UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE – UFF – VOLTA REDONDA

Teoria Matemática de Epidemias
O Teorema do Limiar

ALINE DE MELO - IVAN AGUILAR

ICEx
Instituto de Ciências Exatas

VII Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática 02 a 06 de novembro 2014 Maceió - Alagoas

Teoria Matemática de Epidemias: O Teorema do Limiar

Aline de Melo – Ivan Aguilar, Departamento de Matemática, ICEx – UFF

Introdução

Suponha que em uma grande população (que é capaz de ficar infectada) é inserido um pequeno grupo de pessoas com uma doença infecciosa.

1) O que acontece à medida que o tempo evolui?
2) A doença desaparece rapidamente, ou ocorre uma epidemia?
3) Quantas pessoas, em última análise, adoecem?

Neste trabalho procuramos dar resposta a essas três questões.

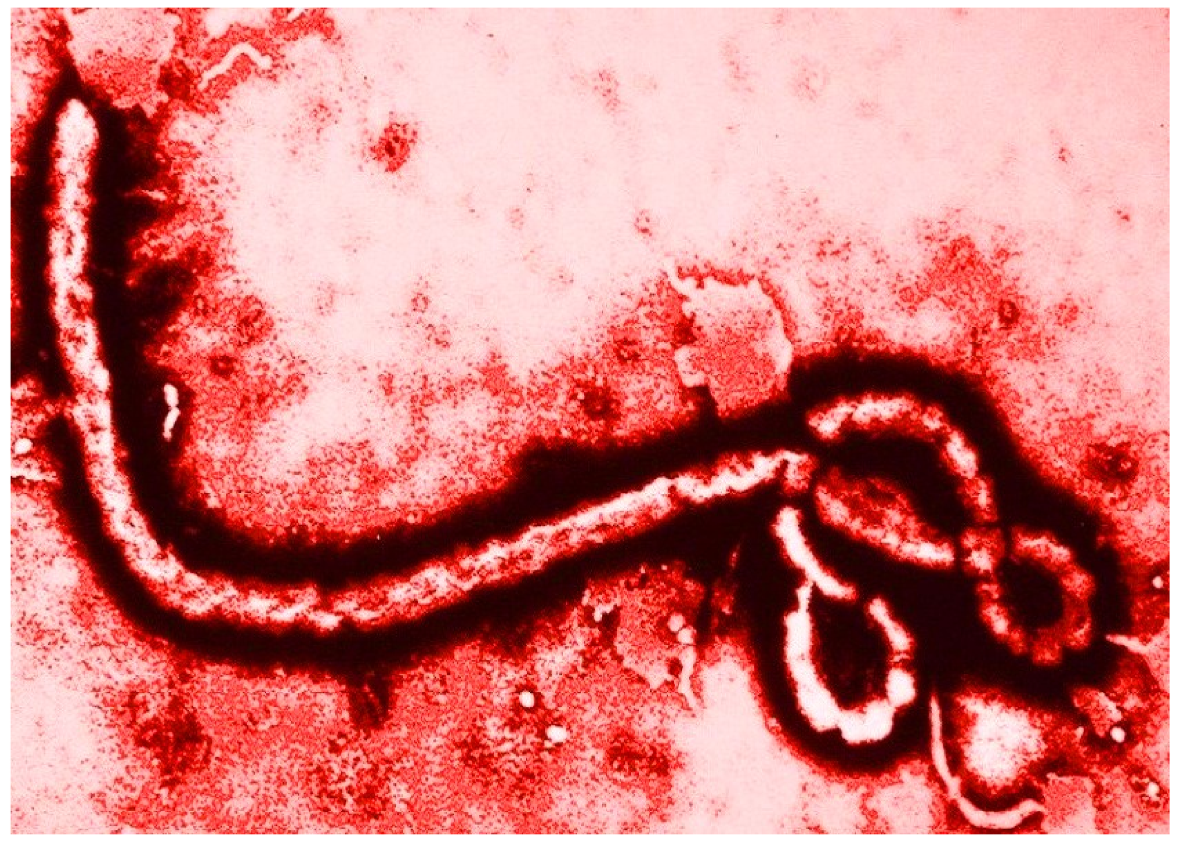
Objetivo

• Estudar um sistema de EDO's que governam a propagação de uma doença infecciosa dentro de uma população, analisando o comportamento de suas soluções.

• Demonstrar o **Teorema do Limiar Epidêmico** proposto por Kermack e MacKendrick.

Epidemias

Uma **epidemia** é a propagação de uma doença infecciosa, que surge em determinada localidade e ataca ao mesmo tempo um grande número de pessoas, marcada por um começo e um fim.



Virus de Ebola

Epidemias na história

• **Peste Negra** (Europa/Ásia) 50 milhões de mortos, 1333 a 1351.
• **Cólera.** Centenas de milhares de mortos - 1817 a 1824.
• **Tuberculose** 1 bilhão de mortos - 1850 a 1950.
• **Varíola** 300 milhões de mortos - 1896 a 1980.
• **Gripe Espanhola** 20 milhões de mortos - 1918 a 1919.
• **Febre Amarela** 30 000 mortos (Etiópia) - 1960 a 1962
• **Sarampo** 6 milhões de mortos por ano - Até 1963
• **Malária** 3 milhões de mortos por ano - Desde 1980
• **AIDS** 22 milhões de mortos - Desde 1981

Bactéria da Peste Negra

O Modelo Matemático

O Modelo SIR

• Supõe-se que a doença confere imunidade permanente ao indivíduo que tenha se recuperado completamente da doença.

• O período de incubação curto. O indivíduo infectado se converte imediatamente em agente de contágio.

• Divide-se a população em 3 classes:

S: (**suscetíveis**) aqueles que podem ser infectados e podem infectar, mas que ainda não são agentes de infecção.

I: (**infectados/infectantes**) aqueles que foram infectados e podem contagiar.

R: (**removidos**) são os que adquiriram a doença e morreram, os que se recuperaram e adquiriram imunidade permanentemente, e os que foram isolados até se recuperar e adquirirem imunidade permanente.

Regras de disseminação

Regra 1. No intervalo de tempo considerado assume-se que a população permanece num nível constante N. Isso significa, é claro, que negligenciamos nascimentos, mortes por causas não relacionadas à doença em questão, imigração e emigração.

Regra 2. A taxa de variação da população suscetível é proporcional ao produto do número de membros de S e o número de membros de I.

Regra 3. Os indivíduos são removidos da classe infecciosa I a uma taxa proporcional ao tamanho de I.

Sejam $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$ o número de indivíduos de S, I e R, respectivamente no tempo t. Das três regras, $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$ satisfazem o seguinte sistema de EDO's:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -rSI; \\ \frac{dI}{dt} &= rSI - \gamma I; \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I \end{aligned} \tag{1}$$

onde $r, \gamma > 0$ constantes positivas (taxas). Como $R(t) = N - S(t) - I(t)$ e as duas primeiras equações independem de R é suficiente estudar

$$\frac{dS}{dt} = -rSI, \quad \frac{dI}{dt} = rSI - \gamma I. \tag{2}$$

Para conhecer o comportamento qualitativo das órbitas de (2) podemos resolver a equação

$$\frac{dI}{dS} = \frac{rSI - \gamma I}{-rSI} = -1 + \frac{\gamma}{rS}. \tag{3}$$

• As órbitas $(S(t), I(t))$ de (2) se deslocam ao longo das são soluções da equação (3).

• A solução de (3) passando por (S_0, I_0) é

$$I(S) = I_0 + S_0 - S + \rho \ln(S/S_0) \tag{4}$$

• I_0 o número inicial de infectados,
• S_0 o número inicial de suscetíveis.
Ambos no instante t_0 e
• $\rho = \dfrac{\gamma}{r}$.

Da derivada de (4), $I'(S) = -1 + \rho/S$,

• $I(S)$ é crescente se $S < \rho$, e

• $I(S)$ é decrescente se $S > \rho$.

Teoria Matemática de Epidemias: O Teorema do Limiar

Aline de Melo – Ivan Aguilar, Departamento de Matemática, ICEx – UFF

Instituto de Ciências Exatas

O Modelo Matemático

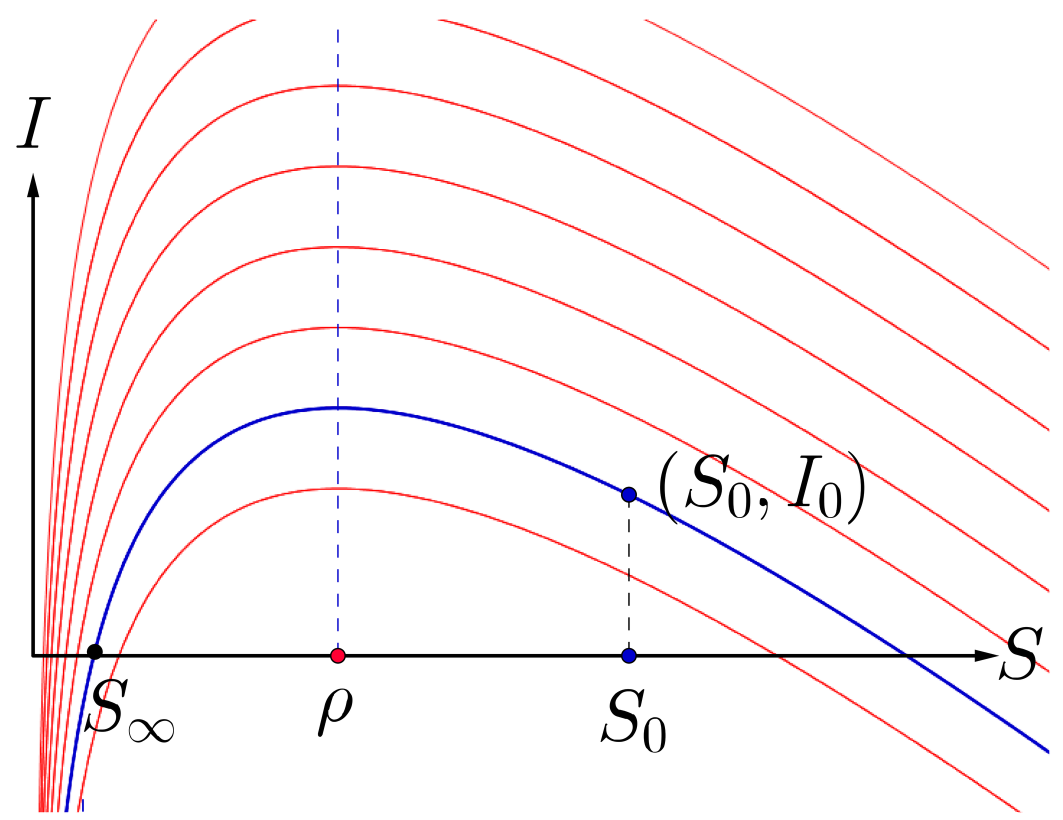


Fig.3 Soluções $I(S)$ de (3)

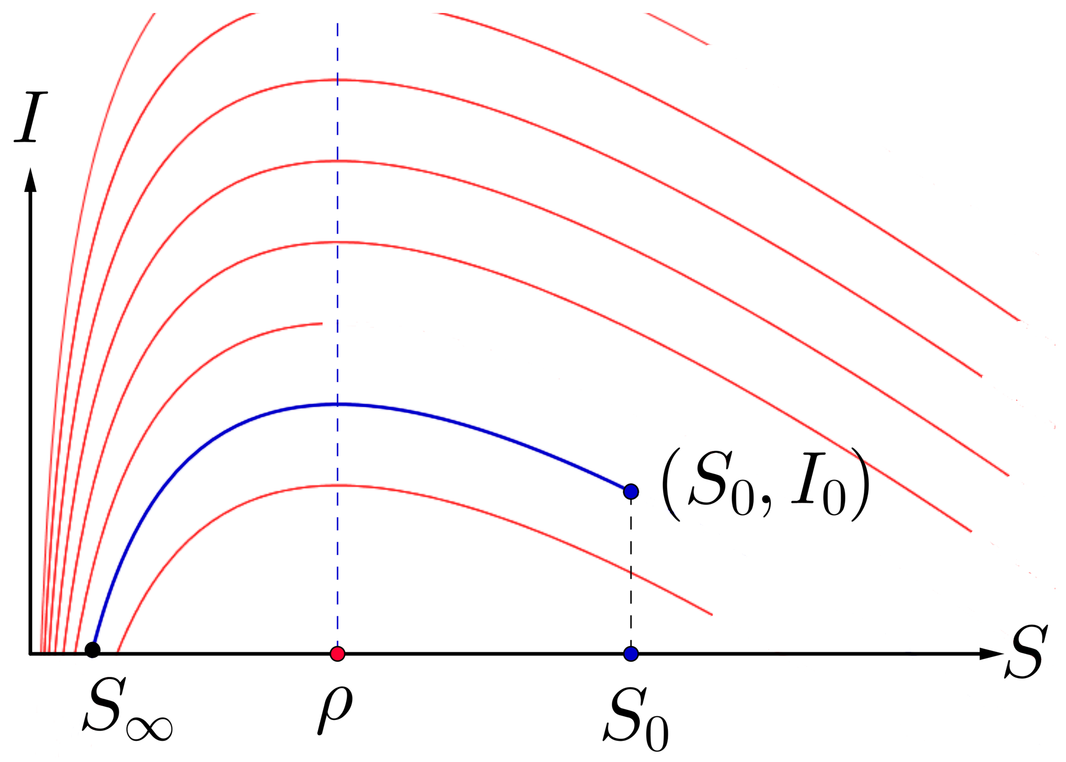


Fig.4 Órbitas $(S(t), I(t))$ de (2)

Propriedades de $I(S)$

- $I(S)$ é crescente se $S < \rho$ e $I(S)$ é decrescente se $S > \rho$.
- $\lim_{S\to 0} I(S) = -\infty$ e $I(S_0) = I_0 > 0$. Portanto, $\exists!\ S_\infty \in (0, S_0)$ tal que $I(S_\infty) = 0$.
- $I(S) > 0$, para $S \in (S_\infty, S_0)$.
- $(S_\infty, 0)$ é um **ponto de equilíbrio** de (2) pois tanto dS/dt e dI/dt se anulam em $I = 0$.

Implicações desse resultado

- A órbita $(S(t), I(t))$ viaja ao longo da solução $S(I)$ passando por $(S_0, I_0), \forall t \in (t_0, \infty)$.
- $S(t)$ sempre decresce com o tempo.
- Como $(S_\infty, 0)$ é ponto de equilíbrio de (2), segue que, $\lim_{t\to\infty} (S(t), I(t)) = (S_\infty, 0)$.

Isto é, se $t \to \infty$ então $I(t) \to 0$ e $S(t) \to S_\infty$

Conclusões

Se I_0 é um pequeno grupo de infectados num grupo de suscetíveis S_0:

- Se $S_0 < \rho$ então **a doença desaparece rapidamente.**
- Se $S_0 > \rho$ então os **infectados** $I(t)$ **crescem**, enquanto $S(t)$ **decresce** até ρ, momento em que $I(t)$ atinge seu valor máximo em $S = \rho$.
- $I(t)$ decresce se $S(t)$ está **abaixo do valor limiar** ρ.
- A resposta à terceira questão é dada pelo Teorema do Limiar.

Teorema do Limiar Epidêmico

Teorema.(do Limiar Epidêmico) *Seja $S_0 = \rho + \nu$ e suponha que ν/ρ é muito pequeno quando comparado com 1. Se o número inicial de infectados I_0 é muito pequeno, então o número de indivíduos que finalmente contraem a doença $S_0 - S_\infty$ é próximo de 2ν.*

Demonstração.

De $I(S) = I_0 + S_0 - S + \rho \ln(S/S_0)$ segue

$$I(S(t)) = I_0 + S_0 - S(t) + \rho \ln(S(t)/S_0)$$

Se $t \to \infty$, $0 = I_0 + S_0 - S_\infty + \rho \ln \frac{S_\infty}{S_0}$

Se I_0 é muito pequeno comparado a S_0, $I_0 \approx 0$. Fazendo $I_0 = 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= S_0 - S_\infty + \rho \ln \frac{S_\infty}{S_0} \\ &= S_0 - S_\infty + \rho \ln \left[\frac{S_0 - (S_0 - S_\infty)}{S_0}\right] \\ &= S_0 - S_\infty + \rho \ln \left[1 - \frac{(S_0 - S_\infty)}{S_0}\right]. \end{aligned}$$

Se $S_0 - \rho$ é pequeno comparado a ρ então $S - S_\infty$ será pequeno comparado a S_0. Usando série de Taylor de ordem 2,

$$\ln\left[1 - \left(\frac{S_0 - S_\infty}{S_0}\right)\right] \approx -\left[\frac{S_0 - S_\infty}{S_0}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{S_0 - S_\infty}{S_0}\right]^2$$

Logo, $0 = S_0 - S_\infty - \rho \left[\frac{S_0 - S_\infty}{S_0}\right] - \frac{\rho}{2}\left[\frac{S_0 - S_\infty}{S_0}\right]^2$

$$= (S_0 - S_\infty)\left[1 - \frac{\rho}{S_0} - \frac{\rho}{2S_0^2}(S_0 - S_\infty)\right]$$

Finalmente, $S_0 - S_\infty = 2S_0\left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right)$

$$= 2(\rho + \nu)\left[\frac{\rho + \nu}{\rho} - 1\right]$$

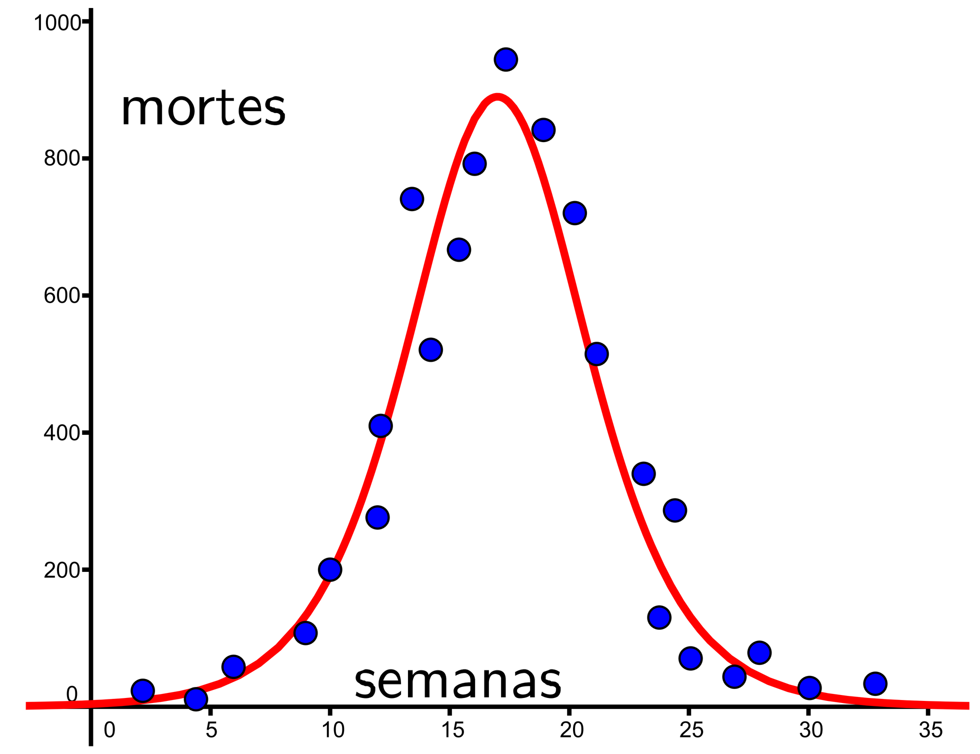
$$S_0 - S_\infty = 2(\rho + \nu)\frac{\nu}{\rho} = 2\rho\left(1 + \frac{\nu}{\rho}\right)\frac{\nu}{\rho}$$

$$\approx 2\nu. \qquad \blacksquare$$

Comparação do modelo SIR com dados de uma epidemia real.

Kermack e McKendrick comparam o modelo SIR com os dados reais de uma epidemia acontecida na India em 1906. Acharam $\frac{dR}{dt} = 890\ \mathrm{sech}^2(0.2t - 3.4)$, onde t = semanas e compararam com o número de mortes por semana da epidemia.

Usamos $\frac{dR}{dt}$ pois, durante uma epidemia é impossível termos dados concretos do número de infectados cada dia ou semana.



Referências

[1] Bailey, N. T. J., *The mathematical theory of epidemics*, 1957, New York.

[2] Braun, M. *Differential equations and their applications.* Springer-Verlag, 1993.

[3] Kermack, W.O.; MacKendrick A.G. *A contribuition to the mathematical theory of epidemics – I*, Proc. R. Soc. Lond. A, 115 (1927) 700.