Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

VII Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática
02 a 06 de novembro - Centro Cultural e de Exposições Ruth Cardoso [Maceió - Alagoas]
SBM
Sociedade Brasileira de Matemática

COLÉGIO PEDRO II

NÚMERO DE EULER E PROBLEMAS DE CRESCIMENTO OU DECRESCIMENTO CONTÍNUO

Autor: Prof. Msc. Vladimir Thiengo (Professor Efetivo do Colégio Pedro II - RJ)
Orientadora: Profª. Dra. Miriam Del Milagro Abdón (Universidade Federal Fluminense - RJ)

Como parte do meu Trabalho de Conclusão do Curso de Mestrado Profissional em Matemática (ProfMat), intitulado: "Ensino de Exponenciais e Logaritmos no Ensino Médio, via Aplicações" – foi apresentado um tópico sobre crescimento e decrescimento contínuo de funções exponenciais e logarítmicas.

As principais aplicações destes tipos de funções se dão nas Ciências Biológicas e em problemas de Matemática Financeira, onde a base de crescimento (ou decrescimento) é o "Número de Euler".

O texto original do qual estes seguintes tópicos foram retirados podem ser consultados no endereço eletrônico: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/508

Cabe ressaltar que o nome de tal número se deve apenas a uma homenagem ao grande matemático *Leonhard Euler* (1707-1783), sendo que este valor já era utilizado nos estudos de *John Napier* (1550-1617).

- <u>Funções Exponenciais de base e</u>.

Uma função que ocorre frequentemente em problemas de Matemática Financeira e no campo das Ciências Biológicas é $f(x) = e^x$, em que e é uma constante irracional (aproximadamente 2,71828...).

Funções desse tipo modelam situações de crescimento ou decrescimento exponencial contínuo. O conceito de continuidade é um dos principais tópicos nos cursos de Cálculo no Ensino Superior.

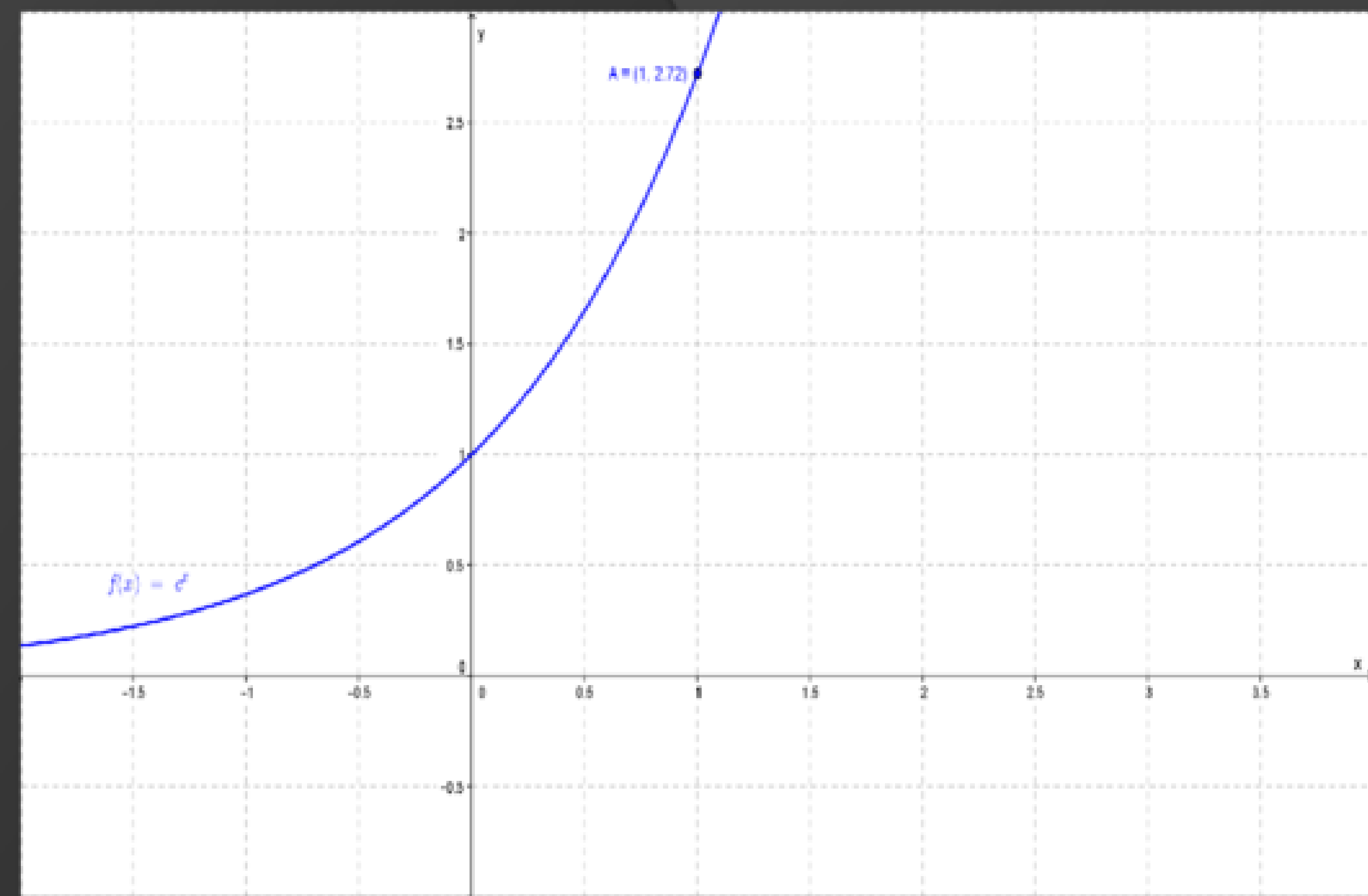

Gráfico da função $f(x) = e^x$

Usando limites, temos que:

$$e = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Matemáticos e cientistas utilizam, usualmente, em diversos cálculos, funções do tipo exponencial da forma $f(x) = k.e^{\alpha . x}$, pois essa expressão exibe claramente o valor inicial da função $f(0)=k$ e também o coeficiente α que está relacionado com a taxa de crescimento (ou decrescimento) da função f .

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

VII Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática
02 a 06 de novembro - Centro Cultural e de Exposições Ruth Cardoso [Maceió - Alagoas]
SBM
Sociedade Brasileira de Matemática

COLÉGIO PEDRO II

NÚMERO DE EULER E PROBLEMAS DE CRESCIMENTO OU DECRESCIMENTO CONTÍNUO

Autor: Prof. Msc. Vladimir Thiengo (Professor Efetivo do Colégio Pedro II - RJ)
Orientadora: Profª. Dra. Miriam Del Milagro Abdón (Universidade Federal Fluminense - RJ)

Vamos fazer, aqui, uma breve justificativa matemática de um modelo de crescimento contínuo.

Sabe-se, da Matemática Financeira, que a capitalização C de um montante M após um acréscimo de i por cento é dado por

$$M = C.(1+i),$$

depois de um determinado período. Suponhamos que esse período seja de um ano.

Capitalizaremos esse montante de uma outra forma: faremos uma primeira aplicação de 6 meses e, após, reinvestiremos esse montante por mais 6 meses. Sendo assim, a equação que nos dará o montante acumulado após as duas capitalizações será

$$M = C.\left(1+\frac{i}{2}\right)^2.$$

Observe que $\left(1+\frac{i}{2}\right)^2 > (1+i)$. Daí, a capitalização durante dois semestres consecutivos é maior do que a capitalização anual direta.

Podemos, também, "quebrar" essas capitalizações em intervalos de tempos menores – por exemplo, bimestralmente

$$M = C.\left(1+\frac{i}{6}\right)^6$$

ou mensalmente

$$M = C.\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12}.$$

Tomando o número de partições (intervalos de tempo) cada vez maiores, fazendo tender a infinitas partições, temos que:

$$M = \lim_{t\to+\infty}\left[C.\left(1+\frac{i}{t}\right)^t\right] = C.e^i$$

É importante observar que, apesar de a sequência $\left(1+\frac{i}{t}\right)^t$ ser crescente, ela não é ilimitada, uma vez que seu limite no infinito tende a e^i.

O mesmo raciocínio do exemplo anterior é válido para aplicações da forma $M = C.(1+i.t)$. A equação final do crescimento contínuo desse modelo será:

$$M = \lim_{n\to\infty}\left[C.\left(1+\frac{i.t}{n}\right)^n\right] = C.e^{i.t}$$

Além da Matemática Financeira, outras principais aplicações das funções exponenciais de base *e* ocorrem em:

(i) Crescimentos populacionais (de insetos, por exemplo), em que o número de indivíduos varia com o tempo de acordo com a função $P(t) = P_0.e^{h.t}$, com P sendo a população do tempo t, P_0 a população inicial, h é uma constante que depende do tipo de população que está sendo estudada.

(ii) O decaimento da radioatividade de substâncias também é modelada por funções exponenciais desse tipo, por exemplo, em $y(t) = y_0.e^{-k.t}$, em que k é uma constante que depende da substância radioativa estudada.

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

VII Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática
02 a 06 de novembro - Centro Cultural e de Exposições Ruth Cardoso [Maceió - Alagoas]
SBM
Sociedade Brasileira de Matemática

NÚMERO DE EULER E PROBLEMAS DE CRESCIMENTO OU DECRESCIMENTO CONTÍNUO

Autor: Prof. Msc. Vladimir Thiengo (Professor Efetivo do Colégio Pedro II - RJ)
Orientadora: Profª. Dra. Miriam Del Milagro Abdón (Universidade Federal Fluminense - RJ)

- **Funções Logarítmicas de base e.**

Existem, também, Funções Logarítmicas de base e. Tais logaritmos são chamados de Logaritmos Naturais, cuja nomenclatura é

$$log_e(x) = \ln(x),$$

em que $x \in \mathbb{R}_+^*$.

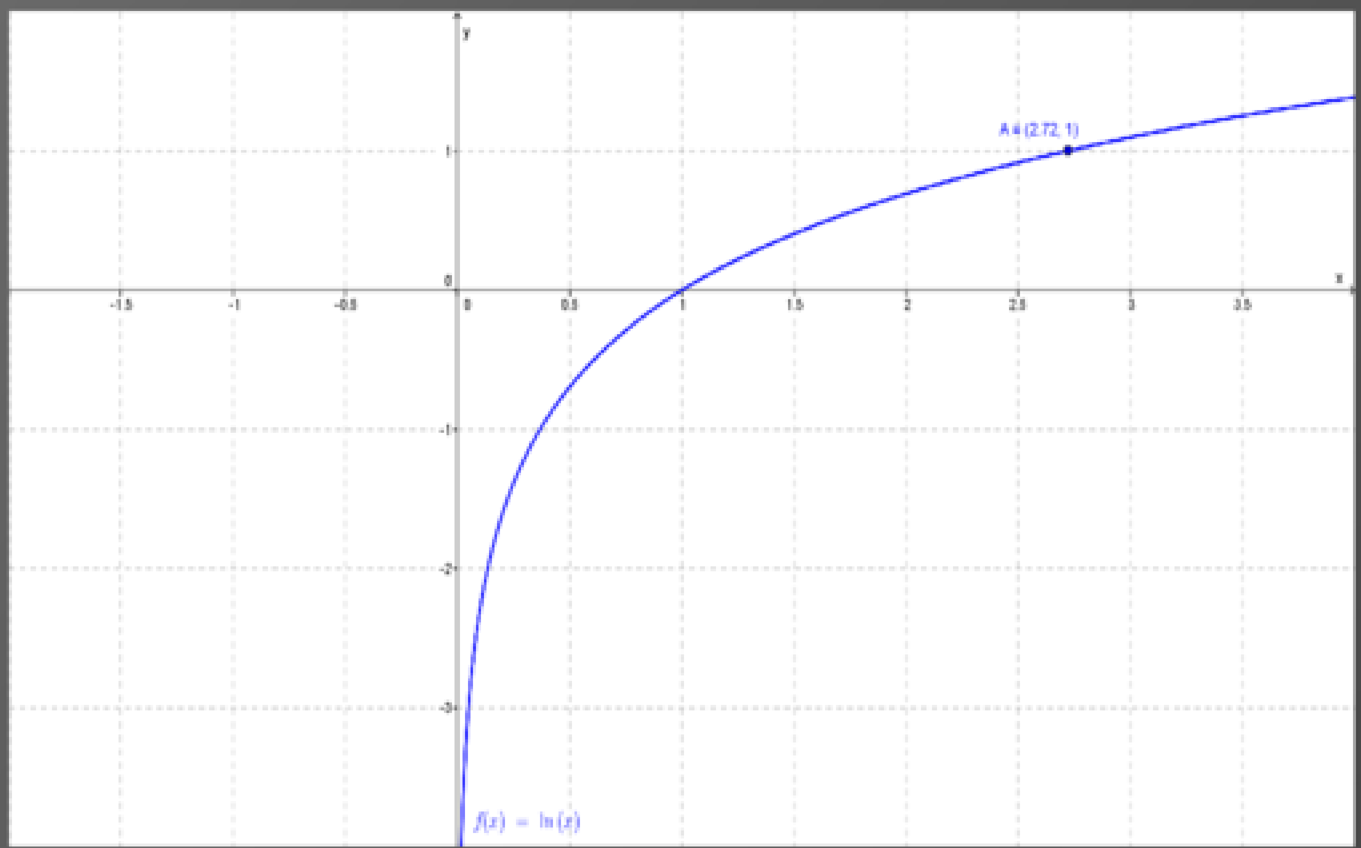

Gráfico da função $f(x) = \ln(x)$

Esse logaritmo, por vezes, é erradamente chamado de Logaritmo Neperiano. Na verdade, o Logaritmo Neperiano (em homenagem a *John Napier*) é um logaritmo de base $a = \frac{1}{e}$.

Observe ainda que, de acordo com as bases, o logaritmo natural cresce quando x cresce; enquanto o Logaritmo Neperiano decresce, quando x cresce.

As principais aplicações das funções logarítmicas de base e ocorrem em problemas (situações) do tipo:

(i) O Centro Nacional de Estatísticas da Saúde dos Estados Unidos projeta a expectativa de vida de acordo com o modelo matemático

$$L(x) = 10,963 + 14,321.\ln(x)$$

em que x é o número de anos, contados a partir do ano de 1900.

(ii) Uma função usada para calcular a idade de uma amostra usando a datação por carbono 14 é

$$T = \left[\frac{\ln\left(\frac{N_f}{N_0}\right)}{-0,693}\right].T_{\frac{1}{2}}$$

em que $\frac{N_f}{N_0}$ é a porcentagem de carbono 14 na amostra comparada com a quantidade em tecidos vivos e $T_{\frac{1}{2}}$ é a meia-vida do carbono 14 (5700 anos).

Contato:

Prof. Msc. Vladimir Thiengo
ProfMat UFF-RJ

E-mail: vladthiengo@gmail.com

Tel: (21) 98224-3819