VII BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA MATEMÁTICA
MACEIÓ - ALAGOAS

TOPOLOGIA m-ÁDICA

LUCENA, B.E.P.; COSTA, F. S.; ARAÚJO, L. D. A.; JÚNIOR, A. P. B (Orientador)

Universidade Federal de Campina Grande

bruna@dme.ufcg.edu.br; *fabiano@dme.ufcg.edu.br*

***laise@dme.ufcg.edu.br;* brandao@dme.ufcg.edu.br**

TOPOLOGIA m-ÁDICA

Sejam A um anel comutativo com unidade e m um ideal de A *tal que* $\bigcap_{n=1}^{\infty} m^n = 0$. Para cada $x \in A/\{0\}$, tomemos

$$v_m(x) = \max\{n \in N_0; x \in m^n\}$$

Definimos também $v_m(0) = +\infty$. Para cada $x, y \in A$ temos então:

1. $v_m(x) = v_m(-x)$
2. $v_m(x+y) \leq \min\{v_m(x), v_m(y)\}$
3. $v_m(xy) \geq v_m(x) + v_m(y) \geq v_m(y)$

Definimos agora a seguinte aplicação: $d_m: A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x, y) \longmapsto d_m(x, y) = e^{-v_m(x-y)}$, convencionando-se que $e^{-\infty} = 0$, para quaisquer $x, y, z \in A$ temos:

i. $d_m(x, y) \geq 0$ e $d_m(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
ii. $d_m(x, y) = d_m(y, x)$
iii. $d_m(x, y) \leq \max\{d_m(x, z), d_m(z, y)\}$
iv. $d_m(x + z, y + z) = d_m(x, y)$

Temos então que d_mé mais que uma métrica, é uma ultra métrica (uma métrica que satisfaz a condição iv acima que é mais forte que a desigualdade triangular), chamada de métrica m-ádica. E assim d_m induz em A uma topologia chamada de topologia m-ádica.

Dos resultados de análise real [1], já sabemos que se $\sum x_n$ é uma série numérica convergente, então $\lim x_n = 0$, sabemos também que a recíproca não é sempre verdadeira. Veremos que na topologia m-ádica impondo a condição da completude do anel A teremos que a volta do resultado é válida.

Teorema: Munido da topologia m-ádica, *A* é um anel topológico.

Comentário: Não é difícil ver que sendo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em *A* e $a\epsilon A$, então $a_n \longrightarrow a$ na métrica m-ádica se, e somente se, para cada $k\epsilon\mathbb{N}$, $\exists\, n_0\epsilon\mathbb{N}$ tal que $a_n - a \,\epsilon\, m^k$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Lema: Considere em *A* a métrica m-ádica, temos que (x_n) é uma sequência de Cauchy em *A* se, e somente se, $x_{n+1} - x_n \longrightarrow 0$, ou equivalentemente, $d_m(x_{n+1}, x_n) \longrightarrow 0$.

Teorema: Considere em *A* a métrica m-ádica. Se *A* é completo, então a série $\sum x_n$ converge se, e somente se, $x_n \longrightarrow 0$.

Demonstração: A é dito completo quando toda sequência de Cauchy é convergente. Sendo $\sum x_n$ *convergente, existe* $S = lim\, s_n$ *, e é claro que* $S = lim\, s_{n-1}$*, assim*

$$0 = S - S = lim(S_n - S_{n-1}) = lim x_n$$

Considerando $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ *. Suponha* $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = 0$ *e observe que* $S_{n+1} - S_n = x_{n+1} \longrightarrow 0$ *quando* $n \longrightarrow \infty$. *Pelo lema acima,* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é de Cauchy e sendo A completo, concluímos que* $\sum x_n$ *é convergente.*

REFERÊNCIAS

[1]LIMA. E.L. Curso de análise; V.1. 13.ed.Rio de Janeiro: IMPA, 2011. Projeto Euclides.
[2]LIMA. E.L. Espaços métricos. 2.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1983.
[3]PIERRE. S. Anneaux Factoriels: rédaction de artibano micali. 10.ed. São Paulo: Sociedade de Matemática de São Paulo, 1963.