Existência de Conexões versus Módulos Projetivos

Rafael Silva - UFF,
Jacqueline Rojas - UFPB.

VII Bienal-SBM

02 a 06 de novembro de 2014

O conceito de Conexão teve origem na geometria riemanniana, e generaliza o conceito de derivação.

Definition

Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra e M um A-módulo. Uma conexão em M é um homomorfismo $\mathbb{K}$-linear $\nabla : M \to \Omega^1_{A/\mathbb{K}} \otimes_A M$ tal que

$$\nabla(am) = a\nabla(m) + d(a) \otimes m, \quad \forall a \in A, \; m \in M,$$

onde $d : A \to \Omega^1_{A/\mathbb{K}}$ é a derivação universal.

Nosso desafio é determinar quais módulos admitem conexões, isto é, quando Con(M)=$\{$conjunto das conexões em M$\}\neq \emptyset$.

Verifica-se que se M é projetivo então $\mathrm{Con}(M) \neq \emptyset$.

Contudo, a reciproca não é verdadeira, pois

$$\begin{array}{rcl} \nabla : \mathbb{C}(t) : & \longrightarrow & \mathbb{C}[t] \otimes_{\mathbb{C}[t]} \mathbb{C}(t) \\ m & \mapsto & 1 \otimes m', \end{array}$$

onde m' denota a derivada usual, é uma conexão no $\mathbb{C}[t]$-módulo $\mathbb{C}(t) = \mathrm{Frac}(\mathbb{C}[t])$, que não é projeivo.

Além disso, existem módulos nos quais não é possivel definir uma conexão.

Com efeito, considere a $\mathbb{R}$-álgebra $A = \frac{\mathbb{R}[x,y]}{<xy>}$.
Então o A-módulo $\mathcal{K} = \frac{A^2}{K}$, onde $K = \{(a\overline{y}, a\overline{x}) \in A^2; a \in A\}$ não admite conexões.