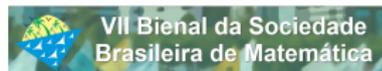


# Grupos Nilpotentes e Solúveis são Fechados em relação a Subgrupos, Grupos Quocientes e Produtos Direto

Cassia Ferreira Sampaio  
Alcindo Teles Galvão

24 de outubro de 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS



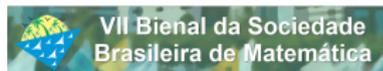
Devido aos curtos espaço e tempo, apresentaremos aqui apenas os resultados principais para o tema central deste trabalho.

**Definição<sub>1</sub>:** Um grupo  $G$  é chamado *nilpotente* se obedece às seguintes condições equivalentes:

- 1  $G$  tem uma série central normal;
- 2  $L_i = \{e\}$  para algum  $i$ ;
- 3  $Z_i = G$  para algum  $i$ .

**Definição<sub>2</sub>** Um grupo  $G$  diz-se *solúvel* se admite uma série subnormal ascendente e  $G_{i+1}/G_i$ , para  $1 \leq i \leq n$ , for abeliano. Isto é, um grupo é solúvel se possui uma série subnormal abeliana.

Definidos grupos nilpotentes e solúveis a partir de séries de subgrupos, provaremos, com teoremas também de séries de subgrupos, que estes grupos são fechados quanto a seus subgrupos, grupos quocientes e produtos diretos.



**Teorema<sub>1</sub>:** Se intersectamos uma série normal de  $G$  com algum subgrupo  $H$ , obtemos a série subnormal  $\{e\} = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft H_2 \triangleleft \dots \triangleleft H_r = H$  de  $H$ , onde  $H_i := H \cap G_i$ , na qual, os fatores sucessivos são isomorfos aos subgrupos de fatores sucessivos na série subnormal original.

**Teorema<sub>2</sub>:** A série  $\{\bar{e}\} = \bar{G}_0 \triangleleft \bar{G}_1 \triangleleft \bar{G}_2 \triangleleft \dots \triangleleft \bar{G}_r = G/N$ , onde  $\bar{G}_i := (NG_i)/N \cong G_i/(N \cap G_i)$ , é uma série normal de  $G/N$  e seus fatores sucessivos são grupos quocientes dos fatores sucessivos da série  $\{e\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft G_2 \triangleleft \dots \triangleleft G_r = G$ .

**Teorema<sub>3</sub>:** Se  $G$  e  $\tilde{G}$  têm, respectivamente, série normal  $\{e\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft G_2 \triangleleft \dots \triangleleft G_r = G$  e  $\{\tilde{e}\} = \tilde{G}_0 \triangleleft \tilde{G}_2 \triangleleft \dots \triangleleft \tilde{G}_s = \tilde{G}$  então o produto direto  $G \times \tilde{G}$  tem uma série normal  $G_0 \times \{\tilde{e}\} \triangleleft G_1 \times \{\tilde{e}\} \triangleleft \dots \triangleleft G \times \{\tilde{e}\} \triangleleft G \times \tilde{G}_1 \triangleleft \dots \triangleleft G \times \tilde{G}$ , a qual os fatores sucessivos são isomorfos aos fatores sucessivos da série de  $G$ .

Assim, concluímos nosso trabalho.