



VII BIENAL DA SOCIEDADE
BRASILEIRA MATEMÁTICA
MACEIÓ - ALAGOAS



TOPOLOGIA m-ÁDICA

LUCENA, B.E.P.; COSTA, F. S.; ARAÚJO, L. D. A.;
JÚNIOR, A. P. B (Orientador)

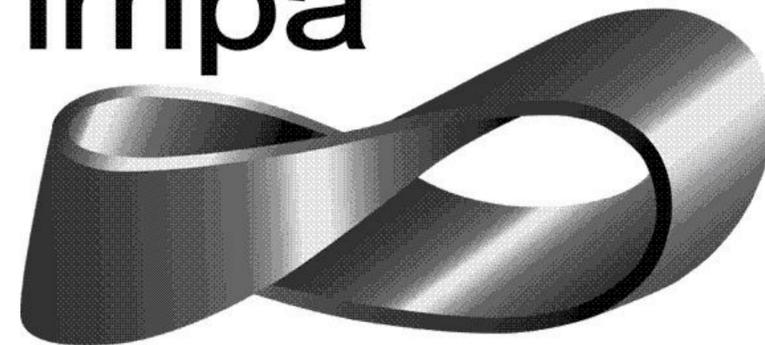
Universidade Federal de Campina Grande

bruna@dme.ufcg.edu.br; fabiano@dme.ufcg.edu.br

laise@dme.ufcg.edu.br; brandao@dme.ufcg.edu.br



impa



TOPOLOGIA m-ÁDICA

Sejam A um anel comutativo com unidade e m um ideal de A tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} m^n = 0$. Para cada $x \in A/\{0\}$, tomemos

$$v_m(x) = \max\{n \in \mathbb{N}_0; x \in m^n\}$$

Definimos também $v_m(0) = +\infty$. Para cada $x, y \in A$ temos então:

1. $v_m(x) = v_m(-x)$
2. $v_m(x + y) \leq \min\{v_m(x), v_m(y)\}$
3. $v_m(xy) \geq v_m(x) + v_m(y) \geq v_m(y)$

Definimos agora a seguinte aplicação: $d_m: A \times A \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto d_m(x, y) = e^{-v_m(x-y)}, \text{ convencionando-se que}$$

$e^{-\infty} = 0$, para quaisquer $x, y, z \in A$ temos:

- i. $d_m(x, y) \geq 0$ e $d_m(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- ii. $d_m(x, y) = d_m(y, x)$
- iii. $d_m(x, y) \leq \max\{d_m(x, z), d_m(z, y)\}$
- iv. $d_m(x + z, y + z) = d_m(x, y)$

Temos então que d_m é mais que uma métrica, é uma ultra métrica (uma métrica que satisfaz a condição iv acima que é mais forte que a desigualdade triangular), chamada de métrica m-ádica. E assim d_m induz em A uma topologia chamada de topologia m-ádica.

Dos resultados de análise real [1], já sabemos que se $\sum x_n$ é uma série numérica convergente, então $\lim x_n = 0$, sabemos também que a recíproca não é sempre verdadeira. Veremos que na topologia m-ádica impondo a condição da completude do anel A teremos que a volta do resultado é válida.

Teorema: Munido da topologia m-ádica, A é um anel topológico.

Comentário: Não é difícil ver que sendo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em A e $a \in A$, então $a_n \rightarrow a$ na métrica m-ádica se, e somente se, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n - a \in m^k$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Lema: Considere em A a métrica m-ádica, temos que (x_n) é uma sequência de Cauchy em A se, e somente se, $x_{n+1} - x_n \rightarrow 0$, ou equivalentemente, $d_m(x_{n+1}, x_n) \rightarrow 0$.

Teorema: Considere em A a métrica m-ádica. Se A é completo, então a série $\sum x_n$ converge se, e somente se, $x_n \rightarrow 0$.

Demonstração: A é dito completo quando toda sequência de Cauchy é convergente. Sendo $\sum x_n$ convergente, existe $S = \lim s_n$, e é claro que $S = \lim s_{n-1}$, assim

$$0 = S - S = \lim(S_n - S_{n-1}) = \lim x_n$$

Considerando $S_n = \sum_{i=1}^n x_i$. Suponha $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0$ e observe que $S_{n+1} - S_n = x_{n+1} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Pelo lema acima, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy e sendo A completo, concluímos que $\sum x_n$ é convergente.

REFERÊNCIAS

- [1]LIMA. E.L. Curso de análise; V.1. 13.ed.Rio de Janeiro: IMPA, 2011. Projeto Euclides.
- [2]LIMA. E.L. Espaços métricos. 2.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1983.
- [3]PIERRE. S. Anneaux Factoriels: rédaction de artibano micali. 10.ed. São Paulo: Sociedade de Matemática de São Paulo, 1963.