Grupos Nilpotentes e Solúveis são Fechados em relação a Subgrupos, Grupos Quocientes e Produtos Direto

Cassia Ferreira Sampaio
Alcindo Teles Galvão

24 de outubro de 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

VII Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática

Devido aos curtos espaço e tempo, apresentaremos aqui apenas os resultados principais para o tema central deste trabalho.

Definição$_1$: Um grupo G é chamado *nilpotente* se obedece às seguintes condições equivalentes:

1. G tem uma série central normal;
2. $L_i = \{e\}$ para algum i;
3. $Z_i = G$ para algum i.

Definição$_2$ Um grupo G diz-se *solúvel* se admite uma série subnormal ascendente e G_{i+1}/G_i, para $1 \leq i \leq n$, for abeliano. Isto é, um grupo é solúvel se possui uma série subnormal abeliana.

Definidos grupos nilpotentes e solúveis a partir de séries de subgrupos, provaremos, com teoremas também de séries de subgrupos, que estes grupos são fechados quanto a seus subgrupos, grupos quocientes e produtos diretos.

Teorema$_1$: Se intersectamos uma série normal de G com algum subgrupo H, obtemos a série subnormal $\{e\} = H_0 \lhd H_1 \lhd H_2 \lhd \cdots \lhd H_r = H$ de H, onde $H_i := H \cap G_i$, na qual, os fatores sucessivos são isomorfos aos subgrupos de fatores sucessivos na série subnormal original.

Teorema$_2$: A série $\{\overline{e}\} = \overline{G}_0 \lhd \overline{G}_1 \lhd \overline{G}_2 \lhd \cdots \lhd \overline{G}_r = G/N$, onde $\overline{G}_i := (NG_i)/N \cong G_i/(N \cap G_i)$, é uma série normal de G/N e seus fatores sucessivos são grupos quocientes dos fatores sucessivos da série $\{e\} = G_0 \lhd G_1 \lhd G_2 \lhd \ldots \lhd G_r = G$.

Teorema$_3$: Se G e $\widetilde{G}$ têm, respectivamente, série normal $\{e\} = G_0 \lhd G_1 \lhd G_2 \lhd \ldots \lhd G_r = G$ e $\{\widetilde{e}\} = \widetilde{G}_0 \lhd \widetilde{G}_2 \lhd \cdots \lhd \widetilde{G}_s = \widetilde{G}$ então o produto direto $G \times \widetilde{G}$ tem uma série normal $G_0 \times \{\widetilde{e}\} \lhd G_1 \times \{\widetilde{e}\} \lhd \cdots \lhd G \times \{\widetilde{e}\} \lhd G \times \widetilde{G}_1 \lhd \cdots \lhd G \times \widetilde{G}$, a qual os fatores sucessivos são isomorfos aos fatores sucessivos da série de G.

Assim, concluímos nosso trabalho.