VII Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática

APLICAÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS EM PROBLEMAS DE ROTAÇÕES NO PLANO

Fabiana Gerusa Leindeker da Silva

02 a 06 de novembro de 2014

Multiplicação de Números Complexos como Ferramenta para realizar Rotações no Plano

Um instrumento muito útil para realizar rotações no plano é a multiplicação de complexos na sua forma polar, isto é dados

$\boldsymbol{z_1} = r_1(\cos\theta_1 + i\ sen\ \theta_1) = \mathbf{r_1 cis}\ \boldsymbol{\theta_1}$ e

$\boldsymbol{z_2} = r_2(\cos\theta_2 + i\ sen\ \theta\_2) = \mathbf{r_2 cis}\ \boldsymbol{\theta_2}$, então

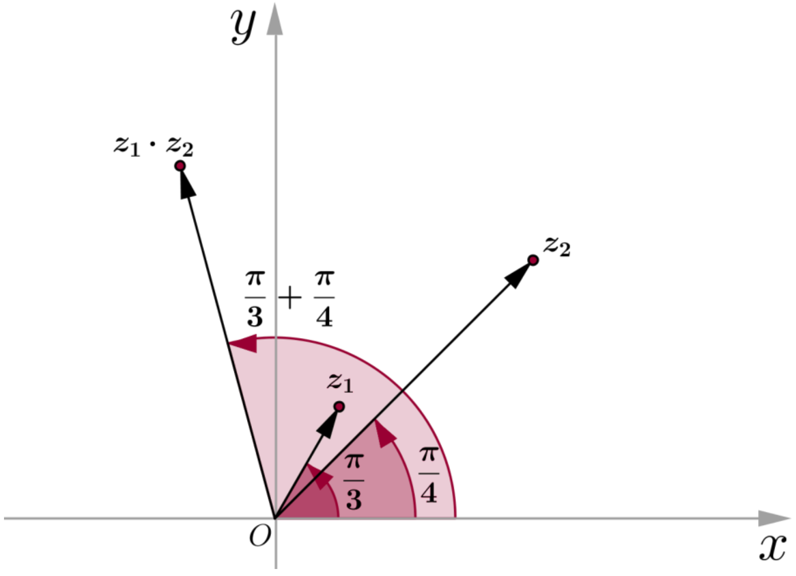
$\boldsymbol{z_1} \cdot \boldsymbol{z_2} = r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\ sen\ (\ \theta_1 + \theta_2)] = \boldsymbol{r_1} \cdot\ \boldsymbol{r_2}\ \boldsymbol{cis}\ (\boldsymbol{\theta_1} + \boldsymbol{\theta_2})$

Como exemplo, dados os números complexos

$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = cis\frac{\pi}{3}$ e

$z_2 = 2 + 2i = 2\sqrt{2} \cdot cis\frac{\pi}{4}$

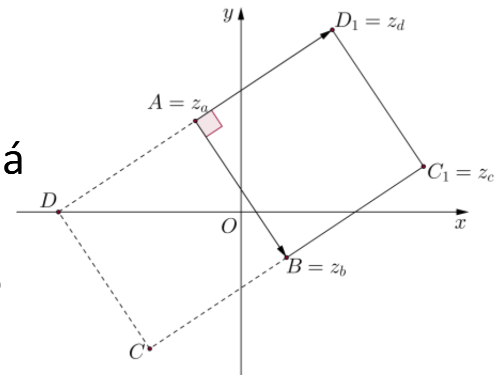
Então $z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2} \cdot cis\ \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$



Produto de z_1 por z_2 na forma polar

Dados dois pontos vértices de um quadrado, determinar os outros dois vértices

$ABCD$ é um quadrado, onde $A = (-1{,}2)$ e $B = (1, -1)$ são dois vértices consecutivos., determinar C e D.



Solução: Ao fazer um esboço do problema, percebe-se que há duas soluções, visto que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ divide o plano em dois semiplanos. Encontra-se o ponto D_1 fazendo uma rotação do vetor $\overrightarrow{AB}$ em 90°:

$$\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AB} \cdot cis\ 90° \iff D_1 - A = (B - A) \cdot cis\ 90° \iff D_1 = A + (B - A)i = (2{,}4).$$

Para encontrar o ponto C_1, pode-se proceder de outras maneiras, visto que já são conhecidos A, B e D_1.

Destaca-se algumas rotações possíveis para encontrar C_1:

$\boldsymbol{\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BA} \cdot cis\ (-90°)}$ ou $\boldsymbol{\overrightarrow{D_1C_1} = \overrightarrow{D_1A} \cdot cis\ 90°}$ ou $\boldsymbol{\overrightarrow{AC_1} = \sqrt{2} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot cis\ 45°}$