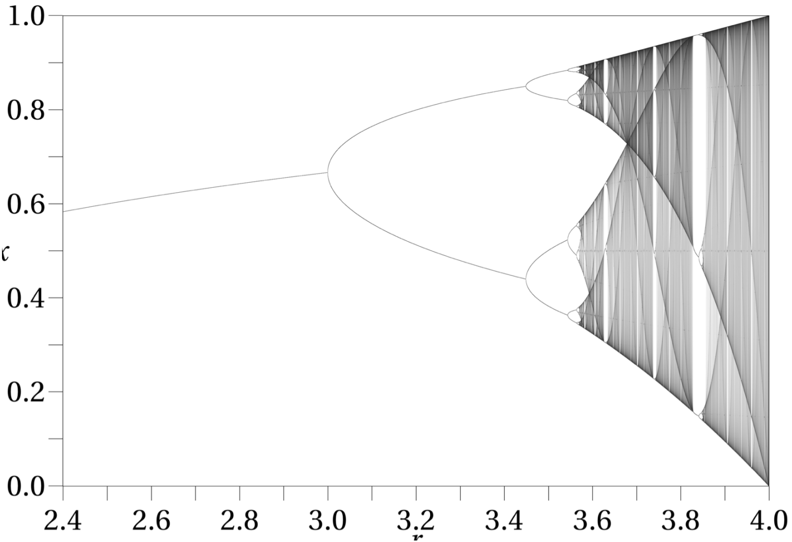
Milnor-Thurston



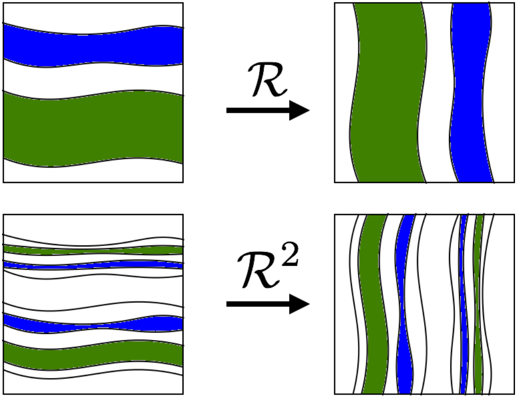
PARAMETER SPACE

PHASE SPACE



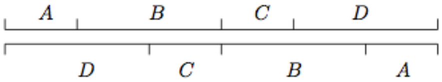

1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
2.4
2.6
2.8
3.0
3.2
3.4
3.6
3.8
4.0

Dinâmica do operador de renormalização: Horse Shoe



Transformações de intercâmbio de intervalos

- $f : [0, 1] \to [0, 1]$ bijeção com d pontos de descontinuidade cuja restrição a cada um dos d intervalos é uma translação.
- $f = f(\sigma, \lambda)$, σ permutação dos d intervalos, $\lambda \in \mathbb{R}^d_+$ vetor dos comprimentos dos intervalos.
- Espaço de dimensão finita de sistemas dinâmicos.



Operadores de Schr"odinger quasi-periódicos

- Espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = \{u = (u_n); n \in \mathbb{Z}, u_n \in \mathbb{C}, \sum_n |u_n|^2| < \infty\}$$

- Potencial:

$$V : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$$

- O operador:

$$(H(u))_n = u_{n+1} + u_{n-1} + V(n\alpha)u_n$$

α irracional.

- Operador "almost Mathieu"

$$(Hu)_n = u_{n+1} + u_{n-1} + 2\lambda\cos(2\pi[\theta + n\alpha])u_n$$

Teoria Espectral

- Espectro de um operador $H\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$
  $\sigma(H) = \{\lambda \in \mathbb{C}; H - \lambda I$ real nao tem inversa contínua $\}$
- H auto-adjunto $\Rightarrow \sigma(H) \subset \mathbb{R}$.
- medidas espectrais: a cada $h\mathcal{H}$ está associado uma medida μ_h no espectro de H tal que $< h, f(H)h >= \int_{\sigma(H)} fd\mu_h$.

- medidas espectrais absolutamente continuas: partícula quântica se movimenta livremente como os elétrons em um metal.
- medidas espectrais discretas: estado ligado como um elétron em um material isolante.
- medidas espectrais contínuas singulares: sem interpretação física.

Theorem (Avila)

Em uma família típica a um parâmetro de operadores de Schrodinger, para todo valor do parâmetro ou as medidas espectrais são todas absolutamente contínuas ou são todas discretas.

OBRIGADO