Universidade Estadual Paulista ‘Júlio de Mesquita Filho’
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Ciclos limites de sistemas de Lienard

Autor: Gabriel Antônio da Silva Inácio
Orientador: Prof. Dr. Pedro Toniol Cardin

Definição: Sejam Δ um aberto de $\mathbb{R}^2$ e $X: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1. Uma órbita periódica γ de X chama-se **ciclo limite** se existe uma vizinhança V de γ tal que γ é a única órbita fechada de X contida em V.

O objetivo desse trabalho é estudar a existência e a quantidade de ciclos limites de equações de Lienard da forma:

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0.$$

Considere a mudança de coordenadas $y = x' + F(x)$ onde $F'(x) = f(x)$. Com essa mudança obtemos o seguinte sistema equivalente

$$\begin{cases} x' = y - F(x) \\ y' = -g(x). \end{cases} \qquad (1)$$

Para as funções F e g satisfazendo determinadas condições, existe um teorema que garante a existência de um único ciclo limite para o sistema acima.

Teorema (Lienard): Suponhamos que as funções F e g no sistema (1) são funções ímpares e de classe C^1 em $\mathbb{R}$ tais que $g'(x) > 0$ para todo x, $F(0) = 0, F'(0) < 0, F$ tem um único zero positivo em $x = a$ e é monótona crescente para infinito para $x \geq a$. Então o sistema de Lienard (1) tem exatamente um ciclo limite o qual é estável.

Exemplo: Suponhamos que as funções F e g no sistema (1) sejam dadas por

$$F(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1} \quad \text{e} \quad g(x) = x.$$

Então F e g satisfazem as hipóteses do Teorema de Lienard. Com efeito, claramente F e g são funções de classe C^1 definidas para todo real. Além disso, temos que

$$F(-x) = \frac{(-x)^3 - (-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x^3 + x}{x^2 + 1} = -F(x)$$

e

$$g(-x) = -x = -g(x),$$

ou seja, F e g são funções ímpares. Além do mais, $g(x) = 1 > 0$, para todo $x, F(0) = 0, F'(0) = -1 < 0$, e $x = 1$ é o único zero positivo de F, e para $x \geq 1, F$ é monótona e cresce para o infinito quando $x \to \infty$. Portanto, segue que o sistema (1) com estas funções tem exatamente um ciclo limite que é estável.