O Teorema da Base de Hilbert via Lema de Higman

Karoliny Sardeiro de Souza (UFT/Arraias)
Orientador: Eudes Antonio da Costa (UFT/Arraias

Universidade Federal de Alagoas
VII Bienal de Matemática

Maceió - Novembro de 2014

Lema de Higman

- O ambiente em que desenvolveremos nosso estudo é a álgebra polinomial que denotamos por $\mathbb{R}_n$. Seja m_i um elemento de $\mathbb{R}_n$ da forma $m_i[x] = {x_1}^{k_{i1}}{x_2}^{k_{i2}}...{x_n}^{k_{in}}$ para $i \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq n$ k_{ij} inteiros não negativos, chamaremos de $M \subset \mathbb{R}_n$ o conjunto de todos os monômios de $\mathbb{R}_n$.
- Nosso objetivo é mostrar que M é um conjunto parcialmente bem ordenado, ou seja, todo subconjunto de M possui um número finito de elementos minimais.
- Utilizando a ordem por divisão ($m_i \leq m_j$ se, e somente se, $m_i|m_j$) mostramos que o conjunto $M \subset \mathbb{R}_n$ satisfaz o seguinte item do Lema de Higman:

  Se B for um subconjunto de A, então existe um conjunto finito B_0, tal que, $B_0 \subset B \subset \overline{B_0}$
- Este resultado garante que o conjunto M é p.b.o..
- Feito isto o nosso próximo passo e principal resultado é demonstrar o Teorema da Base de Hilbert

O Teorema da Base de Hilbert via Lema de Higman

Teorema 3

Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e $\mathbb{R}_n = \mathbb{K}[X]$ a álgebra polinomial. Todo ideal de $\mathbb{R}_n$ é finitamente gerado.

Considere um ideal $\Phi \neq I$ de $\mathbb{R}_n$ e M_I o conjunto dos monômios líderes de I. Em M_I consideraremos a ordem por divisão. Como $\Phi \neq M_I$ pois $I \neq \Phi$ e $M_I \subset M$, segue do resultado anterior que existem $m_{1j} \leq m$ para algum $j \in \{1, 2, ..., k\}$. Sejam $p_j(X) \in I, j = 1, ..., k$ associados aos $m_{1j}, j \in \{1, 2, ..., k\}$. Assim temos:

$$p_j(X) = \alpha_{1j} m_{1j}(X) + \sum_{i=2}^{N_j} \alpha_{ij} m_{ij}(X)$$

Mostraremos que os $p_j(X) \in I, j = 1, ..., k$ geram o ideal I

- Como existe um número finito de $p_j(X) \in I$ temos que $\mathbb{R}_n$ é finitamente gerado.