Números normais, anormais e selvagens

Vilton Pinheiro, UFBA

Bienal, Maceió, 2014

Esta palestra fará alguma conexões entre Teoria dos Números, Teoria das Medidas e Sistemas Dinâmicos. Falaremos falaremos sobre vários tipos de números reais: racionais, irracionais, algébricos, Liouville, normais, anormais e etc.. Faremos conexões destes números com órbitas de Sistemas Dinâmicos, em particular órbitas de comportamento histórico. Introduziremos o conceito de números selvagens. A palestra é de divulgação e os conceitos serão introduzidos de maneira intuitiva.

Números naturais

Números naturais

1, 2, 3, 4, ...

Números naturais

1, 2, 3, 4, ...

obs: contagem é não é característica humana.

macacos, corvos e outros animais contam

Números inteiros

$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

Números racionais

1/2, 3/4, -1/17,

"Número racional é todo o número que pode ser representado por uma razão (ou fração) entre dois números inteiros."

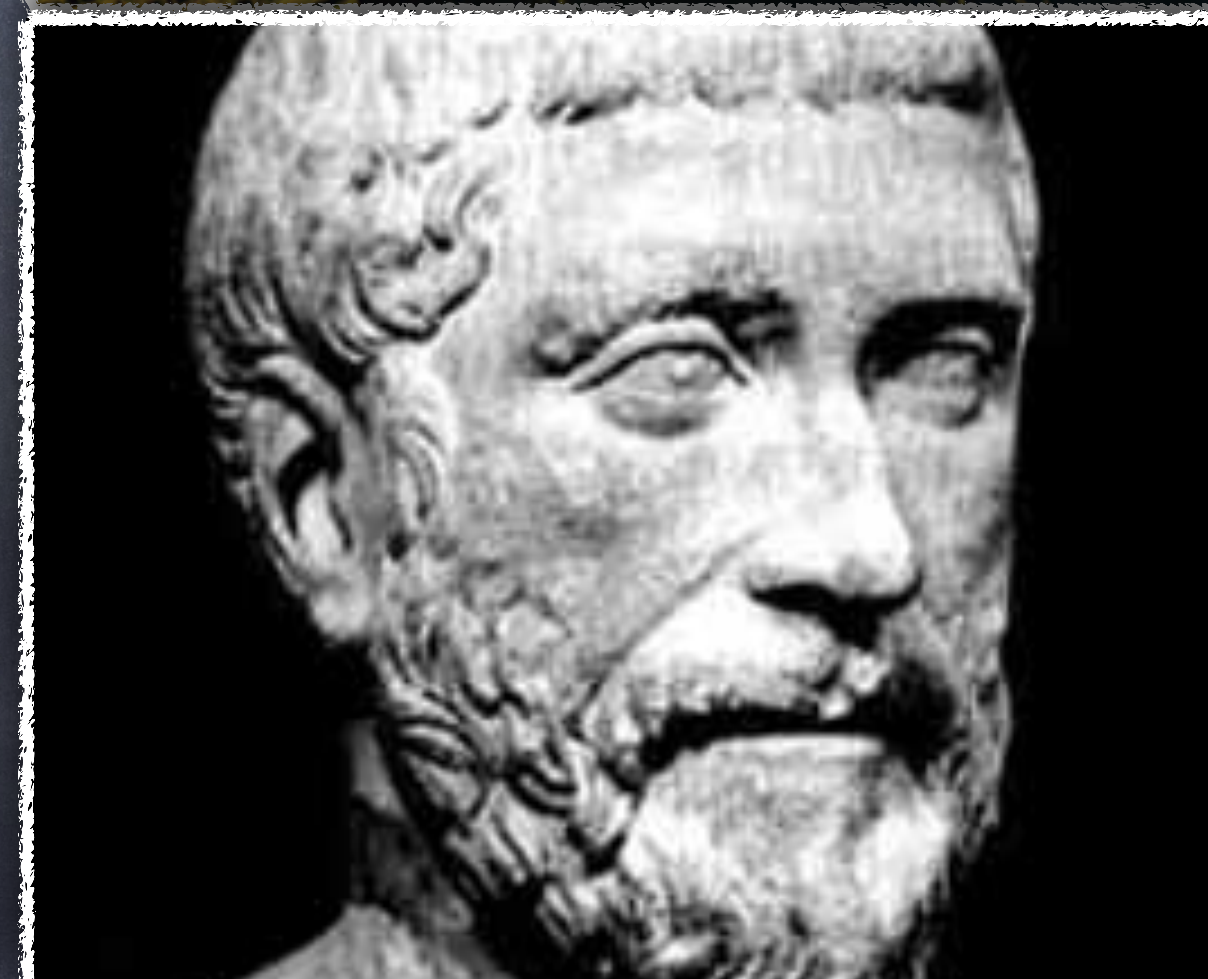
Wikipédia
A enciclopédia livre

Definição do dicionário da palavra "racional"

- relativo à razão
- que procede da razão
- que tem por objeto a razão
- aceitável pela razão, razoável
- em que há coerência
- que demonstra bom senso ou juízo ponderado, sensato

Números irracionais

$\sqrt{2}$ $\quad e \quad$ π



	1	2	3	4	5	6	7	…
1								…
2								…
3								…
4								…
5								…
6								…
7								…

	1	2	3	4	5	6	7	...
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	...
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	2/7	...
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6	3/7	...
4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6	4/7	...
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6	5/7	...
6	6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6	6/7	...
7	7/1	7/2	7/3	...	...	...	...	...

	1	2	3	4	5	6	7	...
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	...
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	2/7	...
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6	3/7	...
4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6	4/7	...
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6	5/7	...
6	6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6	6/7	...
7	7/1	7/2	7/3	...	...	...	...	...

Números algébricos

um número algébrico é qualquer número real ou complexo que é solução de alguma equação polinomial com coeficientes inteiros

Ou seja, p é algébrico se f(p)=0 para alguma função da forma

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n$$

onde a_0, a_1, a_2, ..., a_n são inteiros

Todos os racionais são algébricos

$\frac{p}{q}$ é solução de $px-q=0$

Muitos irracionais são algébricos

$\sqrt{2}$ é solução de $x^2-2=0$

Se um número não for algébrico, ele é chamando de

transendente

Expansão em decimais

Para simplificar, vamos nos concentrar em reais entre 0 e 1, ou seja, no intervalo [0,1]

Expansão em decimais

Todo número real $x \in [0,1]$ pode ser escrito na forma

$$x = 0.x_1 x_2 x_3 x_4 \cdots$$

$$= \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \frac{x_3}{10^3} + \cdots$$

com $x_j \in \{0, 1, \cdots, 9\}$ para todo $j \geq 1$

Expansão em decimais

Exemplo:

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333333333333333\ldots$$

$x_1=3$

$x_2=3$ $x_3=3$ $x_4=3$ $x_5=3$

Expansão em decimais

Exemplo:

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857142857142857\ldots$$

$x_1 = 1$

$x_2 = 4$

$x_3 = 2$

$x_4 = 8$

$x_5 = 5$

Expansão em decimais

Exemplo:

$$\frac{\sqrt{2}}{10} = 0{,}1414213562373095\ldots$$

$x_1=1$

$x_2=4$ $x_3=1$ $x_4=4$ $x_5=2$

Expansão em decimais

Exemplo:

$$\frac{\pi}{10} = 0.314159265358979 3\ldots$$

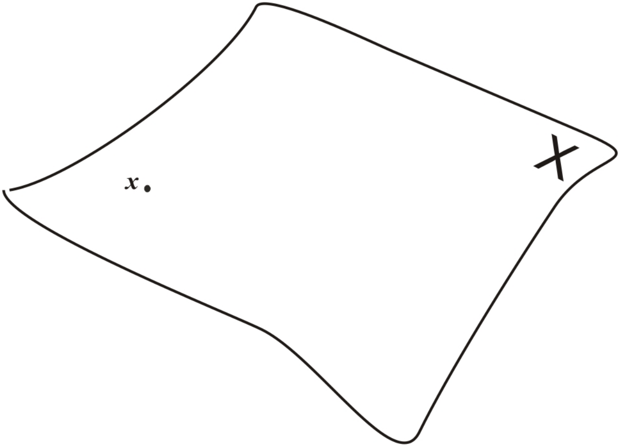
$x_1 = 3$

$x_2 = 1$ $x_3 = 4$ $x_4 = 1$ $x_5 = 5$

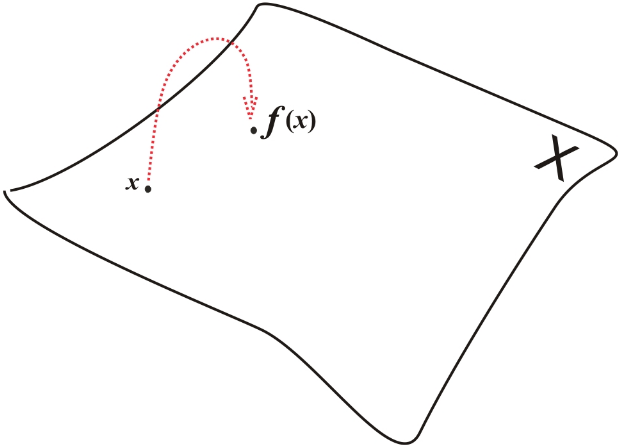
Vamos mudar de assunto!

Vamos falar de Dinâmica

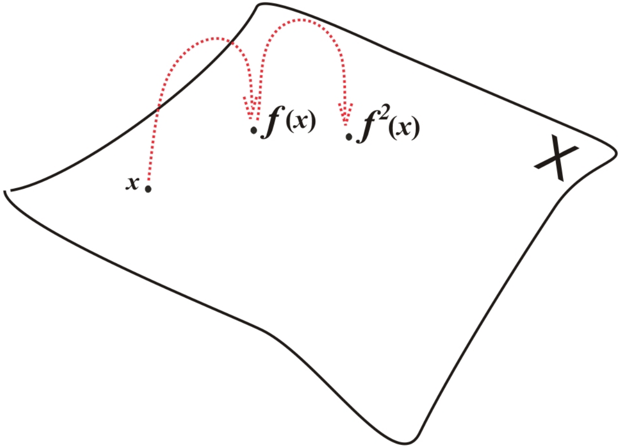
Dinâmica discreta: iteração



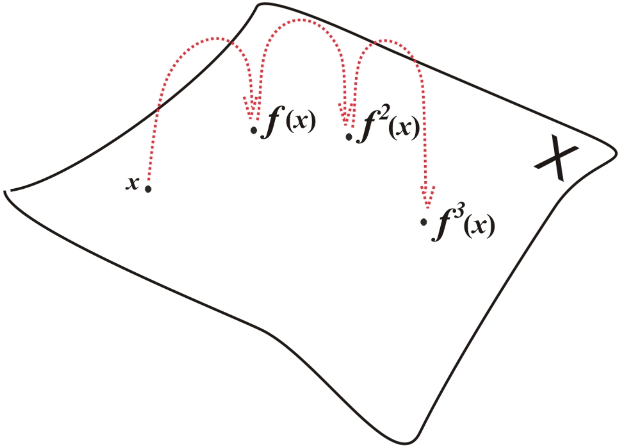
Dinâmica discreta: iteração



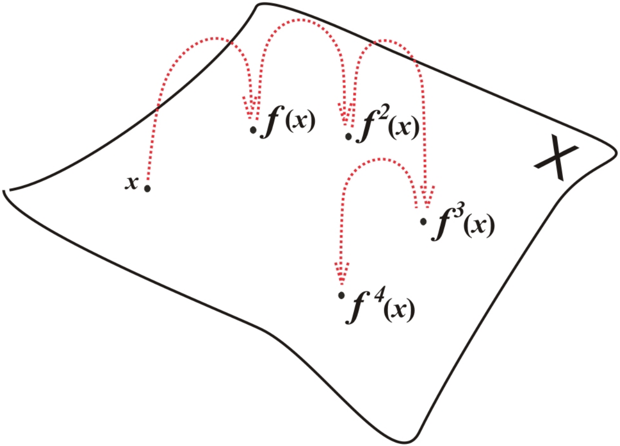
Dinâmica discreta: iteração



Dinâmica discreta: iteração



Dinâmica discreta: iteração



Estamos interessados na dinâmica da função

$f:[0,1]\to[0,1]$ dada por

$$f(x)=10x-[[10x]]$$

$[[x]]$ é a parte inteira de x,

isto é, $[[x]]=\max\{j \text{ inteiro} \mid j\leq x\}$

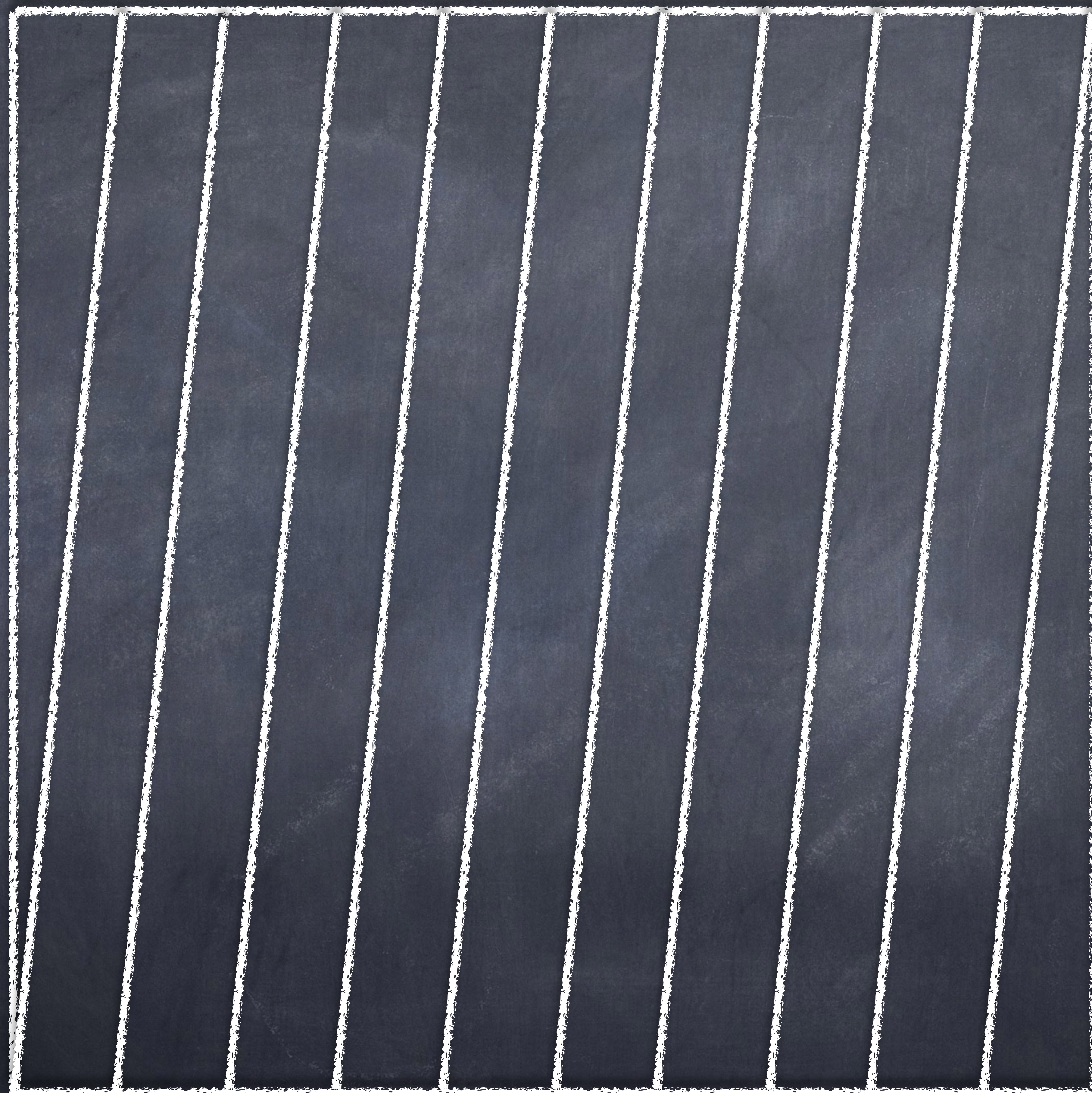


gráfico de f

Veja que escrevendo

$$x=0.x_1x_2x_3x_4x_5\ldots$$

teremos

$$f(0.x_1x_2x_3x_4x_5\ldots)=$$

$$=10(0.x_1x_2x_3x_4x_5\ldots)-[[10(0.x_1x_2x_3x_4x_5\ldots)]]$$

$$=x_1.x_2x_3x_4x_5\ldots[[x_1.x_2x_3x_4x_5\ldots]]$$

$$=x_1.x_2x_3x_4x_5\ldots-x_1$$

$$=0.x_2x_3x_4x_5\ldots$$

Veja que escrevendo

$$x=0.x_1x_2x_3x_4x_5\ldots$$

ou seja,

$$f(0.x_1x_2x_3x_4x_5\ldots)=0.x_2x_3x_4x_5\ldots$$

Uma forma de estudar os dígitos de um número real $x \in [0,1]$ é estudar a órbita de x por f

Exemplo: x é racional se e somente se a órbita de x é pre-periódica

Um fato importante é que a dinâmica de f é caótica e isto reflete fortemente nas características dos números reais

Números de Liouville

Um número irracional β é dito de Liouville se ele for muito bem aproximado por números racionais, ou seja, para todo $n \geq 1$ existe inteiros p e q tais que

$$\left|\beta - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^n}$$

Exemplo de um números de Liouville

$$\beta = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = 0.11000100000000000000000100\ldots$$

Teorema (A. Thue (1909), C. L. Siegel (1921), F. Dyson (1947) e K. Roth (1955))

Se β é um número algébrico irracional então para todo $\varepsilon>0$ existe $c>0$ tal que

$$\left|\beta - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^{2+\varepsilon}}$$

para todo p e q inteiros, com $q>0$

Números (simplesmente) normais e anormais

Um número $x=0.x_1x_2x_3x_4x_5\ldots$ é (simplesmente) **normal** se 10% dos dígitos de x são iguais a j para todo $j\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

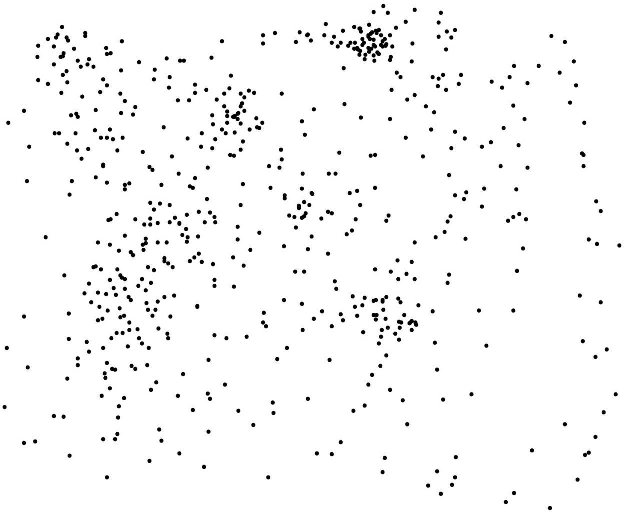
Um número x é **anormal** se ele não for normal.

Um número x é absolutamente normal for simplesmente normal em toda base.

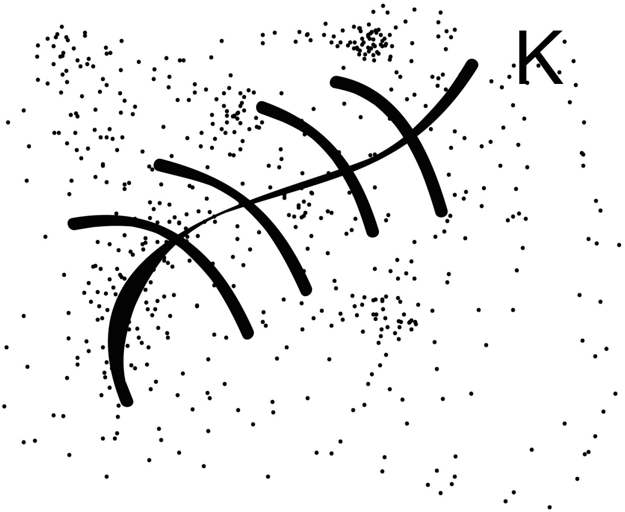
Um número x é absolutamente anormal for anormal em toda base.

Construção de uma medida sigma-aditiva associada a frequência de visita das órbitas pelo método de Caratheodory

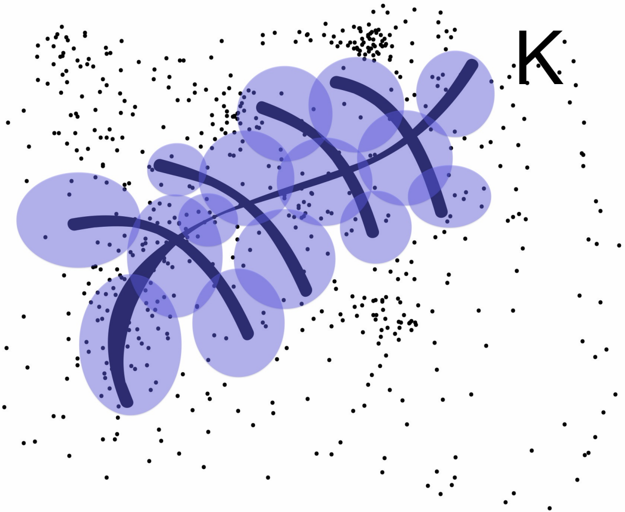
Constructing an inv. measure associated to a given orbit



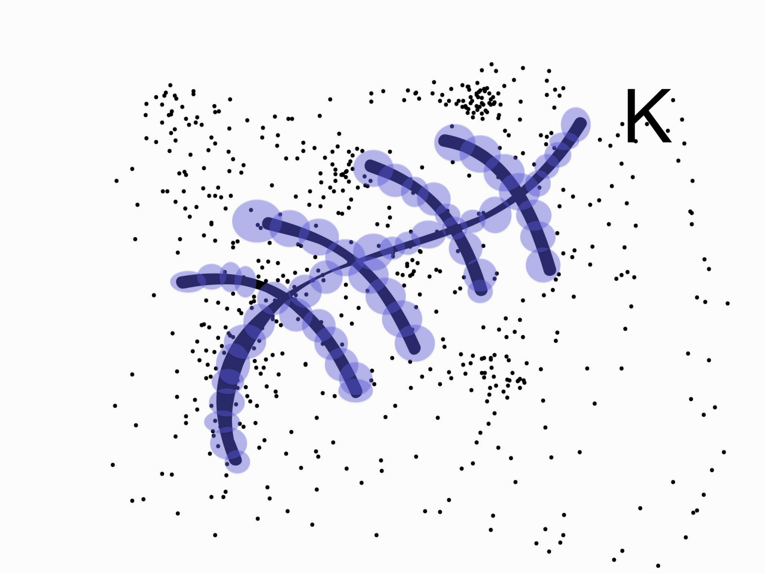
Constructing an inv. measure associated to a given orbit



Constructing an inv. measure associated to a given orbit



Constructing an inv. measure associated to a given orbit

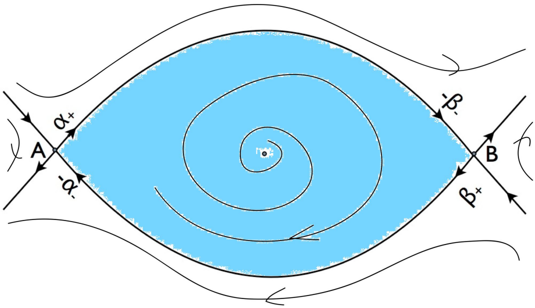


Bowen's eye

Theorem

With the exception of the source in the center, for every x inside the "Bowen's eye" we have

$$\eta_x = \frac{\beta_-}{\beta_- + \alpha_+}\delta_A + \frac{\alpha_-}{\alpha_- + \beta_+}\delta_B$$



Podemos fazer um dicionário entre varias propriedades de dos números com pontos de uma dada dinâmica.

Em particular, estamos interessados em números que refletem o fenômeno parecidos com o "olho de Bowen"

Um número é dito selvagem se

$$\eta_x(A) = \infty$$

para todo aberto A

Obrigado!