

Sobre Controle e Estabilização de Sistemas Distribuídos.

Marcelo Cavalcanti
UEM - DMA

VII BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE
MATEMÁTICA - UFAL

- Introdução.

Plano

- Introdução.
- Conjectura.

- Introdução.
- Conjectura.
- Visão Externa.
- Visão Intrínseca - Um resultado "sharp".

- Introdução.
- Conjectura.
- Visão Externa.
- Visão Intrínseca - Um resultado "sharp".

- Introdução.
- Conjectura.
- Visão Externa.
- Visão Intrínseca - Um resultado "sharp".
- Idéia da Prova.

Introdução

Um grande número de problemas da física-matemática podem ser modelados por equações à derivadas parciais. Por modelos entendemos um conjunto de equações (ou inequações) que juntamente com condições de fronteira e condições iniciais (quando o fenômeno é de evolução), permite-nos descrever o problema físico considerado. Denominamos *sistemas distribuídos* a tal modelagem.

Vivemos em um mundo onde os recursos naturais, embora abundantes, podem vir a ficar escassos se não forem utilizados com prudência e sabedoria. Dentro desta perspectiva, torna-se cada vez mais necessário controlar a energia utilizada para deslocar um “*sistema*” de um estado inicial até um estado final previamente estabelecidos. O gasto excessivo de energia ou o mal controle da mesma, pode levar o planeta ao caos.

O tema da controlabilidade de energia acima mencionado é sabiamente descrito por um dos maiores cientistas contemporâneos, Jacques Louis Lions (1928-2001),



Figure: Jacques Louis Lions .

quando o mesmo diz: “Controlar um sistema é fazê-lo comportar-se de acordo com nossos *desejos* de um modo compatível, com segurança e ética, e com o menor custo possível”.

Permita-nos dar um exemplo simples de dispersão (ou gasto) de energia devido ao atrito entre peças. Consideremos uma corda de violão e duas hastes de metal. Prendamos a corda em uma das hastes e tensionemos a mesma de modo que permitamos que na outra extremidade a corda possa ter pequenos movimentos para cima e para baixo conforme ilustra a figura abaixo:

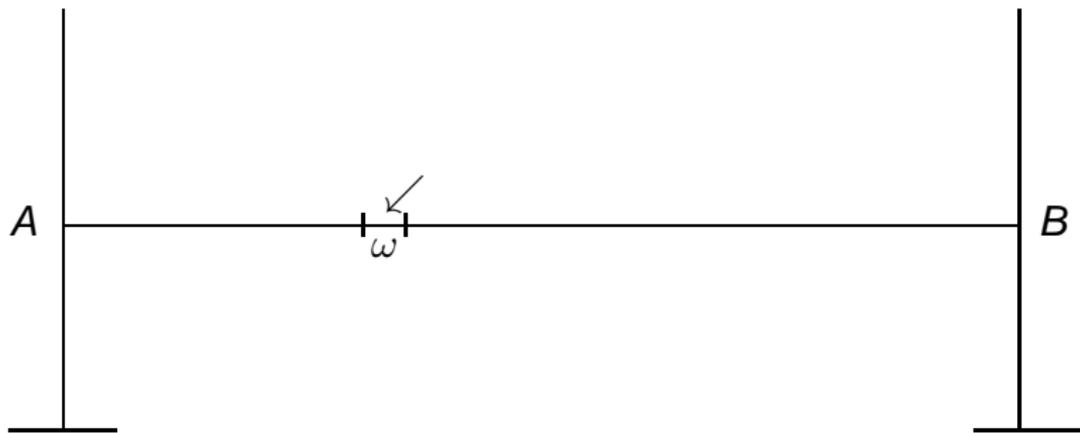


Figure: Corda de violão tensionada. Na extremidade *A* a corda está presa enquanto na extremidade *B* a corda pode se movimentar para cima e para baixo.

Ao provocarmos uma onda sobre a corda, bastando dedilhar suavemente a mesma, o atrito (ou fricção) entre a corda e a haste na parte B provocará um desgaste da energia mecânica (cinética + potencial) do sistema levando a corda ao repouso. A este fenômeno denominamos dissipação de energia pela *fronteira* do sistema.

Vejam os um outro exemplo simples. Suponhamos que agora a corda esteja presa nas duas extremidades. Ao provocar uma onda na mesma, e sob condições ideais, ou seja, desprezando-se o atrito com o ar, a corda vibraria para sempre, o que implicaria na conservação da energia mecânica. Evidentemente isto não ocorre na prática, mas os modelos que envolvem propagação de ondas costumam desprezar o atrito com o ar uma vez que tal atrito, quando comparado a um atrito friccional com a haste ou com outro tipo de material mais resistente, quase não representa desgaste da energia.

Voltemos então a nossa corda presa nas duas hastes e vibrando em função da propagação de onda que criamos. Imagine que desejamos parar esta vibração e para isto devemos atritar com os nossos dedos, por exemplo, em uma porção ω da corda até leva-lá ao repouso, conforme indica a figura abaixo.



Assumindo que levamos o sistema ao repouso após atritarmos um determinado tempo na região ω contida propriamente na corda, aparece um novo fenômeno ao qual chamamos de *dissipação interna* o que difere do caso anterior (figura 1) onde o atrito se deu pela fronteira do sistema. Surge uma pergunta natural: Será que precisamos atritar a corda em toda a sua extensão, o que acarretaria um gasto grande de energia, ou só precisamos atritar a corda em uma porção ω contida propriamente na mesma? Se conseguirmos isto evidentemente teríamos um gasto bem menor de energia. Outra pergunta que surge: se tivermos sucesso em levar a corda ao repouso simplesmente atuando em uma porção ω propriamente contida na mesma, será que está região pode ser escolhida ao acaso? ou deve ser estrategicamente escolhida?

No caso unidimensional a beleza da geometria concernente as perguntas formuladas acima não fica tão evidenciada quando comparada ao caso n -dimensional que passamos a descrever. Para isto considermos o problema de propagação de uma onda em um meio Ω , sujeita a um atrito ou fricção, descrita pela equação:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) = 0 & \text{em } \Omega \times]0, \infty[, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times]0, \infty[, \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u^1(x) & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

onde $u = u(x, t)$, Ω é um domínio limitado de \mathbb{R}^n , ($n \geq 2$) com fronteira $\partial\Omega$ suave. Assumamos que $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, monótona crescente satisfazendo a condição de sinal $g(s)s \geq 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Além disso, admitamos, por simplicidade, que $ks^2 \leq g(s)s \leq Ks^2$, para algum $0 < k < K$ e para todo $|s| > 1$.

Perto da origem, nenhuma condição de crescimento será imposta sobre g . A função $a \in L^\infty$, responsável pelo efeito dissipativo, será considerada não negativa e verificando a condição

$$a(x) \geq a_0 > 0 \text{ em } \omega, \quad (2)$$

onde ω é um subconjunto próprio de Ω . Hoje é bem sabido que quando ω é uma vizinhança de $\partial\Omega$ estrategicamente escolhida, mais precisamente dada por

$$\{x \in \partial\Omega : (x - x_0) \cdot \nu(x) \geq 0\}$$

de acordo com a figura abaixo,

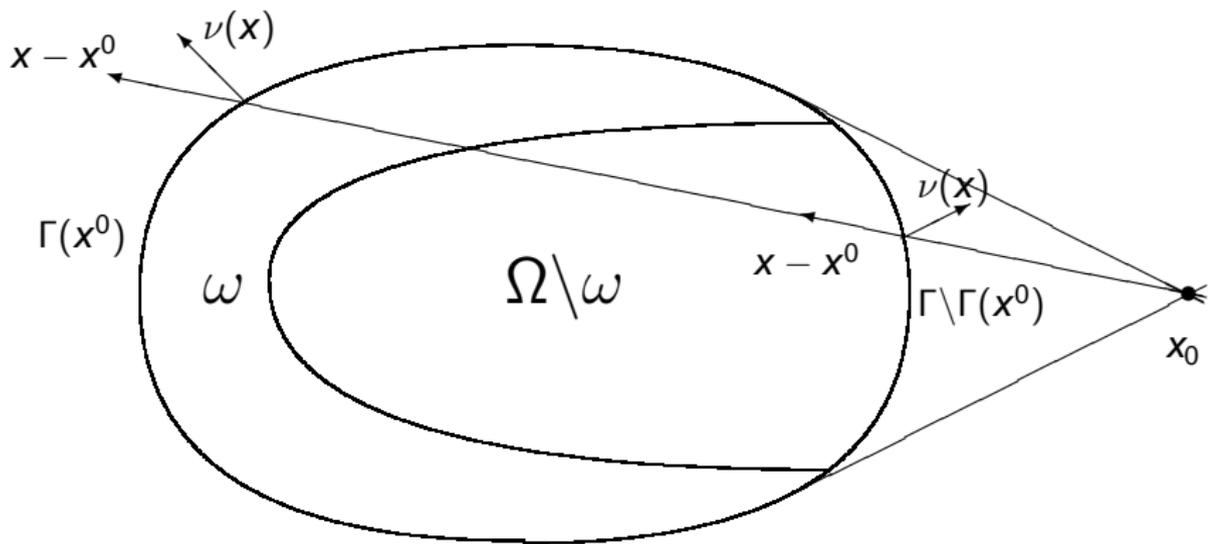


Figure: $\nu(x)$ representa o campo de vetores normais exteriores à fronteira $\partial\Omega$. x_0 é um ponto arbitrário, porém fixado.

então a energia mecânica do sistema $E(t)$ definida por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[u_t(x, t)^2 + |\nabla u(x, t)|^2 \right] dx$$

decai uniformemente para zero. Este resultado, provado com todo o rigor matemático, válido para propagação de ondas, placas, dentre outros sistemas, constitui um significativo avanço na questão da mínima região de atrito capaz de controlar a energia do sistema levando-o ao repouso, ou de um estado inicial a um estado final pré-estabelecidos. Quanto menos atrito entre os corpos, menos energia se gasta e conseqüentemente menos custo se tem. Dentro desta ótica, de buscar a *menor região de atrito* ou o *menor custo possível de energia* que se desenvolvem nossas pesquisas.

Conjectura

Se ao invés de um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) a propagação da onda ocorrer sobre uma superfície M imersa em \mathbb{R}^3 , à luz da visão externa já existente para domínios, surge uma pergunta natural. Além das hipóteses existentes, que condições geométricas adicionais devemos impor a parte da superfície sem efeito dissipativo? Para fixar idéias, consideremos a figura abaixo:

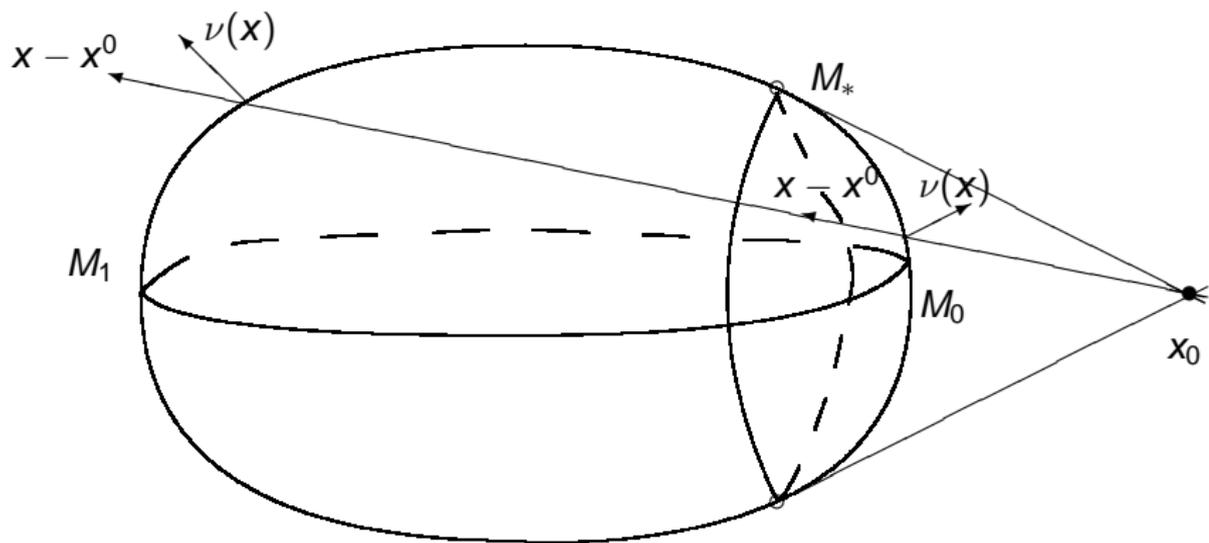


Figure: O observador está em x_0 . O subconjunto M_0 é a parte “visível” de M e M_1 é seu complemento. O subconjunto M_* é um conjunto aberto que contém $M \setminus M_0$ e a dissipação é efetiva nesta região. Que condições geométricas devem ser impostas a M_0 ?

Conforme mencionado anteriormente, o nosso interesse reside no fato de descobrirmos qual a menor região possível de atrito, para que tenhamos o menor gasto de energia possível. No caso de propagação de ondas, esta questão foi resolvida de maneira satisfatória em domínios $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitados ou de um modo geral em variedades Riemannianas compactas com ou sem bordo. Um dos pioneiros na investigação do comportamento assintótico da energia associada ao problema de Cauchy para a equação da onda linear sobre variedades Riemannianas compactas sem bordo (M, \mathbf{g}) e com um termo dispersivo, descrito pela equação

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + 2a(x) u_t = 0 & \text{em } M \times]0, \infty[, \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u^1(x) & x \in M, \end{cases} \quad (3)$$

foram Rauch e Taylor [CPAM/75].

Assuma que $a = a(x)$ dada em (3) é uma função limitada não negativa sobre Ω , $a \in C^\infty$, dizemos que a *condição de Rauch-Taylor* ocorre se existe um tempo $T_0 > 0$ tal que qualquer geodésica de comprimento $\geq T_0$ encontra o conjunto $\{x \in M; a(x) > 0\}$. Neste caso, foi estabelecido por Rauch e Taylor [CPAM/75] que a energia mecânica

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_M (|u_t|^2 + |\nabla u|^2) dx,$$

decai exponencialmente.

Este resultado foi generalizado por Bardos, Lebeau and Rauch [SICON/99] para o caso de variedades com fronteira. Neste trabalho os autores apresentam condições suficientes “ótimas” para a observação, controle e estabilização da equação da onda linear sobre variedades Riemannianas compactas (M, \mathbf{g}) com fronteira onde \mathbf{g} denota a métrica Riemanniana assumida de classe C^∞ . Em particular, quando consideramos a equação

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + 2a(x) u_t = 0 & \text{em } M \times]0, \infty[, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial M \times]0, \infty[, \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u^1(x) & x \in M, \end{cases}$$

$a \in C^\infty$ tal que $a(x) > 0$ em ω , para algum subconjunto não vazio ω de M ,

eles provaram que o decaimento exponencial ocorre se e somente se a bem conhecida *condição de controle geométrica (CCG)* é satisfeita: existe algum $T > 0$ tal que qualquer raio da ótica geométrica intercepta o conjunto ω .

As figuras abaixo representam regiões que satisfazem e não satisfazem tal condição quando Ω é um domínio limitado de \mathbb{R}^n .

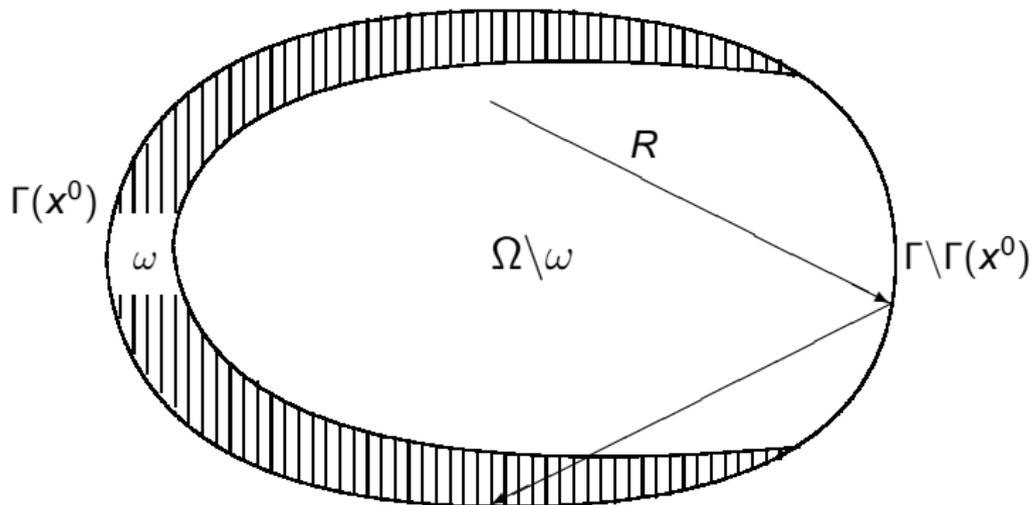


Figure: Raios propagando dentro de um domínio Ω seguem linhas retas que são refletidas na fronteira de acordo com as leis da Ótica Geométrica. A região de controle ou estabilização é ω e a CCG é satisfeita para algum $T_0 > 0$.

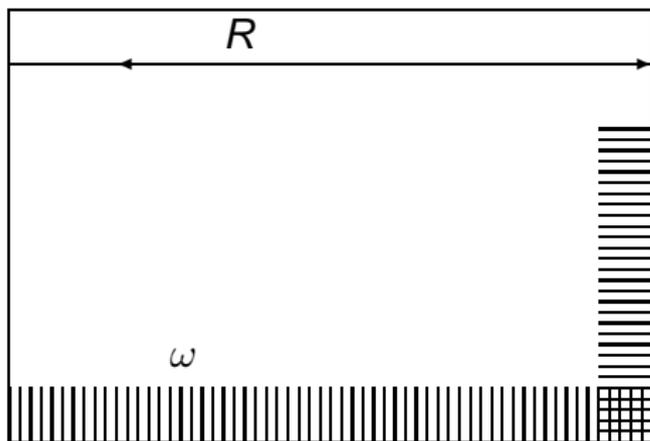


Figure: Neste caso existe um raio R da ótica geométrica que não intercepta a região ω seja qual for o tempo $T > 0$.

Quando consideramos a propagação de ondas em variedades compactas, ou, mais particularmente, sobre superfícies, determinar a condição de controle geométrico (CCG) é um problema delicado uma vez que necessitamos conhecer todas as geodésicas sobre a superfície em consideração. Sobre variedades compactas (M, g) , esta questão é muito mais complexa. Vejamos alguns exemplos envolvendo o *toro* e a *esfera* conforme mostram as figuras abaixo.

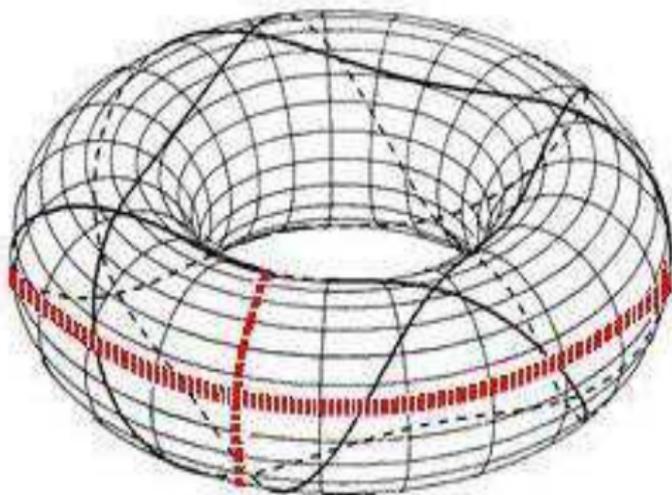


Figure: Um exemplo de uma região de controle geométrico é dada (em vermelho). Note que ela intercepta todas as geodésicas do toro (curvas em preto) .

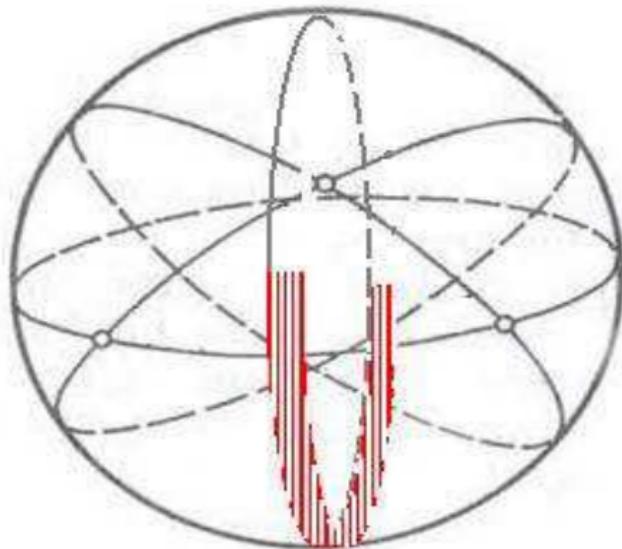


Figure: Uma região satisfazendo a condição geométrica de controle (em vermelho) intercepta todas as geodésicas sobre a esfera (em preto).

Sendo a condição CCG de Bardos, Lebeau e Rauch equivalente a estabilização exponencial, ela é notável para vermos quando uma região ω não é apropriada para estabelecer o decaimento exponencial, conforme figura 5 acima, no caso de problemas lineares. Contudo, a análise microlocal é geralmente descartada em problemas não lineares. Nesta direção, o método dos multiplicadores é ainda uma ferramenta poderosa para estabelecer taxas de decaimento uniformes da energia associada a problemas não lineares. Em algumas situações pode-se alcançar resultados “ótimos” quando convenientemente usado.

Visão Externa

Daremos um simples exemplo quando isto ocorre. Consideremos a equação linear da onda sobre uma *superfície compacta regular orientável* M sem fronteira, suplementada por uma dissipação *não linear* e localizada. Seja \mathbf{g} a métrica euclidiana induzida sobre M . Em [MAA/09], Domingos Cavalcanti, Fukuoka, Soriano e C. provaram taxas de decaimento uniforme e bem gerais da energia $E(t)$ quando a porção M_* da superfície M , onde a dissipação é efetiva, é estrategicamente escolhida. Definindo $M = M_0 \cup M_1$, onde

$$M_1 := \{x \in M; m(x) \cdot \nu(x) > 0\} \text{ e } M_0 = M \setminus M_1,$$

$m(x) := x - x^0$, ($x^0 \in \mathbb{R}^3$ fixo) e ν é o campo de vetores normais unitários exteriores à M ,

Superfícies constituídas por partes umbílicas

então para $i = 1, \dots, k$, eles assumem que existem subconjuntos abertos $M_{0i} \subset M_0$ de M com fronteira regular ∂M_{0i} tal que M_{0i} são umbílicos, ou, mais geralmente, que as curvaturas principais k_1 e k_2 satisfazem $|k_1(x) - k_2(x)| < \varepsilon_i$ (ε_i considerado suficientemente pequeno) para todo $x \in M_{0i}$. Grosseiramente falando, a região que não contém efeitos dissipativos deve ser *aproximadamente umbílica*. Isto é necessário uma vez que os autores fazem uso dos multiplicadores considerados para resolver a mesma questão para a equação da onda,

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) = 0 & \text{em } \Omega \times]0, +\infty[, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times]0, +\infty[, \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), x \in \Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado de \mathbb{R}^n com fronteira $\partial\Omega$ suave. Eles empregaram o multiplicador bem conhecido dado pelo campo de vetores $m(x) := x - x^0$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$ arbitrariamente escolhido, mas fixo, tomado fora do domínio Ω , de acordo com a figura abaixo

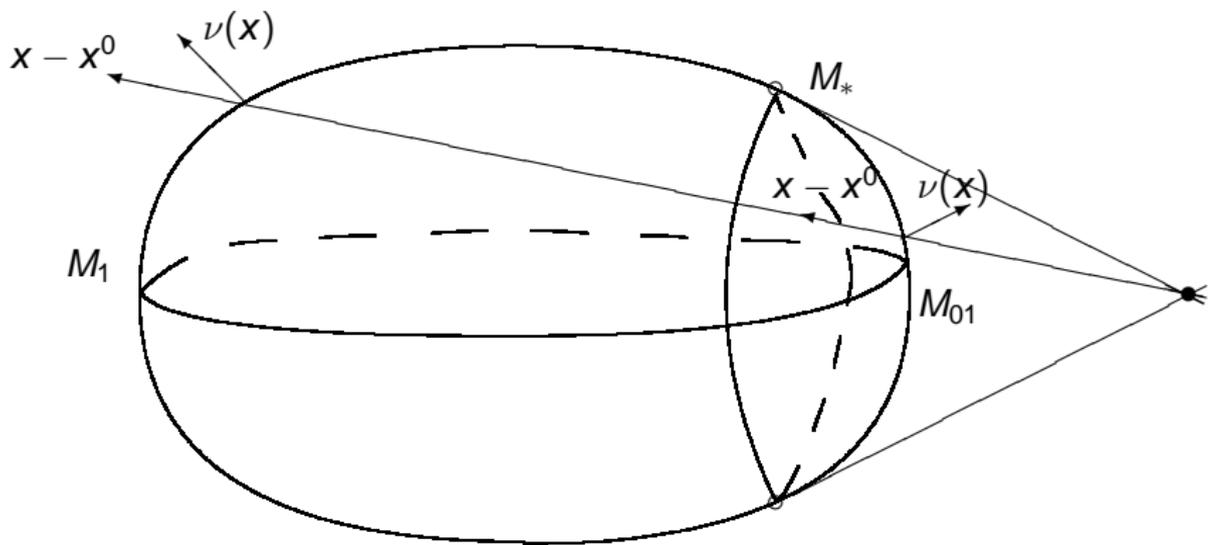


Figure: O observador está em x_0 . O subconjunto M_0 é a parte “visível” de M e M_1 é seu complemento. O subconjunto $M_* \supset M \setminus \bigcup_{i=1}^k M_{0i} = M \setminus M_{01}$ é um conjunto aberto que contém $M \setminus \bigcup_{i=1}^k M_{0i}$ e a dissipação é efetiva nesta região.

É importante que seja mencionado que as técnicas desenvolvidas em Domingos Cavalcanti, Fukuoka, Soriano e C.[MAA/09] podem ser naturalmente estendidas para um número finito de observadores x_1, \dots, x_n em conexão com um número finito de *regiões umbílicas* U_1, \dots, U_n cujos fechos são disjuntos. Com efeito, por simplicidade de clareza consideraremos o caso simples onde temos somente dois observadores localizados em x_1 and x_2 . Assim, é suficiente fazer uso do multiplicador $q \cdot \nabla_T u$ onde q é definido por

$$q(x) := \begin{cases} x - x_i & \text{if } x \in U_i, i = 1, 2, \\ \text{regularmente estendido em } \mathcal{M} \setminus (U_1 \cup U_2) \end{cases} \quad (4)$$

de acordo com a figura abaixo.

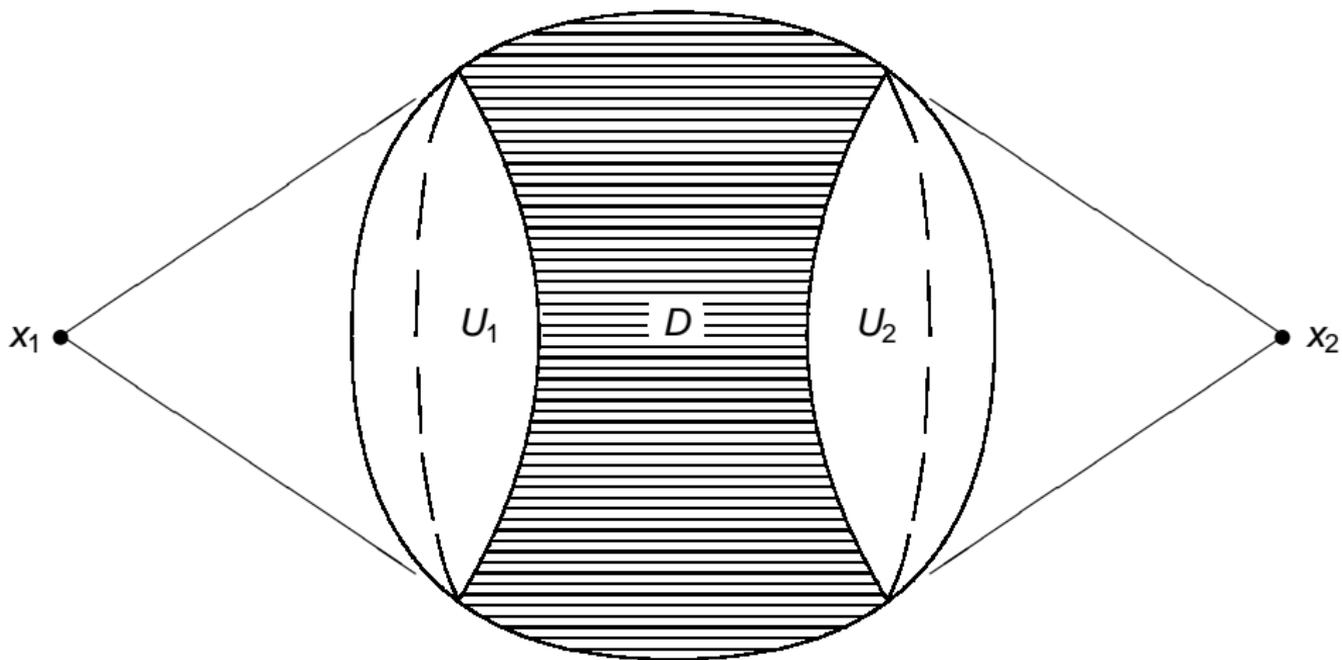
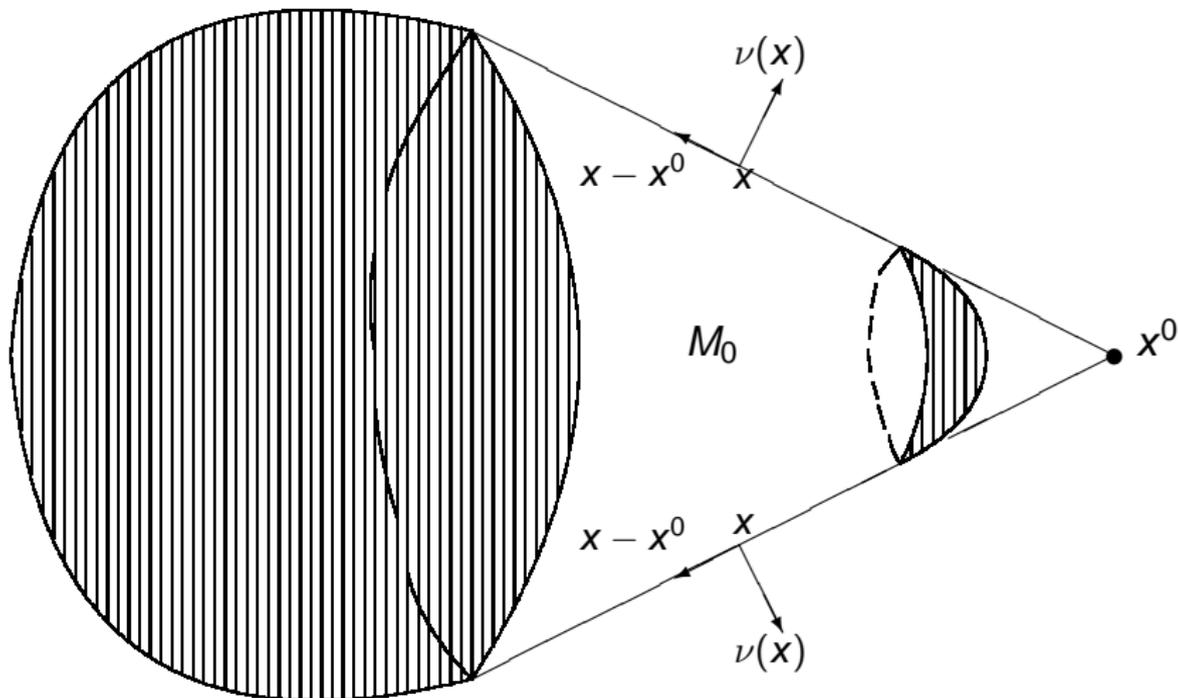


Figure:

Observe que se considerarmos x_1 e x_2 opostos em relação ao centro de uma esfera e suficientemente longe um do outro, a dissipação pode ser considerada efetivamente em uma vizinhança arbitrariamente pequena em torno do meridiano. Isto quase atinge a optimalidade do resultado devido a Bardos, Lebeau e Rauch [SICON/99] quando $M = \mathbb{S}^2$ é uma esfera.

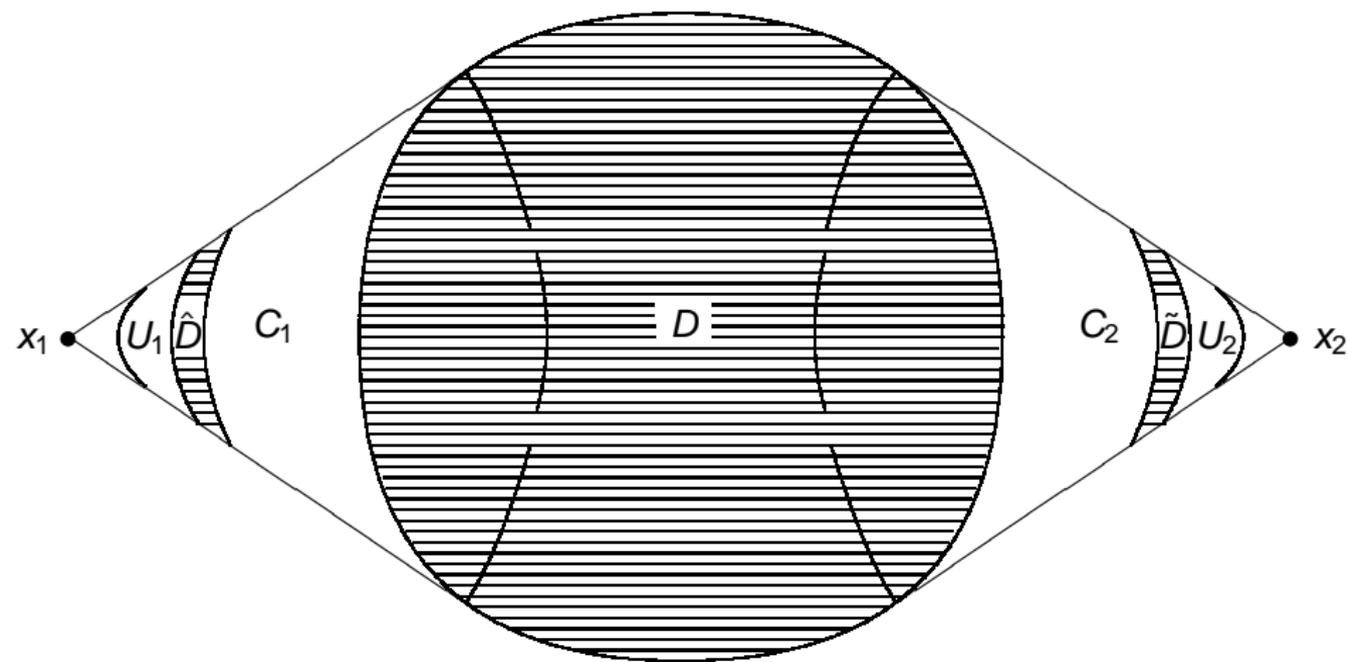
Superfícies constituídas por uma parte cônica

O método acima aludido permite-nos deixar sem dissipação pedaços (arbitrariamente grandes) de superfícies cônicas. Com efeito, assuma que exista $x^0 \in \mathbb{R}^3$ tal que $m(x) \cdot \nu(x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{M}_0$ e, além disso, que \mathcal{M}_* contem $\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_0$ de acordo com a figura abaixo.



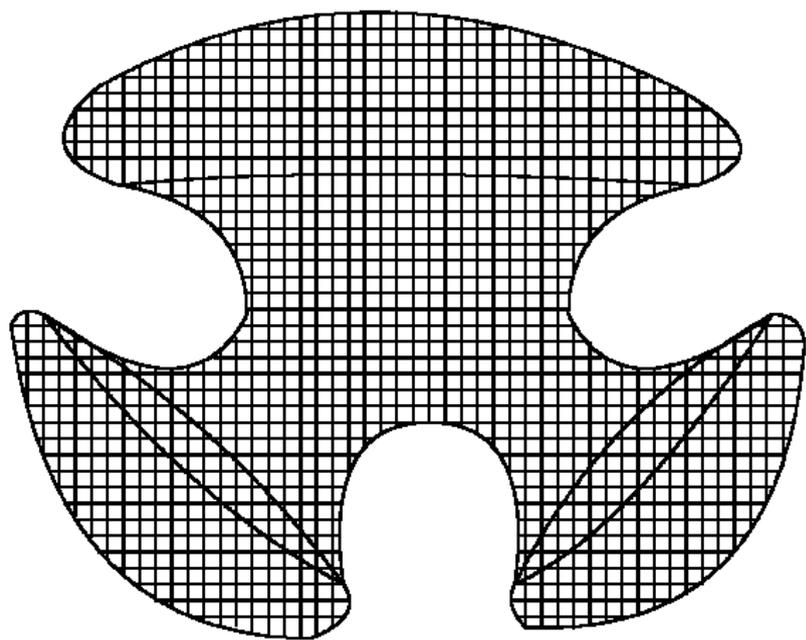
M_0 é uma região não dissipativa (em branco) enquanto a região marcada (em preto) contém efeitos dissipativos.

Observamos que a técnica apresentada permite-nos deixar sem dissipação combinações finitas de regiões umbílicas e cônicas (disjuntas) e coladas de forma suave, conforme ilustra a figura abaixo.



Por outro lado, gostaríamos de mencionar outro trabalho devido a Domingos Cavalcanti, Fukuoka, Soriano e C. [TRANS AMS/09], que provaram um resultado “ótimo”, reduzindo arbitrariamente a região onde o efeito dissipativo se encontra, mas para o caso *particular* quando $M \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície compacta orientada e sem bordo. Eles provaram que para $\epsilon > 0$ dado, existe um subconjunto aberto $V \subset M$ e tal que $med(V) \geq med(M) - \epsilon$. Assumindo que $a(x) \geq a_0 > 0$ sobre um subconjunto aberto $M^* \subset M$ que contém $M \setminus V$ então taxas de decaimento uniforme e ótimas da energia são estabelecidas.

Para este propósito eles fazem o uso de um multiplicador intrínseco que desempenha um papel fundamental para estabelecer as desejadas taxas de decaimento da energia. Este multiplicador é, grosseiramente falando, dado por ∇f , onde $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é a função regular tal que $Hessf \approx \mathbf{g}$ sobre V (aqui \mathbf{g} é a métrica Riemanianna induzida sobre M). Embora este *resultado intrínseco* seja “sharp” com respeito a medida superficial onde a dissipação age, nós não temos qualquer controle a respeito das regiões que podem estar livres de dissipação. As componentes conexas de V podem ser arbitrariamente pequenas conforme ilustra a figura seguinte.



A área não dissipativa (em branco) é arbitrariamente grande enquanto a área demarcada (em preto) contém efeitos dissipativos e pode ser considerada arbitrariamente pequena, mas ambas totalmente distribuídas sobre M .

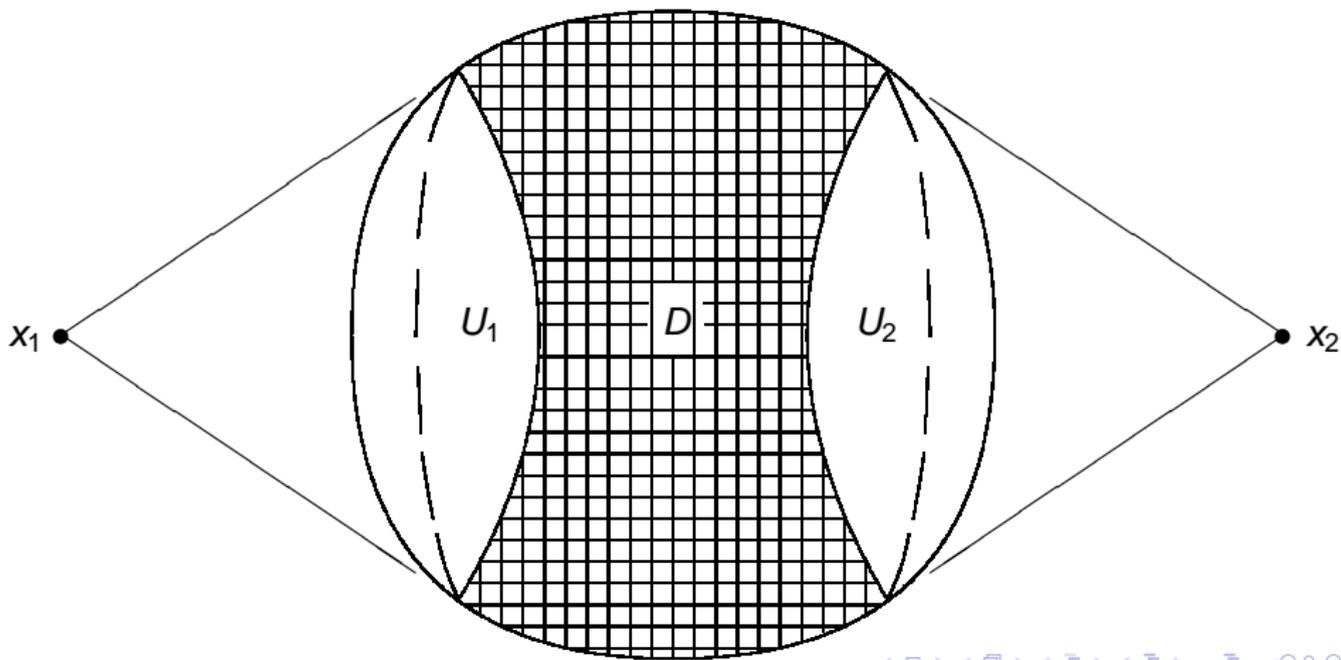


Finalmente é importante mencionar que combinando as técnicas desenvolvidas em [MAA/09] e [TRANS AMS/09] podemos reduzir arbitrariamente a medida superficial da área dissipativa. Aqui o campo vetorial q a ser considerado é definido como

$$q(x) := \begin{cases} x - x_i & \text{se } x \in U_i, \quad i = 1, 2, \\ \nabla f(x), \text{ Hess}(f) \approx \mathbf{g}, & \text{se } x \text{ está em algum domínio branco e pequena} \\ & \text{estendida regularmente fora} \end{cases}$$

onde \mathbf{g} é a métrica Riemanniana sobre M (veja Figura abaixo).

As regiões U_1 and U_2 são *umbílicas* e livres de dissipação. A região D contém efeitos dissipativos mas sua medida superficial *parte branca* é arbitrariamente grande.



Resultado Principal

Antes de apresentarmos nosso resultado de estabilidade, necessitamos introduzir algumas funções auxiliares. Para este propósito utilizaremos o método introduzido por Lasiecka and Tataru [DIE/93]. Seja h uma função côncava, estritamente crescente com $h(0) = 0$, e tal que

$$h(sg(s)) \geq s^2 + g^2(s), \text{ para } |s| \leq 1. \quad (5)$$

Note que a função acima pode ser construída diretamente em função das hipóteses dadas sobre a função g . Com esta função em mente definimos

$$r(\cdot) = h\left(\frac{\cdot}{\text{meas}(\Sigma)}\right). (\Sigma = M \times (0, T)) \quad (6)$$

Seja r monótona crescente, então $cl + r$ é inversível para todo $c \geq 0$. Para L uma constante positiva definimos

$$p(x) = (cl + r)^{-1}(Lx), \quad (7)$$

onde a função p é positiva, contínua e estritamente crescente com $p(0) = 0$. Finalmente, definamos

$$q(x) = x - (I + p)^{-1}(x). \quad (8)$$

Feitas as considerações acima podemos enunciar nosso principal resultado.

Theorem

Seja u uma solução fraca do problema (1). Sendo a energia mecânica $E(t)$ definida como antes, existe $T_0 > 0$ tal que

$$E(t) \leq S\left(\frac{t}{T_0} - 1\right), \quad \forall t > T_0, \quad (9)$$

com $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$, onde o semigrupo de contração $S(t)$ é uma solução da equação diferencial

$$\frac{d}{dt}S(t) + q(S(t)) = 0, \quad S(0) = E(0), \quad (10)$$

(e a função q é definida em (8)). Aqui a constante L (da definição (7)) dependerá da $\text{med}(\mathcal{M} \times (0, T))$, e a constante c (da definição (7)) satisfaz $c \equiv \frac{k^{-1} + K}{\text{meas}(\Sigma)(1 + \|a\|_\infty)}$.

Se a dissipação for linear, ou seja, $g(s) = s$, então, a energia potencial do problema (1) decai exponencialmente com respeito a energia inicial. Existem constantes positivas $C > 0$ e $k > 0$ tais que

$$E(t) \leq Ce^{-kt}E(0), \quad t > 0. \quad (11)$$

Como outro exemplo podemos considerar $g(s) = s^p$, $p > 1$ próximo a origem. Neste caso obtemos a seguinte taxa polinomial de decaimento:

$$E(t) \leq C(E(0))\left[E(0)^{\frac{-p+1}{2}} + t(p-1)\right]^{\frac{2}{-p+1}}.$$

Podemos encontrar taxas diferentes das acima mencionadas no artigo de autoria de Domingos Cavalcanti, Lasiecka and C. [JDE/07].

Idéia da prova do Resultado Principal

No que segue trabalhamos com soluções regulares (de modo que as contas sejam lícitas) e resultado de decaimento se estende para soluções fracas usando-se argumentos tradicionais de densidade (aproximação de soluções fracas por soluções regulares).

Nosso principal objetivo é provar a seguinte estimativa de energia:

$$\int_0^T E(t) dt \leq C_1 E(T) + C_2 \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) \left(g(u_t)^2 + u_t^2 \right) d\mathcal{M} dt, (12)$$

para constantes positivas C_1 e C_2 onde C_1 não pode depender de T . Deste ponto deduzimos as taxas de decaimento acima mencionadas seguindo exatamente os passos introduzidos por Lasiecka and Tataru [DIE/93]. De modo a obter (12) precisamos de dois lemas fundamentais

Primeira Identidade Fundamental

Lema 1 *Seja $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientável compacta sem bordo e q um campo vetorial regular com $q = q_T + (q \cdot \nu)\nu$. Então, para toda solução regular u de (1) temos a seguinte identidade*

$$\begin{aligned} & \left[\int_{\mathcal{M}} u_t q_T \cdot \nabla_T u d\mathcal{M} \right]_0^T \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (\operatorname{div}_T q_T) \left\{ |u_t|^2 - |\nabla_T u|^2 \right\} d\mathcal{M} dt \quad (13) \\ & + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \nabla_T u \cdot \nabla_T q_T \cdot \nabla_T u d\mathcal{M} dt \\ & + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) (q_T \cdot \nabla_T u) d\mathcal{M} dt = 0. \end{aligned}$$

Segunda Identidade Fundamental

Lemma 2 *Seja u uma solução regular do problema (1) e $\xi \in C^1(\mathcal{M})$. Então*

$$\begin{aligned} & \left[\int_{\mathcal{M}} u_t \xi u d\mathcal{M} \right]_0^T & (14) \\ &= \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \xi |u_t|^2 d\mathcal{M} dt - \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \xi |\nabla_T u|^2 d\mathcal{M} dt \\ & - \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (\nabla_T u \cdot \nabla_T \xi) u d\mathcal{M} dt \\ & - \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) \xi u d\mathcal{M} dt. \end{aligned}$$

Visão Externa - Multiplicador Radial

Observemos que no caso particular quando $m(x) = x - x^0$, $x \in \mathbb{R}^3$ e $x^0 \in \mathbb{R}^3$ é um ponto fixo de \mathbb{R}^3 , deduzimos que

$$\operatorname{div} m = 3, \quad \operatorname{div}_T m_T = 2 + (m \cdot \nu) \operatorname{Tr} B. \quad (15)$$

onde B é a segunda forma fundamental de \mathcal{M} (o operador forma) e Tr é o traço. Sejam φ e m definidos como acima. Podemos deduzir também,

$$\nabla_T \varphi \cdot \nabla_T m_T \cdot \nabla_T \varphi = |\nabla_T \varphi|^2 + (m \cdot \nu) (\nabla_T \varphi \cdot B \cdot \nabla_T \varphi). \quad (16)$$

O Operador Forma

Remark

O sinal de B pode mudar na literatura. Em nosso caso, estamos considerando $B = -dN$, onde N é aplicação normal de Gauss relacionada com ν .

As fórmulas (15) podem ser reescritas:

$$\operatorname{div} m = 3, \quad \operatorname{div}_T m_T = 2 + 2H(m \cdot \nu). \quad (17)$$

onde $H = \frac{\operatorname{tr} B}{2}$ é a curvatura média de \mathcal{M} .

Multiplicador Radial

Substituindo em (13) $q(x) = m(x) = x - x^0$ para algum $x^0 \in \mathbb{R}^3$ fixado e considerando-se as fórmulas (15) e (16), obtemos

$$\begin{aligned} & \left[\int_{\mathcal{M}} u_t m_T \cdot \nabla_T u d\mathcal{M} \right]_0^T + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \left\{ |u_t|^2 - |\nabla_T u|^2 \right\} d\mathcal{M} dt \\ & + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} [|\nabla_T u|^2 + (m \cdot \nu)(\nabla_T u \cdot B \cdot \nabla_T u)] d\mathcal{M} dt \quad (18) \\ & + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (m \cdot \nu) H \left\{ |u_t|^2 - |\nabla_T u|^2 \right\} d\mathcal{M} dt \\ & + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t)(m_T \cdot \nabla_T u) d\mathcal{M} dt = 0. \end{aligned}$$

Substituindo, agora, $\xi = \frac{1}{2}$ em (14) e combinando os resultados obtidos com a identidade (18) deduzimos

$$\begin{aligned}
 & \left[\int_{\mathcal{M}} u_t m_T \cdot \nabla_T u \, d\mathcal{M} \right]_0^T + \frac{1}{2} \left[\int_{\mathcal{M}} u_t u \, d\mathcal{M} \right]_0^T \quad (19) \\
 & + \int_0^T E(t) \, dt + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) (m_T \cdot \nabla_T u) \, d\mathcal{M} \, dt \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) u \, d\mathcal{M} \, dt \\
 & = - \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (m \cdot \nu) H \left\{ |u_t|^2 - |\nabla_T u|^2 \right\} \, d\mathcal{M} \, dt. \\
 & - \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (m \cdot \nu) (\nabla_T u \cdot B \cdot \nabla_T u) \, d\mathcal{M} \, dt.
 \end{aligned}$$

Observe que alguns termos em (19) são facilmente manuseados fazendo o uso das desigualdades de Cauchy Schwarz e Poincaré como também da desigualdade $ab \leq \frac{1}{4\varepsilon} a^2 + \varepsilon b^2$ e explorando a identidade de energia:

$$E(T) - E(0) = - \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) u_t d\mathcal{M} dt$$

Análise dos termos que envolvem o operador forma B

Vamos focar nossa atenção no operador forma $B: T_x\mathcal{M} \rightarrow T_x\mathcal{M}$. Existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_x\mathcal{M}$ tal que $Be_1 = k_1e_1$ e $Be_2 = k_2e_2$ and k_1 e k_2 são as curvaturas principais de \mathcal{M} em x . A matriz de B com respeito à base $\{e_1, e_2\}$ é dada por

$$B := \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}.$$

Denotando $\nabla_T u = (\xi, \eta)$ as coordenadas de $\nabla_T u$ na base $\{e_1, e_2\}$, para cada $x \in \mathcal{M}$, deduzimos que

$$\nabla_T u \cdot B \cdot \nabla_T u = k_1 \xi^2 + k_2 \eta^2. \quad (20)$$

Assim, de (36), inferimos

$$\begin{aligned} (m \cdot \nu) \left[(\nabla_T u \cdot B \cdot \nabla_T u) - \frac{1}{2} \text{Tr}(B) |\nabla_T u|^2 \right] \\ = (m \cdot \nu) \left[\frac{(k_1 - k_2)}{2} \xi^2 + \frac{(k_2 - k_1)}{2} \eta^2 \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Remark: *Observe que este é o momento preciso que as propriedades intrínsecas da superfície \mathcal{M} aparecem, ou seja,*

Regiões umbílicas (contidas na semi-esfera) ficam livres de atrito

Necessitamos fortemente que o termo

– $\int_0^T \int_{\mathcal{M}} (m \cdot \nu) H u_t^2 d\mathcal{M} dt$ ‘viva’ em uma região onde o efeito dissipativo é efetivo. Lembre que o termo dissipativo é efetivo sobre um conjunto aberto \mathcal{M}_ o qual contém $\mathcal{M} \setminus \cup_{i=1}^k \mathcal{M}_{0i}$. Então, assumindo que $H \leq 0$ e uma vez que $m(x) \cdot \nu(x) \leq 0$ sobre \mathcal{M}_0 , temos*

$$- \int_0^T \int_{\mathcal{M}_0} (m \cdot \nu) H |u_t|^2 d\mathcal{M} dt \leq 0.$$

Além disso, supondo que \mathcal{M}_{0i} é umbílica para todo

$i = 1, \dots, k$, então, tendo (21) em mente, também temos que

$$\int_0^T \int_{\mathcal{M}_{0i}} (m \cdot \nu) \left[H |\nabla_T u|^2 - (\nabla_T u \cdot B \cdot \nabla_T u) \right] d\mathcal{M} dt = 0,$$

$i = 1, \dots, k.$

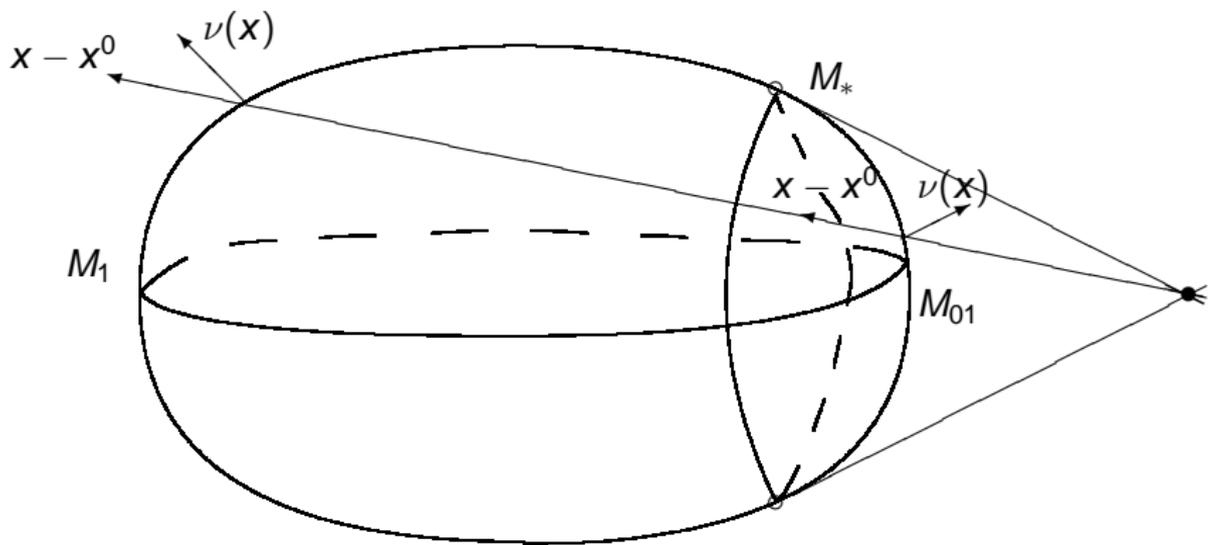


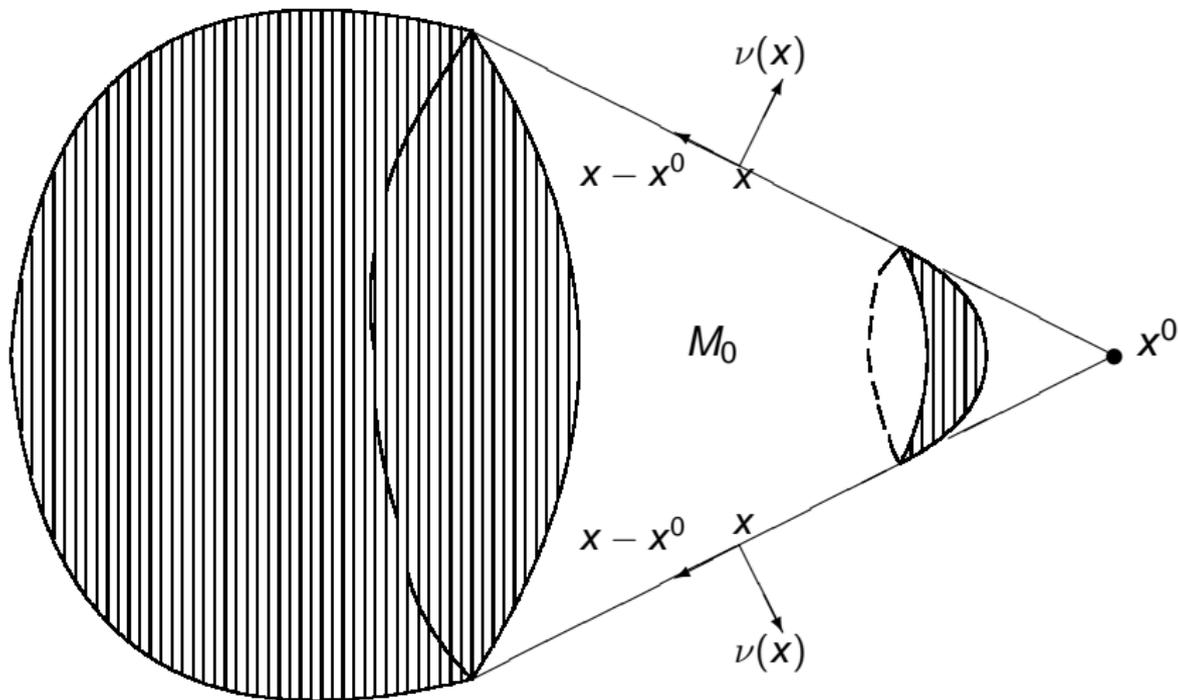
Figure: O observador está em x_0 . O subconjunto M_0 é a parte “visível” de M e M_1 é seu complemento. O subconjunto $M_* \supset M \setminus \bigcup_{i=1}^k M_{0i} = M \setminus M_{01}$ é um conjunto aberto que contém $M \setminus \bigcup_{i=1}^k M_{0i}$ e a dissipação é efetiva nesta região.

Regiões cônicas arbitrariamente grandes ficam livres de atrito

Observe que se \mathcal{M}_0 é um pedaço de uma superfície cônica \mathcal{M} , that is, $m(x) \cdot \nu(x) = 0$, para todo $x \in \mathcal{M}_0$, também deduzimos que

$$- \int_0^T \int_{\mathcal{M}_0} (m \cdot \nu) H |u_t|^2 d\mathcal{M} dt = 0.$$

$$\int_0^T \int_{\mathcal{M}_0} (m \cdot \nu) \left[H |\nabla_T u|^2 - (\nabla_T u \cdot B \cdot \nabla_T u) \right] d\mathcal{M} dt = 0.$$



M_0 é uma região não dissipativa (em branco) enquanto a região marcada (em preto) contém efeitos dissipativos.

Regiões quase úmblicas - $|k_1 - k_2|$ pequeno

Mais geralmente, assumindo que as curvaturas principais k_1 e k_2 verificam $|k_1(x) - k_2(x)| < \varepsilon_i$ (aqui, ε_i é assumido suficientemente pequeno) para todo $x \in \mathcal{M}_{0i}$, $i = 1, \dots, k$, deduzimos que

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^k \int_0^T \int_{\mathcal{M}_{0i}} (m \cdot \nu) \left[H |\nabla_T u|^2 - (\nabla_T u \cdot B \cdot \nabla_T u) \right] d\mathcal{M} dt \right| \\ & \leq \sum_{i=1}^k \int_0^T \int_{\mathcal{M}_{0i}} |(m \cdot \nu)| |k_1 - k_2| |\xi^2 + \eta^2| d\mathcal{M} dt \\ & \leq \sum_{i=1}^k R_i \varepsilon_i \int_0^T \int_{\mathcal{M}_{0i}} |\nabla_T u|^2 d\mathcal{M} dt \leq 2 \sum_{i=1}^k R_i \varepsilon_i \int_0^T E(t) dt, \end{aligned}$$

onde $R_i = \max_{x \in \overline{\mathcal{M}_{0i}}} \|x - x^0\|_{\mathbb{R}^3}$.

Defina $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M} \setminus \cup_{i=1}^k \mathcal{M}_{0i}$. No caso em que \mathcal{M}_{0i} são sub-regiões umbílicas ou cônicas, de (19) e (21) deduzimos

$$\begin{aligned}
 \int_0^T E(t) dt &\leq - \left[\int_{\mathcal{M}} u_t m_T \cdot \nabla_T u d\mathcal{M} \right]_0^T - \frac{1}{2} \left[\int_{\mathcal{M}} u_t u d\mathcal{M} \right]_0^T \\
 &+ \int_0^T \int_{\mathcal{M}_2} (m \cdot \nu) \left[H |\nabla_T u|^2 - (\nabla_T u \cdot B \cdot \nabla_T u) \right] d\mathcal{M} dt \\
 &- \int_0^T \int_{\mathcal{M}_2} (m \cdot \nu) H |u_t|^2 d\mathcal{M} dt \\
 &- \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) (m_T \cdot \nabla_T u) d\mathcal{M} dt \\
 &- \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) u d\mathcal{M} dt.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Desigualdade Inversa - Princípio de Continuação Única

Note que se $a = 0$, ou seja, se tivermos a equação linear

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_{\mathcal{M}} u = 0 & \text{in } \mathcal{M} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x); u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \mathcal{M}. \end{cases}$$

então, $E(T) = E(0)$ para todo $T \geq 0$ e de (22) facilmente deduzimos a desigualdade inversa (desigualdade de observação)

$$E_0 \leq C \int_0^T \int_{\mathcal{M}_2} \left[u_t^2 + |\nabla_T u|^2 \right] d\mathcal{M} dt,$$

onde C é uma constante positiva e $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M} \setminus \cup_{i=1}^k \mathcal{M}_{0i}$.

$$\frac{1}{2} \int_0^T E(t) dt \leq |\chi| + C_1 \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) (g(u_t))^2 d\mathcal{M} dt \quad (23)$$

$$+ C_1 \int_0^T \int_{\mathcal{M}_2} [|\nabla_T u|^2 + a(x) u_t^2] d\mathcal{M} dt$$

onde

$$\chi = - \left[\int_{\mathcal{M}} u_t m_T \cdot \nabla_T u d\mathcal{M} \right]_0^T - \frac{1}{2} \left[\int_{\mathcal{M}} u_t u d\mathcal{M} \right]_0^T$$

$$C_1 := \max \left\{ \|a\|_{\infty} [2^{-1} \lambda_1^{-1} + 8 R^2], \|B\| R + |H| R, R |H| a_0^{-1} \right\},$$

$$\|B\| = \sup_{x \in \mathcal{M}} |B_x|, \text{ and } |B_x| = \sup_{\{v \in T_x \mathcal{M}; |v|=1\}} |B_x v|.$$

“cut-off” Intrínseco

Nos resta estimar a quantidade $\int_0^T \int_{\mathcal{M}_2} |\nabla_T u|^2 d\mathcal{M} dt$ em função do termo dissipativo

$\int_0^T \int_{\mathcal{M}} [a(x) |g(u_t)|^2 + a(x) |u_t|^2] d\mathcal{M} dt$. Para este propósito temos que construir um “cut-off” (função auxiliar) η_ε sobre uma vizinhança específica de \mathcal{M}_2 . Inicialmente definimos $\tilde{\eta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\tilde{\eta}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ (x-1)^2 & \text{se } x \in [1/2, 1] \\ 0 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

e é definido em $(0, 1/2)$ de modo que $\tilde{\eta}$ é uma função não decrescente de classe C^1 . Para $\varepsilon > 0$, defina $\tilde{\eta}_\varepsilon(x) := \tilde{\eta}(x/\varepsilon)$.

Da definição acima não é difícil ver que existe uma constante M que não depende de ε e tal que

$$\frac{|\tilde{\eta}'_\varepsilon(\mathbf{x})|^2}{\tilde{\eta}_\varepsilon(\mathbf{x})} \leq \frac{M}{\varepsilon^2}$$

para todo $\mathbf{x} < \varepsilon$.

Agora, seja $\varepsilon > 0$ tal que

$$\tilde{\omega}_\varepsilon := \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{M}; d\left(\mathbf{x}, \bigcup_{i=1}^k \partial\mathcal{M}_{0i}\right) < \varepsilon \right\}$$

é uma vizinhança tubular de $\bigcup_{i=1}^k \partial\mathcal{M}_{0i}$ e $\omega_\varepsilon := \tilde{\omega}_\varepsilon \cup \mathcal{M}_2$ está contida em \mathcal{M}_* . Defina $\eta_\varepsilon : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\eta_\varepsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x} \in \mathcal{M}_2 \\ \tilde{\eta}_\varepsilon(d(\mathbf{x}, \mathcal{M}_2)) & \text{se } \mathbf{x} \in \omega_\varepsilon \setminus \mathcal{M}_2 \\ 0 & \text{dasocontrrio.} \end{cases}$$

É imediato que η_ε é uma função de classe C^1 sobre \mathcal{M} devido a regularidade de $\partial\mathcal{M}_2$ e $\partial\omega_\varepsilon$. Observe também que

$$\frac{|\nabla_T \eta_\varepsilon(\mathbf{x})|^2}{\eta_\varepsilon(\mathbf{x})} = \frac{|\tilde{\eta}'_\varepsilon(d(\mathbf{x}, \mathcal{M}_2))|^2}{\tilde{\eta}_\varepsilon(d(\mathbf{x}, \mathcal{M}_2))} \leq \frac{M}{\varepsilon^2} \quad (24)$$

para todo $\mathbf{x} \in \omega_\varepsilon \setminus \mathcal{M}_2$. Em particular, $\frac{|\nabla_T \eta_\varepsilon|^2}{\eta_\varepsilon} \in L^\infty(\omega_\varepsilon)$.

Tomando $\xi = \eta_\varepsilon$ na identidade (14) obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \eta_\varepsilon |\nabla_T u|^2 d\mathcal{M} dt & (25) \\ & = - \left[\int_{\omega_\varepsilon} u_t u \eta_\varepsilon d\mathcal{M} \right]_0^T + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \eta_\varepsilon |u_t|^2 d\mathcal{M} \\ & - \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} u (\nabla_T u \cdot \nabla_T \eta_\varepsilon) d\mathcal{M} dt - \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} a(x) g(u_t) u \eta_\varepsilon d\mathcal{M} dt. \end{aligned}$$

Depois de algumas estimativas chegamos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \eta_\varepsilon |\nabla_T u|^2 d\mathcal{M} dt & (26) \\
& \leq |\mathcal{Y}| + \frac{\lambda_1^{-1} \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(\mathcal{M})}}{4\alpha} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \mathbf{a}(x) |g(u_t)|^2 d\mathcal{M} \\
& + 2\alpha \int_0^T E(t) dt + \frac{M}{2\varepsilon^2} \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} |u|^2 d\mathcal{M} dt, \\
& + \mathbf{a}_0^{-1} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \mathbf{a}(x) u_t^2 d\mathcal{M} dt.
\end{aligned}$$

onde $\alpha > 0$ é um número arbitrário e

$$\mathcal{Y} := - \left[\int_{\omega_\varepsilon} u_t u \eta_\varepsilon d\mathcal{M} \right]_0^T. \quad (27)$$

Logo, combinando (26) e (23), tendo em mente que

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{M}_2} |\nabla_T u|^2 d\mathcal{M} dt \leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \eta_\varepsilon |\nabla_T u|^2 d\mathcal{M} dt$$

e escolhendo $\alpha = 1/16C_1$ deduzimos

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_0^T E(t) dt &\leq |\chi| + 2C_1|\mathcal{Y}| \\ &+ C_2 \int_0^T \int_{\mathcal{M}} [a(x) |g(u_t)|^2 + a(x) |u_t|^2] d\mathcal{M} dt \\ &+ \frac{MC_1}{\varepsilon^2} \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} |u|^2 d\mathcal{M} dt, \end{aligned} \tag{28}$$

onde $C_2 = \max\{C_1, 8C_1^2\lambda_1^{-1} \|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})}, 2C_1 a_0^{-1}\}$.

Por outro lado, a seguinte estimativa ocorre

$$\begin{aligned} |\chi| + 2C_2|\mathcal{Y}| &\leq C(E(0) + E(T)) & (29) \\ &= C \left[2E(T) + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) u_t d\mathcal{M} \right], \end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva que depende de R . Então,

$$\begin{aligned} T E(T) &\leq \int_0^T E(t) dt & (30) \\ &\leq C E(T) + C \left[\int_0^T \int_{\mathcal{M}} [a(x) |g(u_t)|^2 + a(x) |u_t|^2] d\mathcal{M} dt \right] \\ &+ C \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} |u|^2 d\mathcal{M} dt, \end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva que depende de $a_0, \|a\|_\infty, \lambda_1, R, |H|, \|B\|$ e $\frac{M}{\varepsilon^2}$. Nosso propósito é estimar o último termo do lado direito da desigualdade (30). De modo a fazê-lo, consideremos o seguinte lema onde T_0 é uma constante positiva suficientemente grande para os nossos propósitos.

Lemma

Sob as hipóteses do teorema 1, existe uma constante positiva $C(E(0))$ tal que se u é uma solução fraca de (1), temos

$$\int_0^T \int_{\mathcal{M}} |u|^2 d\mathcal{M} dt \leq C(E(0)) \left\{ \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (a(x) g^2(u_t) + a(x) u_t^2) d\mathcal{M} dt \right\}, \quad (31)$$

para todo $T > T_0$.

As desigualdades (30) e (31) nos conduzem ao seguinte resultado.

Proposition 5.2.2: *Para $T > 0$ suficientemente grande, a solução fraca u de (1) satisfaz*

$$E(T) \leq C \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \left[a(x) |u_t|^2 + a(x) |g(u_t)|^2 \right] d\mathcal{M} dt \quad (32)$$

onde a constante $C = C(T, E(0), a_0, \lambda_1, R, \|B\|, \frac{M}{\varepsilon^2})$.

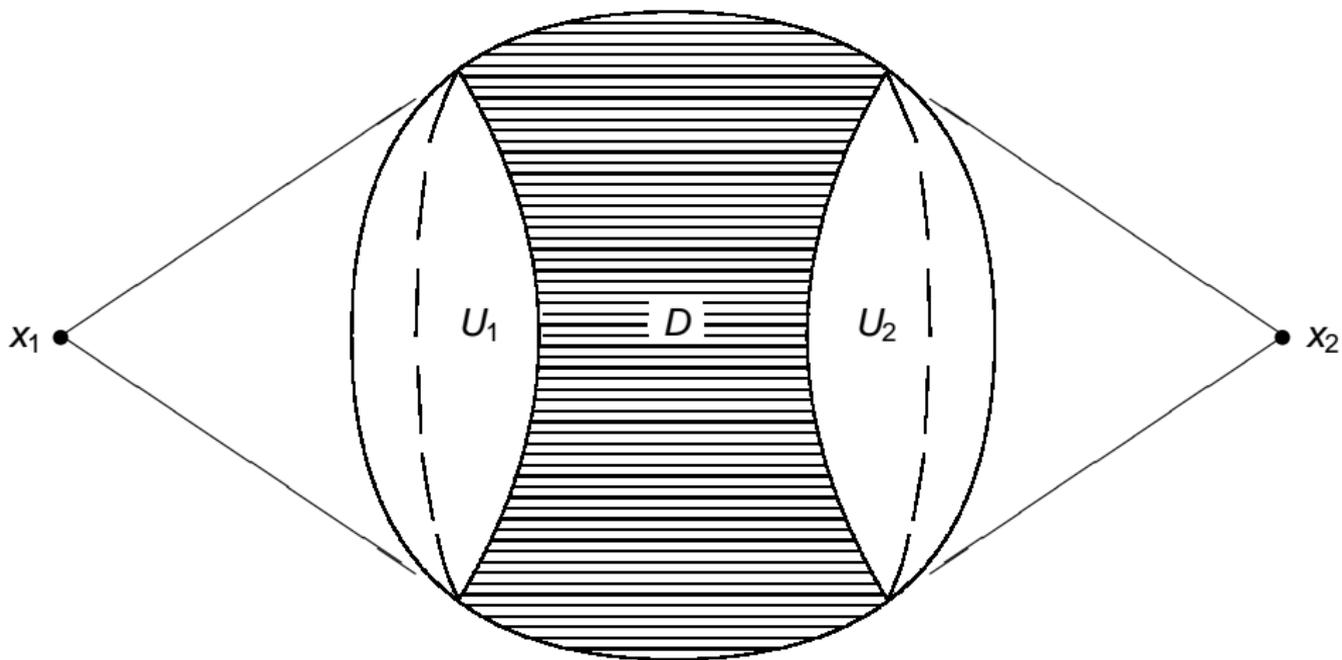
Deste ponto estamos aptos a empregar o método desenvolvido por Lasiecka and Tataru [DIE/93] de modo a obter a taxa de decaimento desejada.

Algumas Observações

É importante observar que a técnica desenvolvida pode ser naturalmente estendida para um número finito de observadores x_1, \dots, x_n em conexão com um número finito de regiões *umbílicas* ou *cônicas disjuntas* U_1, \dots, U_n . Com efeito, por simplicidade consideremos o caso que tenhamos somente dois observadores localizados em x_1 e x_2 . Então é suficiente fazermos o uso do multiplicador $q \cdot \nabla_T u$ onde o campo q é definido por

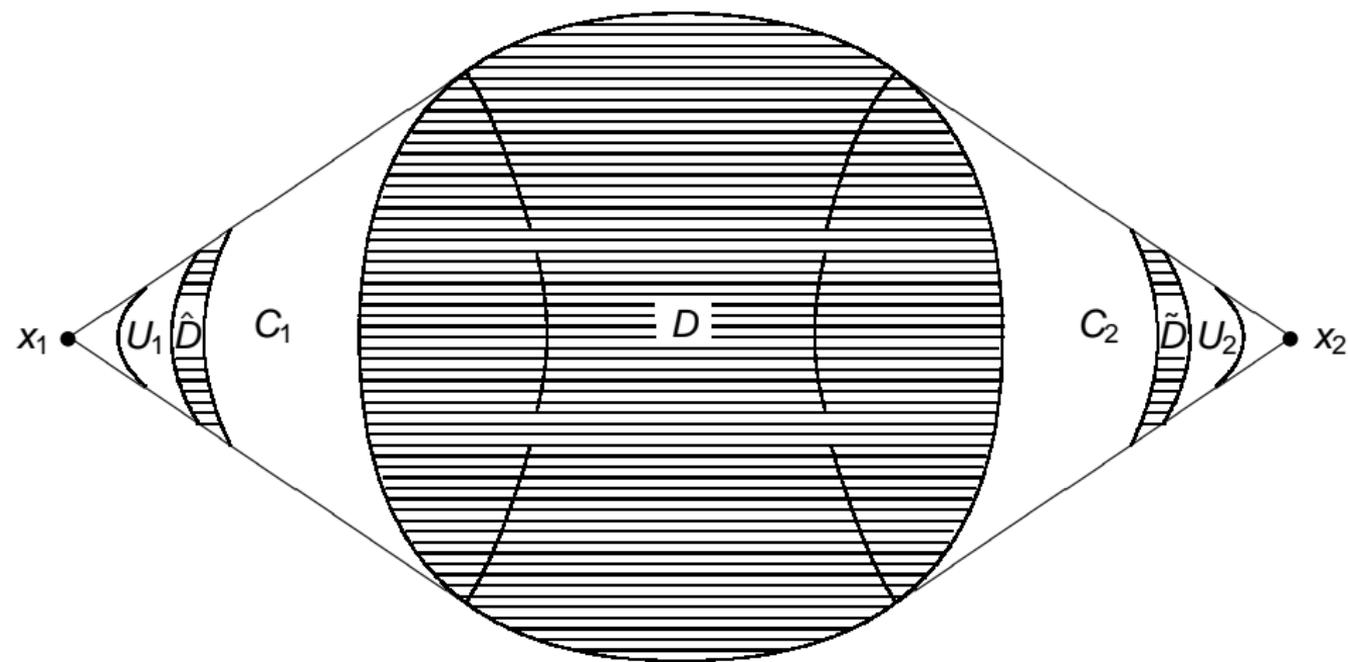
$$q(x) := \begin{cases} x - x_i & \text{se } x \in U_i, i = 1, 2, \\ \text{regularmente estendido em } \mathcal{M} \setminus (U_1 \cup U_2) \end{cases} \quad (33)$$

de acordo com a figura abaixo.



Observe que se considerarmos x_1 e x_2 opostos em relação ao centro de uma esfera e suficiente distantes um do outro, o efeito dissipativo ocorrerá em uma vizinhança arbitrariamente pequena em torno do meridiano. Isto quase atinge a optimalidade no caso similar para a equação linear devido a Bardos, Lebeau and Rauch [SICON/99] no caso específico de \mathbb{S}^2 . Contudo, observe que a nossa análise leva em consideração o *problema não linear*.

Considerações análogas podem ser feitas para um número finito de *regiões cônicas* coladas suavemente com *regiões umbílicas* disjuntas de acordo com a figura abaixo.



Generalização do resultado obtido - Novas regiões

Revisitando a segunda identidade fundamental uma vez mais agora com $\xi = (m \cdot \nu)H$ deduzimos que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (m \cdot \nu)H \left[|u_t|^2 - |\nabla_T u|^2 \right] d\mathcal{M} dt \quad (34) \\ &= \left[\int_{\mathcal{M}} (m \cdot \nu)H u_t u d\mathcal{M} \right]_0^T \\ &+ \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (\nabla_T u \cdot \nabla_T (m \cdot \nu)H) u d\mathcal{M} dt \\ &+ \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) (m \cdot \nu)H u d\mathcal{M} dt. \end{aligned}$$

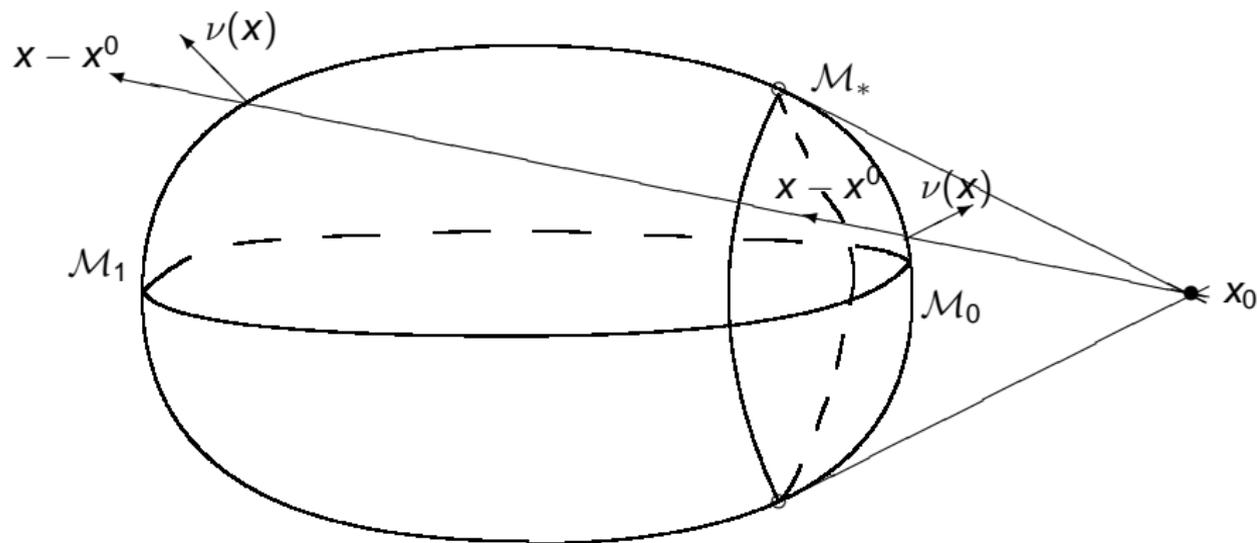
Substituindo (34) em (19) we obtemos

$$\begin{aligned}
 & \left[\int_{\mathcal{M}} u_t m_T \cdot \nabla_T u d\mathcal{M} \right]_0^T + \frac{1}{2} \left[\int_{\mathcal{M}} u_t u d\mathcal{M} \right]_0^T \quad (35) \\
 & + \int_0^T E(t) dt + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) (m_T \cdot \nabla_T u) d\mathcal{M} dt \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) u d\mathcal{M} dt = - \left[\int_{\mathcal{M}} (m \cdot \nu) H u_t u d\mathcal{M} \right]_0^T \\
 & - \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (\nabla_T u \cdot \nabla_T (m \cdot \nu) H) u d\mathcal{M} dt \\
 & - \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) (m \cdot \nu) H u d\mathcal{M} dt. \\
 & - \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (m \cdot \nu) (\nabla_T u \cdot B \cdot \nabla_T u) d\mathcal{M} dt.
 \end{aligned}$$

Condições Geométricas

As sub-superfícies \mathcal{M}_0 sem dissipação devem ter curvatura Gaussiana não negativa, ou seja, $K = k_1 k_2 \geq 0$, com $k_1, k_2 \leq 0$ conexas, e o fecho da aplicação normal de Gauss deve estar contido em uma semi-esfera aberta (a última condição é necessária de modo a garantir que $x - x^0(x) \cdot \nu(x) \leq 0$ for all $x \in \mathcal{M}_0$). A condição geométrica acima, agora em termos da curvatura Gaussiana $K = k_1 k_2$ ou invés da curvatura Média $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$ permite-nos generalizar nossos resultados prévios. Note que sub-superfícies umbílicas e cônicas satisfazem as condições acima. Além disso, podemos evitar novas sub-superfícies sem dissipação. Veja figura abaixo.

\mathcal{M}_0 não é necessariamente umbílica - pode ser uma "calota" por exemplo



O observador está em x_0 . O subconjunto \mathcal{M}_0 é a parte 'visível' de \mathcal{M} (como uma "CALOTA") e \mathcal{M}_1 é seu complemento. O subconjunto \mathcal{M}_* é um aberto que contém $\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_0$ e a dissipação é efetiva aí.

Podemos evitar efeitos dissipativos em superfícies cilíndricas $K = 0$ (onde $(x - x_0) \cdot \nu \leq 0$).

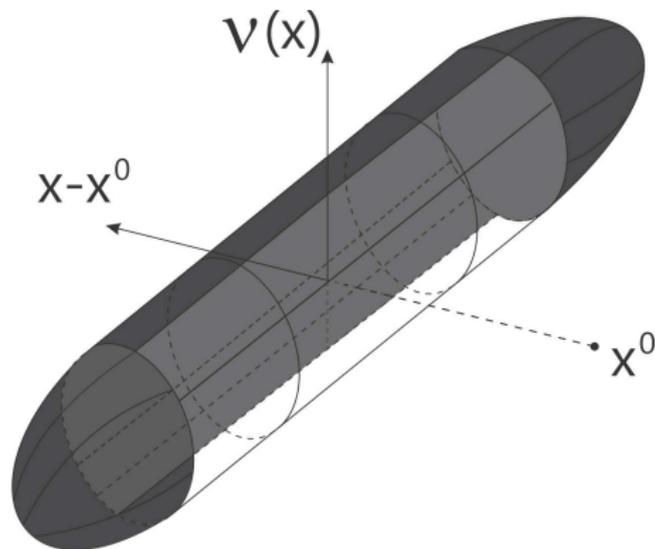
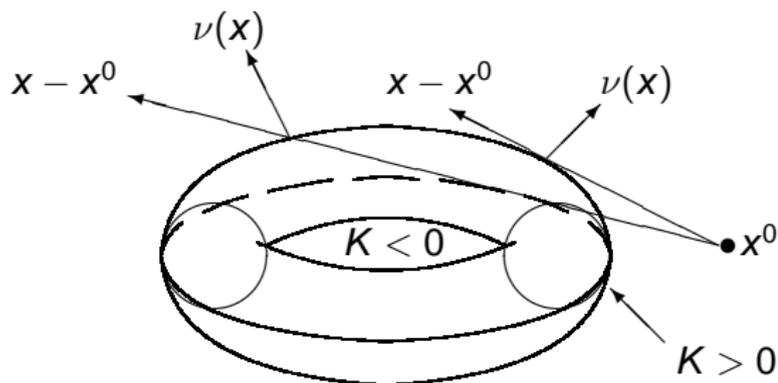


Figure: pedaços de superfícies cilíndricas $K = 0$ (onde $(x - x_0) \cdot \nu \leq 0$) não requerem efeitos dissipativos.

Toro - Podemos evitar fricção onde $m(x) \cdot \nu(x) \leq 0$ e $K \geq 0$



Se A e A' são pontos antípodas a dissipação pode ser reduzida a medida que A e A' tendem para o infinito.

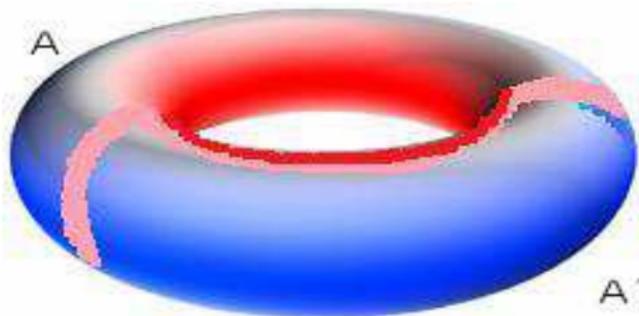


Figure: Observe que se considerarmos A e A' observadores opostos em relação ao centro do **Toro** e suficientemente distantes um do outro, a região sem dissipação pode ser considerada efetivamente em uma região maior (em azul).

Visão Intrínseca - Um resultado 'sharp'

O principal objetivo da segunda parte desta palestra é apresentar um multiplicador intrínseco que melhora consideravelmente nossos resultados anteriores *reduzindo arbitrariamente* a medida superficial onde o efeito dissipativo atua. Denotando por \mathbf{g} a métrica Riemanniana induzida sobre \mathcal{M} por \mathbb{R}^3 , provamos que para cada $\epsilon > 0$, existe um subconjunto aberto $V \subset \mathcal{M}$ e uma função regular $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\text{meas}(V) \geq \text{meas}(\mathcal{M}) - \epsilon, \text{ Hess}f \approx \mathbf{g}$$

sobre V . O novo multiplicador intrínseco $\nabla f(x)$, ao invés do multiplicador radial utilizado anteriormente $m(x) = x - x^0$, desempenhará um papel fundamental em estabelecer taxas de decaimento ufinorme para a energia, deixando uma região de área arbitrariamente grande sem dissipação.

No que segue vamos proceder como antes. A idéia da prova é feita em alguns passos e usamos como antes as duas identidades fundamentais que já foram apresentadas previamente.

O primeiro passo é considerar novamente a primeira identidade fundamental, ou seja:

Lema 1. *Seja $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular compacta orientada e sem bordo, e q um campo de vetores de classe C^1 . Então, para qualquer solução regular u de (1) temos a seguinte identidade:*

$$\begin{aligned}
& \left[\int_{\mathcal{M}} u_t q \cdot \nabla_T u \, d\mathcal{M} \right]_0^T \\
& + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (\operatorname{div}_T q) \left\{ |u_t|^2 - |\nabla_T u|^2 \right\} \, d\mathcal{M} dt \\
& + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \nabla_T u \cdot \nabla_T q \cdot \nabla_T u \, d\mathcal{M} dt \\
& + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) (q \cdot \nabla_T u) \, d\mathcal{M} dt = 0.
\end{aligned}$$

Na prova usa-se o multiplicador $q \cdot \nabla_T u$ e integração por partes.

Primeira Identidade Fundamental

Empregando a identidade acima com $q(x) = \nabla_T f$ onde $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^3 , a ser determinada posteriormente, inferimos

$$\begin{aligned} & \left[\int_{\mathcal{M}} u_t \nabla_T f \cdot \nabla_T u \, d\mathcal{M} \right]_0^T \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \Delta_{\mathcal{M}} f \left\{ |u_t|^2 - |\nabla_T u|^2 \right\} \, d\mathcal{M} dt \\ & + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (\nabla_T u \cdot \text{Hess}(f) \cdot \nabla_T u) \, d\mathcal{M} dt \\ & + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) (\nabla_T f \cdot \nabla_T u) \, d\mathcal{M} dt = 0. \end{aligned}$$

Segunda Identidade Fundamental

Lemma 4.2.3. *Seja u uma solução regular do problema (1) e $\xi \in C^1(\mathcal{M})$. Então*

$$\begin{aligned} \left[\int_{\mathcal{M}} u_t \xi u d\mathcal{M} \right]_0^T &= \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \xi |u_t|^2 d\mathcal{M} dt \\ &- \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \xi |\nabla_T u|^2 d\mathcal{M} dt \\ &- \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (\nabla_T u \cdot \nabla_T \xi) u d\mathcal{M} dt \\ &- \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) \xi u d\mathcal{M} dt. \end{aligned}$$

Na prova multiplica-se a equação pelo multiplicador ξu e integra-se por partes.

Substituindo $\xi = \alpha > 0$ na segunda identidade e combinando o resultado obtido com a primeira identidade deduzimos

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \left(\frac{\Delta_{\mathcal{M}} f}{2} - \alpha \right) |u_t|^2 d\mathcal{M} dt. \\
 & + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \left[(\nabla_T u \cdot \text{Hess}(f) \cdot \nabla_T u) + \left(\alpha - \frac{\Delta_{\mathcal{M}} f}{2} \right) |\nabla_T u|^2 \right] d\mathcal{M} dt \\
 & = - \left[\int_{\mathcal{M}} u_t \nabla_T f \cdot \nabla_T u d\mathcal{M} \right]_0^T - \alpha \left[\int_{\mathcal{M}} u_t u d\mathcal{M} \right]_0^T \\
 & - \alpha \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) u d\mathcal{M} dt \\
 & - \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) (\nabla_T f \cdot \nabla_T u) d\mathcal{M} dt.
 \end{aligned}$$

Este é o exato momento em que as propriedades da função f desempenham um papel crucial. Note que tudo o que queremos é encontrar um subconjunto V de \mathcal{M} e uma função f tais que

$$\begin{aligned}
 & C \int_0^T \int_V [u_t^2 + |\nabla_T u|^2] d\mathcal{M} dt \\
 & \leq \int_0^T \int_V \left(\frac{\Delta_{\mathcal{M}} f}{2} - \alpha \right) |u_t|^2 d\mathcal{M} dt \\
 & + \int_0^T \int_V \left[(\nabla_T u \cdot \text{Hess}(f) \cdot \nabla_T u) + \left(\alpha - \frac{\Delta_{\mathcal{M}} f}{2} \right) |\nabla_T u|^2 \right] d\mathcal{M} dt,
 \end{aligned}$$

para alguma constante positiva C , uma vez que α seja escolhido propriamente.

Assumindo, por um momento, que a última desigualdade ocorre, obtemos

$$\begin{aligned}
 2C \int_0^T E(t) dt &\leq C \int_0^T \int_{\mathcal{M} \setminus V} [u_t^2 + |\nabla_T u|^2] d\mathcal{M} dt & (36) \\
 &+ \left| \left[\int_{\mathcal{M}} u_t \nabla_T f \cdot \nabla_T u d\mathcal{M} \right]_0^T \right| + \alpha \left| \left[\int_{\mathcal{M}} u_t u d\mathcal{M} \right]_0^T \right| \\
 &+ \left| \alpha \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) u d\mathcal{M} dt \right| \\
 &+ \left| \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) (\nabla_T f \cdot \nabla_T u) d\mathcal{M} dt \right|.
 \end{aligned}$$

A desigualdade acima é controlada utilizando-se um procedimento tradicional conforme já mencionado anteriormente. A idéia principal é considerar a área dissipativa, a saber, \mathcal{M}_* , contendo o conjunto $\mathcal{M} \setminus V$. É importante observar que a região \mathcal{M}_* torna-se arbitrariamente pequena a medida que V torna-se arbitrariamente grande.

Os próximos passos são devotos a construção de tal função f tão bem quanto do conjunto V de \mathcal{M} tal que a desejada desigualdade ocorre.

Construção da função f localmente

Seja \mathcal{M} uma variedade Riemanniana compacta n -dimensional (sem fronteira) com métrica Riemanniana \mathbf{g} de class C^2 . Seja ∇ a conexão de Levi-Civita. Fixe $p \in \mathcal{M}$. Nosso objetivo é construir uma função $f : V_p \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\text{Hess}f \approx \mathbf{g}$ e $\inf_{x \in V_p} |\nabla f(x)| > 0$, onde V_p é uma vizinhança de p e a Hessiana de f é vista como uma forma bilinear definida no espaço tangente $T_p\mathcal{M}$ de \mathcal{M} em p .

Começamos com uma base ortonormal (e_1, \dots, e_n) do T_pM . Defina um sistema normal de coordenadas (x_1, \dots, x_n) em uma vizinhança \tilde{V}_p de p tal que $\partial/\partial x_i(p) = e_i(p)$ para todo $i = 1, \dots, n$. É bem conhecido que neste sistema de coordenadas temos que $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$, onde Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel com respeito a (x_1, \dots, x_n) .

The Hessian with respect to (x_1, \dots, x_n) is given by

$$\text{Hess}f \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

O Laplaciano de f é o traço da Hessiana com respeito a métrica \mathbf{g} . Se \mathbf{g}_{ij} denota as componentes da métrica Riemanniana com respeito a (x_1, \dots, x_n) e \mathbf{g}^{ij} são as componentes da matriz inversa de \mathbf{g}_{ij} , então o Laplaciano de f é dado por

$$\Delta f = \sum_{i,j} \mathbf{g}^{ij} \text{Hess}f \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

Consideremos a função $f : \tilde{V}_p \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x_1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

É imediato que $\Delta f(p) = n$ e $|\nabla f(p)| = 1$. Além disso, $\text{Hess}f(p) = \mathbf{g}(p)$, o que implica que

$$\text{Hess}f(p)(v, v) = |v|_p^2.$$

Estamos interessados em encontrar uma vizinhança $V_p \subset \tilde{V}_p$ de p e uma constante C estritamente positiva tais que

$$\begin{aligned}
& C \int_0^T \int_{V_p} (|\nabla u|^2 + u_t^2) d\mathcal{M} dt \\
& \leq \int_0^T \int_{V_p} \left[\text{Hess}f(\nabla u, \nabla u) + \left(\alpha - \frac{\Delta f}{2} \right) |\nabla u|^2 + \left(\frac{\Delta f}{2} - \alpha \right) u_t^2 \right] d\mathcal{M} dt
\end{aligned} \tag{37}$$

para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.

Afirmamos que se considerarmos $\alpha = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$ e $C = 1/4$ obtemos a desigualdade desejada, o que significa que é suficiente provarmos que existe $V_p \subset \tilde{V}_p$ verificando

$$\int_0^T \int_{V_p} \text{Hess}f(\nabla u, \nabla u) + \left(\frac{n}{2} - \frac{3}{4} - \frac{\Delta f}{2} \right) |\nabla u|^2 d\mathcal{M} dt \geq 0$$

e

$$\int_0^T \int_{V_p} \left(\frac{\Delta f}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{4} \right) u_t^2 d\mathcal{M} dt \geq 0.$$

De modo a provar a existência de um subconjunto $V_p \subset \tilde{V}_p$ onde a primeira desigualdade ocorre, seja θ_1 um campo regular da forma bilinear simétrica sobre \tilde{V}_p definido por

$$\theta_1(X, Y) = \text{Hess}f(X, Y) + \left(\frac{n}{2} - \frac{3}{4} - \frac{\Delta f}{2} \right) \mathbf{g}(X, Y)$$

onde X e Y são campos vetoriais sobre \tilde{V}_p .

É claramente uma forma bilinear positivo definida sobre p já que $Hessf(p)(X, Y) = \mathbf{g}(p)(X, Y)$ e

$$\theta_1(p)(X, Y) = \frac{1}{4}\mathbf{g}(p)(X, Y).$$

Portanto, existe uma vizinhança \widehat{V}_p tal que θ_1 é positiva definida e

$$\int_0^T \int_{\widehat{V}_p} Hessf(\nabla u, \nabla u) + \left(\frac{n}{2} - \frac{3}{4} - \frac{\Delta f}{2} \right) |\nabla u|^2 d\mathcal{M} dt \geq 0.$$

Para provar a existência de $\check{V}_\rho \subset \tilde{V}_\rho$ tal que a desigualdade desejada ocorre é mais fácil. É suficiente notar que em p temos que

$$\left(\frac{\Delta f(p)}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}$$

e a existência de $\check{V}_\rho \subset \tilde{V}_\rho$ é imediata. Além disso, podemos eventualmente escolher uma vizinhança menor V_ρ tal que $\inf_{x \in V_\rho} |\nabla f(x)| > 0$. Desta forma, a existência de $V_\rho \subset \tilde{V}_\rho$ tal que $\inf_{x \in V_\rho} |\nabla f(x)| > 0$ and (37) ocorre está provada.

No que segue, \bar{V} denota o fecho de V e ∂V denota a fronteira de V . Quando $\bar{V} \subset W$ é limitado, dizemos que V está compactamente contido em W e denotamos por $V \subset\subset W$.

Theorem

Seja (M, \mathbf{g}) uma variedade Riemanniana de dimensão dois. Então, para cada $\epsilon > 0$, existe uma família finita $\{V_i\}_{i=1\dots k}$ de conjuntos abertos com fronteira regular, funções regulares $f_i : \bar{V}_i \rightarrow \mathbb{R}$ e uma constante $C > 0$ tal que

- 1 Os subconjuntos \bar{V}_i são dois a dois disjuntos;
- 2 $\text{med}(\bigcup_{i=1}^k V_i) \geq \text{med}(M) - \epsilon$;
- 3 A desigualdade (37) ocorre para todo f_i ;
- 4 $\inf_{x \in V_i} |\nabla f(x)| > 0$ para todo $i = 1, \dots, k$.

De modo a provar tal teorema consideremos os seguintes passos:

Inicialmente, é possível obter subconjuntos abertos $\{\widetilde{W}_j\}_{j=1,\dots,s}$ com fronteiras regulares e uma família de funções regulares $\{\widetilde{f}_j : \widetilde{W}_j \rightarrow \mathbb{R}\}_{j=1,\dots,s}$ tais que $\{\widetilde{W}_j\}_{j=1,\dots,s}$ é uma cobertura de \mathcal{M} e cada \widetilde{f}_j satisfaz a desigualdade (37). Além disso, podemos escolher \widetilde{W}_j de modo que suas fronteiras não se interceptam transversalmente e três ou mais fronteiras não se interceptam no mesmo ponto.

Defina $A := \bigcup_{j=1}^s \partial \widetilde{W}_j$. Logo, $\mathcal{M} \setminus A$ é uma união disjunta de subconjuntos conexos abertos $\bigcup_{i=1}^k W_i$ tais que ∂W_i é uma curva regular por partes.

Cada W_i está contido em algum \widetilde{W}_j . Logo, para cada W_i , escolha uma função $\hat{f}_i := \widetilde{f}_j|_{W_i}$.

Os subconjuntos abertos $V_i, i = 1, \dots, k$, que estamos procurando são subconjuntos de W_i . Podemos escolhê-los de modo que

- 1 $V_i \subset\subset W_i$;
- 2 ∂V_i is smooth;
- 3 $\text{med}(W_i) - \text{med}(V_i) < \epsilon/k$.

Finalmente, se definirmos $f_i = \hat{f}_i|_{V_i}$, o teorema está provado.

Theorem

Seja $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ uma variedade Riemanniana de dimensão dois. Fixe $\epsilon > 0$. Então, existe uma função regular $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a desigualdade (37) ocorre bem como a condição $\inf_{x \in V_i} |\nabla f(x)| > 0$ em um subconjunto V com $\text{med}(V) \geq \text{med}(\mathcal{M}) - \epsilon$.

De modo a dar uma idéia da prova, consideremos o Teorema 3 e a construção feita em sua prova. Denotemos

$\lambda := \min_{i \neq j} \text{dist}(V_i, V_j) > 0$. Consideremos uma vizinhança tubular

V^δ of $V = \cup_{i=1}^k V_i$ de pontos cuja distância é menor ou igual a $\delta < \lambda/4$. Então é possível definir uma função regular (cut-off) dada por

$\eta : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$\eta(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x} \in V \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \in \mathcal{M} \setminus V^\delta \\ \text{between 0 and 1} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

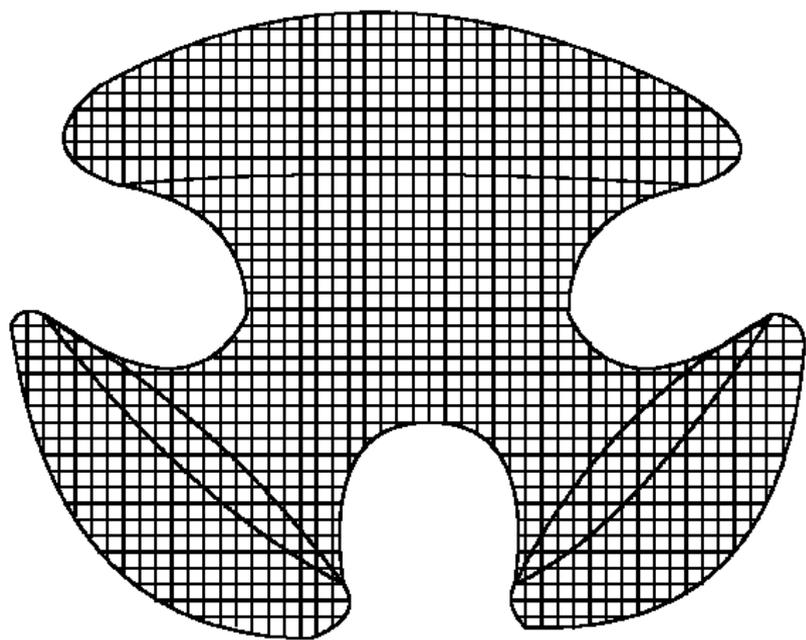
Agora, note que $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \hat{f}_i(\mathbf{x})\eta(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in W_i; \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é regular e satisfaz a desigualdade (37) como também a condição $\inf_{\mathbf{x} \in V} |\nabla f(\mathbf{x})| > 0$. Além disso, a desigualdade $\text{med}(V) \geq \text{med}(\mathcal{M}) - \epsilon$ ocorre, o que finaliza a prova.

Observações Finais

Embora este *resultado intrínseco* seja “sharp” com respeito a medida superficial onde a dissipação age, nós não temos qualquer controle a respeito das regiões que podem estar livres de dissipação. As componentes conexas de V podem ser arbitrariamente pequenas conforme ilustra a figura seguinte.



A área não dissipativa (em branco) é arbitrariamente grande enquanto a área demarcada (em preto) contém efeitos dissipativos e pode ser considerada arbitrariamente pequena, mas ambas totalmente distribuídas sobre M .



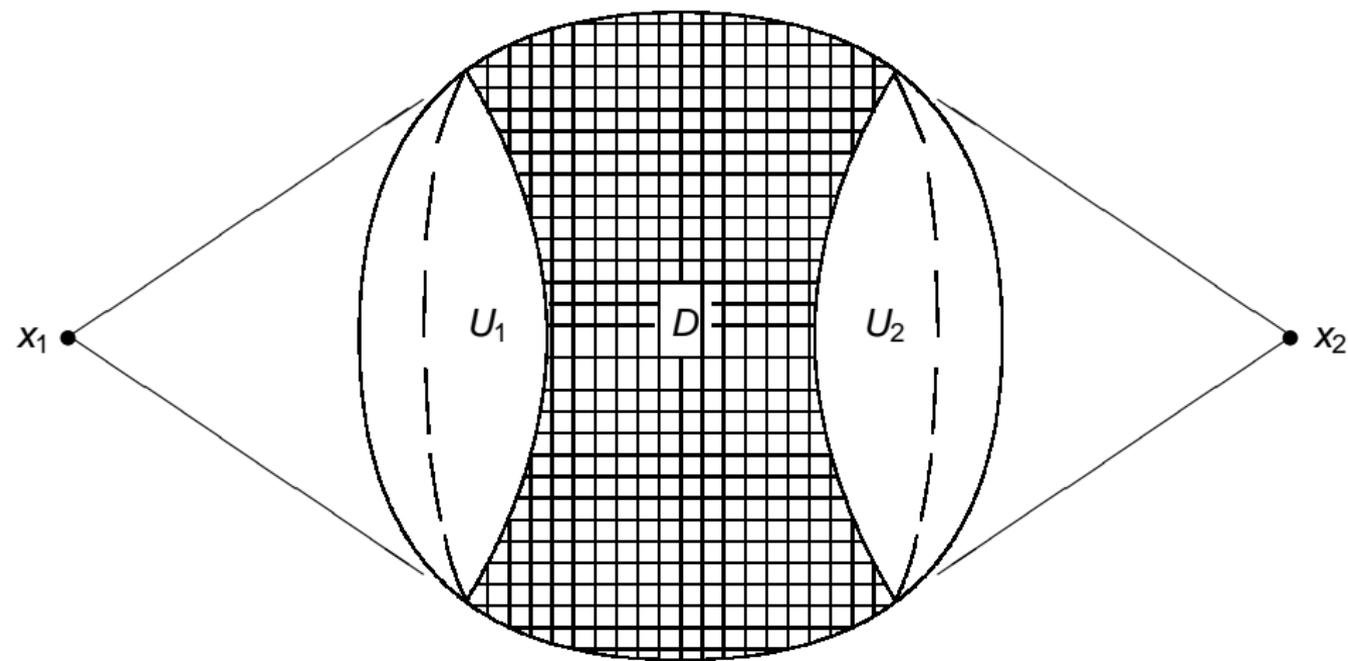
Em outra direção, a *visão externa* nos diz que certos tipos de sub-superfícies (umbílicas, cônicas, cilíndricas, etc ..) em \mathbb{R}^3 podem ser deixados livres de efeitos dissipativos.

Desta forma, o próximo passo é combinar ambas as técnicas e tentar colocar dissipação em uma região arbitrariamente pequena de modo que conjuntos com propriedades interessantes fiquem livre de efeitos dissipativos.

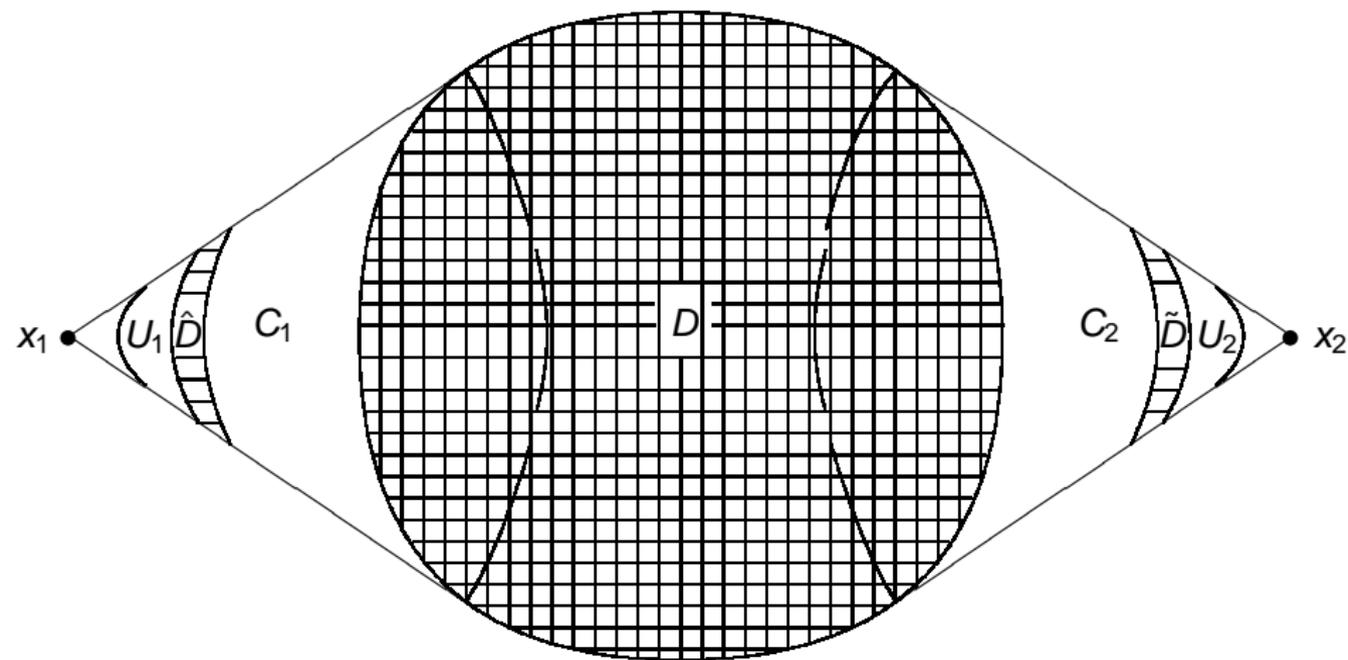
Com efeito, combinando as técnicas desenvolvidas nos artigos [MAA/09] and [TRANS AMS/09] podemos reduzir arbitrariamente a medida superficial do efeito dissipativo. Basta considerarmos o campo vetorial q definido por

$$q(x) := \begin{cases} x - x_i & \text{se } x \in U_i, i = 1, 2, \\ \nabla f(x), Hess(f) \approx \mathbf{g}, & \text{se } x \text{ em algum pequeno domínio} \\ \text{branco de } D \\ \text{smoothly extended otherwise} \end{cases}$$

onde \mathbf{g} é a métrica Riemanniana sobre \mathcal{M} (veja figura abaixo).



Considerações análogas podem ser feitas para um número finito de *regiões cônicas* de acordo com a figura abaixo.



Generalizações para Variedades Riemannianas Compactas

Nós gostaríamos de enfatizar que os resultados previamente apresentados para superfícies foram generalizados para variedades Riemannianas compactas n -dimensionais (M, \mathbf{g}) com ou sem bordo (ver Domingos Cavalcanti, Soriano, Fukuoka, C. [ARMA]). Nós procedemos como segue:

- 1 Nós provamos $x \in M$ (incluindo o caso $x \in \partial M$), existe uma vizinhança que pode ficar livre de efeitos dissipativos;
- 2 Nós provamos que uma porção precisa de domínios radialmente simétricos podem ficar livres de efeitos dissipativos;
- 3 Seja $\varepsilon > 0$ e V_1, \dots, V_k domínios b como em (i) e (ii) cujos fechos são disjuntos dois a dois. Nós provamos que existe um $V \supset \cup_{i=1}^k V_i$ que pode ficar livre de efeitos dissipativos e tal $meas(V) \geq meas(M) - \varepsilon$ e $meas(V \cap \partial M) \geq meas(\partial M) - \varepsilon$.

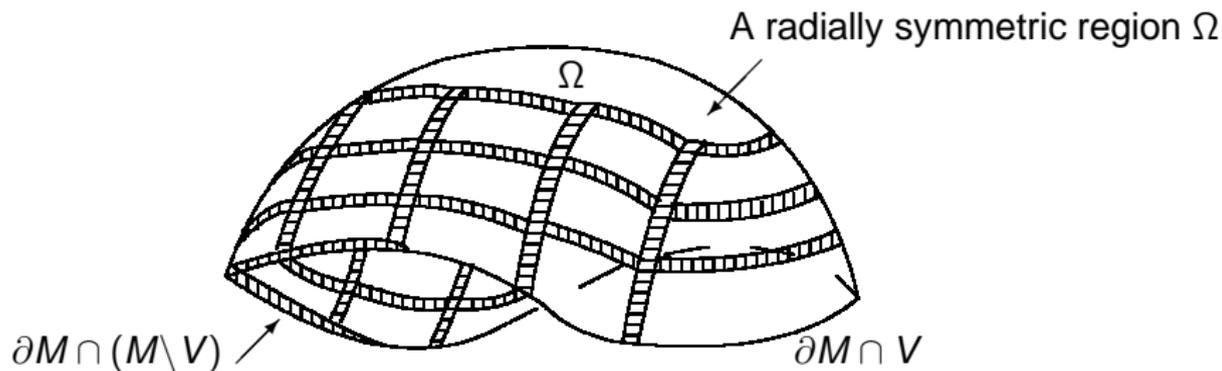


Figure: A região demarcada $M \setminus V$ (em preto) ilustra a região de damping sobre a variedade compacta M com fronteira ∂M , a qual pode ser considerada *tão pequena quanto desejado*. Ω é uma região radialmente simétrica sem damping. A medida de $\partial M \cap (M \setminus V)$ pode ser considerada arbitrariamente pequena.

Um Método Alternativo - Recuperação do resultado ótimo

Consideremos a equação da onda sujeita a uma dissipação não linear e localizada:

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y + a(x)g(y_t) = 0 & \text{em } \mathcal{M} \times (0, \infty), \\ y = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{M} \times (0, \infty), \\ y(0) = y_0, y_t(0) = y_1 & \text{em } \mathcal{M}, \end{cases} \quad (38)$$

onde $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ é uma variedade Riemanniana compacta n -dimensional com fronteira suave.

Considerando $g \equiv 0$, ou seja, quando (38) for linear, assumiremos que:

Principal Hipótese

Existe (ω, T_0) , $T_0 > 0$, $\omega \subset\subset \mathcal{M}$, tal que a seguinte *desigualdade de observabilidade* ocorre:

$$\|y_1\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 + \|\nabla y_0\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 \leq C \int_0^T \int_{\omega} |\partial_t y(x, t)|^2 dx dt, \quad (39)$$

para algum $C = C(\omega, T_0)$ e para todo $T > T_0$.

Uma condição *necessária e suficiente* para (39) ocorrer é precisamente a bem conhecida *condição geométrica de controle (CGC)* devido a Bardos, Lebeau and Rauch [SICON/99], a saber:

Condição Geométrica de Conrole-CGC

Let ω um subconjunto aberto de \mathcal{M} e suponha que existe $T_0 > 0$ tal que qualquer geodésica encontre $\bar{\omega}$ em um instante $t < T_0$.

Note que a solução y do problema (38)

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y + a(x)g(y_t) = 0 & \text{em } \mathcal{M} \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{M} \times (0, \infty) \\ y(x, 0) = y_0(x); y_t(x, 0) = y_1(x) & \text{em } \mathcal{M}, \end{cases} \quad (40)$$

pode ser escrita como a soma $y = \varphi + z$ dos seguintes problemas lineares:

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - \Delta\varphi = 0 & \text{em } \mathcal{M} \times (0, \infty) \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{M} \times (0, \infty) \\ \varphi(x, 0) = y_0(x), \varphi_t(x, 0) = y_1(x) & \text{em } \mathcal{M} \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} z_{tt} - \Delta z = -a(x)g(y_t) & \text{in } \mathcal{M} \times (0, \infty) \\ z = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{M} \times (0, \infty) \\ z(x, 0) = z_t(x, 0) = 0. & \text{em } \mathcal{M}. \end{cases}$$

O próximo passo importante para determinar a estabilização do problema 38 é o resultado bem conhecido que estabelece que a aplicação $\{z_0, z_1, f\} \mapsto \{z, z_t\}$ a qual associa os dados iniciais $\{z_0, z_1, f\} \in H_0^1(M) \times L^2(M) \times L^1(0, T; L^2(M))$ com a única solução do problema linear

$$\begin{cases} z_{tt} - \Delta z = f & \text{em } \mathcal{M} \times (0, \infty) \\ z = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{M} \times (0, \infty) \\ z(x, 0) = z_0, z_t(x, 0) = z_1 & \text{em } \mathcal{M}, \end{cases}$$

é linear e contínua, ou seja,

$$\begin{aligned} & \|z\|_{L^\infty(0, T; H_0^1(\mathcal{M}))} + \|z_t\|_{L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{M}))} \\ & \leq \|z_0\|_{H_0^1(\mathcal{M})} + \|z_1\|_{L^2(\mathcal{M})} + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\mathcal{M}))}. \end{aligned} \quad (41)$$

Observe que em nosso caso específico $z_0 = z_1 = 0$ e $f = -a(x)g(y_t)$.

Lembrando que $a(x) \geq a_0 > 0$ em ω , combinando (39), (41) e tendo em mente que $z_0 = z_1 = 0$ e $f = a(x)g(y_t)$ deduzimos

$$\begin{aligned}
 E_y(T) &= \frac{1}{2}(\|y(T)\|_{L^2(M)}^2 + \|\nabla y(T)\|_{L^2(M)}^2) \\
 &\leq \frac{1}{2}(\|y_0\|_{L^2(M)}^2 + \|\nabla y_0\|_{L^2(M)}^2) \\
 &\leq C \int_0^T \int_{\omega} |\varphi_t(x, t)|^2 dx dt \\
 &\leq \tilde{C} \int_0^T \int_{\omega} a(x) |\varphi_t(x, t)|^2 dx dt \\
 &\leq \hat{C} \int_0^T \int_{\omega} a(x) \left[|y_t(x, t)|^2 + |z_t(x, t)|^2 \right] dx dt \\
 &\leq C' \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) \left[|y_t(x, t)|^2 + |g(y_t(x, t))|^2 \right] dx dt,
 \end{aligned}$$

o que estabelece a desigualdade desejada.

MUITO OBRIGADO
POR SUA ATENÇÃO

-  F. Alabau-Boussouira, Convexity and weighted integral inequalities for energy decay rates of nonlinear dissipative hyperbolic systems, *Appl. Math. Optim.* 51(1), (2005), 61-105.
-  C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch, Control and stabilisation de l'équation des ondes, Appendix II in J. L. Lions controllabilité exacte des systèmes distribués, Collection RMA, Vol. 8, Masson, Paris, 1988.
-  R. Bey, A. Heminna and J. P. Lohéac, Boundary stabilization of the linear elastodynamic system by a Lyapunov -type method, *Revista Matemática Complutense* 16(2), (2003), 417-441.
-  M. M. Cavalcanti and V. N. Domingos Cavalcanti, Existence and asymptotic stability for evolution problems on manifolds

with damping and source terms, *J. Math. Anal. Appl.* 291(1), (2004), 109-127.

-  M. M. Cavalcanti and H. P. Oquendo, Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation. *SIAM J. Control Optim.* 42 (2003), no. 4, 1310–1324.
-  D. Andrade, M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, H. P. Oquendo . Existence and asymptotic stability for viscoelastic evolution problems on compact manifolds.*J. Comput. Anal. Appl.*, v. 8, n. 3, p. 173-193, 2006.
-  D. Andrade, M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, H. P. Oquendo . Existence and asymptotic stability for viscoelastic evolution problems on compact manifolds (part II). *J. Comput. Anal. Appl.*, v. 8, n. 3, p. 287-301, 2006.
-  M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti and I. Lasiecka, Wellposedness and optimal decay rates for wave

equation with nonlinear boundary damping-source interaction, *Journal of Differential Equations*, **236** (2007), 407-459.

-  M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, R. Fukuoka and J. A. Soriano, Uniform stabilization of the wave equation on compact surfaces and locally distributed damping, (2007) - *Methods Appl. Anal.* (2008) (to appear).
-  M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, R. Fukuoka, J. A. Soriano, Asymptotic stability of the wave equation on compact surfaces and locally distributed damping-a sharp result. *Trans. Amer. Math. Soc.* 361 (2009), no. 9, 4561-4580.
-  M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, R. Fukuoka, J. A. Soriano, Asymptotic stability of the wave equation on compact manifolds and locally distributed damping: a sharp

result. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 197 (2010), no. 3, 925-964.



H. Christianson, Semiclassical non-concentration near hyperbolic orbits, *J. Funct. Anal.* 246 (2007), no. 2, 145-195.



C. M. Dafermos, Asymptotic behavior of solutions of evolution equations. Nonlinear evolution equations (Proc. Sympos., Univ. Wisconsin, Madison, Wis., 1977), pp. 103–123, Publ. Math. Res. Center Univ. Wisconsin, 40, Academic Press, New York-London, 1978.



M. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, New Jersey, 1976.



A. Hemmina, Stabilization frontière de problèmes de Ventcel. (Boundary stabilization of Venttsel problems), *ESAIM, Control Optim. Calc. Var.* 5, (2000), 591-622.

-  A. Hemmina, Exact controllability of the linear elasticity system with evolutive Ventcel conditions , *Port. Math.* 58(3), (2001), 271-315.
-  A. Heminna, Contrôlabilité exacte d'un problème avec conditions de Ventcel évolutives pour le système linéaire del'élasticité. (French) [Exact controllability of a problem with evolutive Venttsel conditions for the linear elasticity system] *Rev. Mat. Complut.* 14 (2001), no. 1, 231–270.
-  M. Hitrik, Expansions and eigenfrequencies for damped wave equations, *Journées "Équations aux Dérivées Partielles" (Plestin-les-Grèves, 2001)*, Exp. No. VI, 10 pp., Univ. Nantes, Nantes, 2001.
-  A. Khemmoudj and M. Medjden, Exponential Decay for the Semilinear Damped Cauchy-Ventcel Problem, *Bol. Soc. Paran. Mat.*, 22(2)(2004), 97-116.

-  K. Lemrabet, Problème aux limites de Ventcel dans un domaine non régulier, CRAS Paris, t.300, Série I, n^o 15, 1985, 531-534.
-  K. Lemrabet, Etude de divers Problèmes aux limites de Ventcel d'origine physique ou mécanique dans des domaines non réguliers, Thèse, USTHB, Alger, (1987).
-  K. Lemrabet et D. E. Teniou, Controlabilité exacte pour l'équation des ondes avec conditions aux limites de type Cauchy-Ventcel, Publication de l'institut de Mathématiques, U.S.T.H.B.
-  I. Lasiecka and D. Tataru, Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary damping, Differential and integral Equations, 6 (1993), 507-533.

-  I. Lasiecka and R. Triggiani, Uniform stabilization of the wave equation with Dirichlet or Neumann feedback control without geometric conditions, *Appli. Math. Optim.*, 25 (1992), 189-124
-  J. L. Lions, *Controlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués, tome 1*, Masson, 1988.
-  J. L. Lions, *Controlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués, tome 2*, Masson, 1988.
-  J.L.Lions-E.Magenes, *Problèmes Aux Limites Non Homogènes et Applications*, Dunod, Paris, 1968, Vol. 1.
-  K. Liu, Localy distributed control and damping for conservative systems. *SIAM J. Control and Optimization* 35(5) (1997), 1574-1590.

-  P. Martinez, A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems with localized damping. *Rev. Mat. Complutense* 12(1) (1999), 251-283.
-  M. Nakao, Decay of solutions of the wave equation with a local nonlinear dissipation. *Math. Ann.*, 305 (1996), 403-417.
-  M. Nakao, Decay of solutions of the wave equation with local degenerate dissipation. *Israel J. of Maths.* 95 (1996), 25-42.
-  M. Nakao, Decay and global existence for nonlinear wave equations with localized dissipations in general exterior domains. *New trends in the theory of hyperbolic equations*, 213–299, *Oper. Theory Adv. Appl.*, 159, Birkhäuser, Basel, 2005.

-  M. Nakao, Energy decay for the wave equation with boundary and localized dissipations in exterior domains, *Math. Nachr.* **278**(7-8), (2005), 771-783.
-  J. Rauch - M. Taylor, Exponential decay of solutions to hyperbolic equations in bounded domains.
-  J. C. Nedelec, Ondes acoustiques et électromagnétiques, équations intégrales. Cours de DEA, Ecole polytechnique, Palaiseau. France 1996.
-  J. Rauch - M. Taylor, Decay of solutions to nondissipative hyperbolic systems on compact manifolds. *Comm. Pure Appl. Math.* **28**(4) (1975), 501-523.
-  J. Rauch - M. Taylor, Exponential decay of solutions to hyperbolic equations in bounded domains.

-  R. Triggiani and P. F. Yao, Carleman estimates with no lower-Order terms for general Riemannian wave equations. Global uniqueness and observability in one shot, *Appl. Math. and Optim* **46** (Sept./Dec. 2002), 331-375. Special issue dedicated to J. L. Lions.
-  D. Toundykov, Optimal decay rates for solutions of nonlinear wave equation with localized nonlinear dissipation of unrestricted growth and critical exponents source terms under mixed boundary, *Nonlinear Analysis T. M. A.* **67**(2) (2007), 512-544.
-  E. Zuazua, Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping, *Commun. Partial Differential Equations* **15**(2), (1990), 205-235.