VII BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

APROXIMANDO FUNÇÕES POR POLINÔMIOS, ALGUMAS APLICAÇÕES INTERESSANTES

Orientador: Maurício Ferreira de Araújo – Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS)

maferreira@uefs.br

Emerson Gordiano de Almeida – Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS)

emersongordiano@gmail.com

Dannyel Santos Neves – Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS)

neves.dannyel@gmail.com

Def] Dada uma função f qualquer derivável até a ordem n no intervalo I de forma que $x_o \in I$, podemos obter uma aproximação de f por meio do polinômio

$$P(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + \frac{f''(x_o)}{2!}(x - x_o)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x - x_o)^n$$

que é denominado polinômio de Taylor, de ordem n, de f em volta de x_o ou fórmula de Taylor. Tal polinômio é o único de grau n que permite uma aproximação da f em volta de x_o, de forma que o erro $E(x)$ cometido na aproximação tenda a zero mais rapidamente que $(x - x_o)^n$ quando $x \to x_o$.

DEM] Existência de $P(x)$ de acordo com a definição.

Dado que $f(x) = P(x) + E(x)$ então,

$E(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \cdots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ e $\lim_{x \to x_0} \frac{E(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{0}{0}$.

Aplicando a Regra de L´Hospital $(n - 1)$ vezes para eliminar a indeterminação obtemos:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x - x_0)}{n!\,(x - x_0)} \qquad (I)$$

Utilizando as propriedades operatórias dos limites em (I)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{1}{n!}\left(\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)}\right. \qquad (II)$$

Calculando os limites entre parênteses em (II), obteremos a diferença entre as enésimas derivadas de f , constatando que $E(x) \longrightarrow 0$ mais rapidamente que $(x - x_0)^n$.

Em geral, quanto maior for o grau do polinômio de Taylor mais eficiente é a sua aproximação do valor da função no ponto, convém ressaltar porém que a melhor aproximação tipicamente acontece para $x_0 = 0$, a medida que afastamo-nos desse ponto perdemos gradualmente a precisão da aproximação. As figuras abaixo ilustram essa ideia.

DEM] Unicidade de $P(x)$ de acordo com a definição

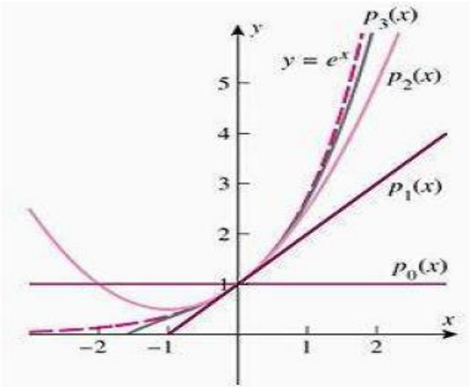
Suponhamos que exista $Q(x) = f(x_0) + \alpha_1(x - x_0) + \cdots + \alpha_n(x - x_0)^n$ de forma que $f(x) = Q(x) + E_1(x)$ onde $\lim_{x \to x_0} \frac{E_1(x)}{(x - x_0)^n} = 0$ além de $f(x) = P(x) + E(x)$ da forma como foram citados acima. Temos então

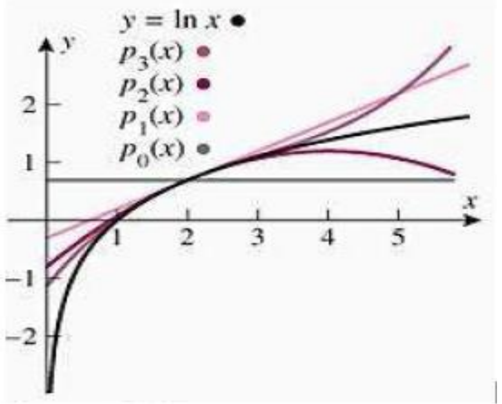
$$\lim_{x \to 0} \frac{E(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{E_1(x)}{(x - x_0)^n} = 0 \qquad (III)$$

De (III) decorre $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{E(x) - E_1(x)}{(x - x_0)^n} = 0$ isto é

$$\lim_{x \to x_0} \frac{[\alpha_1 - f'(x_0)][x - x_0] + \cdots + [\alpha_n - \frac{f^{(n)}}{n!}(x_0)][x - x_0]^n}{{(x - x_o)}^n} = 0 \qquad (IV)$$

assim sendo $\alpha_1 = f(x_0), \alpha_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \ldots, \alpha_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.





1) Encontrar $\int e^{x^2}\,dx$.

Primeiro obtemos a fórmula de Taylor para $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \cdots + \frac{u^n}{n!}$, façamos a troca de variáveis $u = x^2$, obtemos assim $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!}$, trocando a função por sua expansão não encontraremos dificuldade em integrar o polinômio:

$$\int e^{x^2} dx = \int (1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!}) dx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5.2!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

2) Obter uma expressão que aproxime o valor de π:

Dado que $\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg\ x$ vamos integrar cada membro do polinômio de Taylor correspondente ao integrando:

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots$, assim através da troca de variáveis $x \longrightarrow -x^2$ temos que $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^3 + x^4 + \cdots$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Do teorema fundamental do cálculo:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} = arc\ tg\ 1 \Longrightarrow 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

$$\pi = 4\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$