VII BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA MATEMÁTICA
MACEIÓ - ALAGOAS

UMA INCRÍVEL EDO UNIVERSAL

GEOVANY FERNANDES PATRICIO

PATRICIO, G.F. SOUSA, T. A. CAVALCANTE, F. B.
DE MORAIS FILHO, D. C. (Orientador)

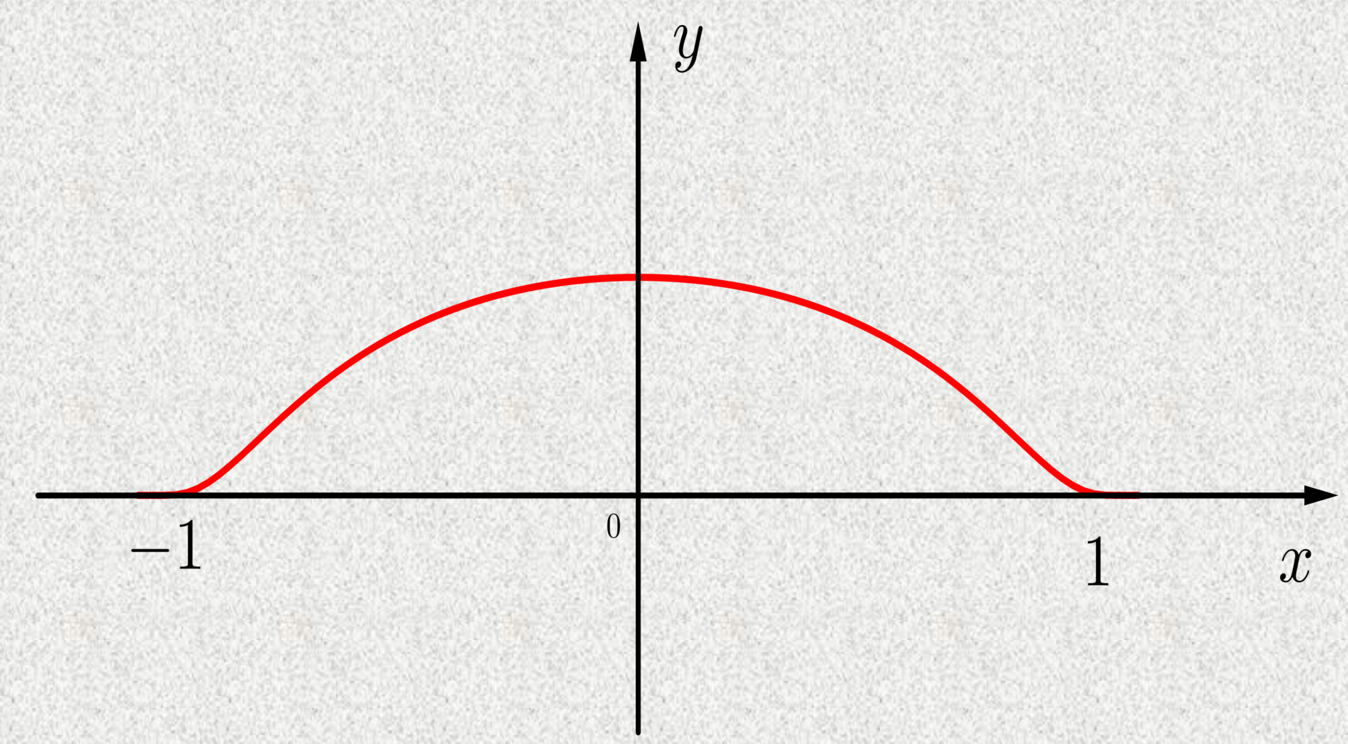
Universidade Federal de Campina Grande
geovany@dme.ufcg.edu.br; *tiagoalves@dme.ufcg.edu.br*
felipeb@dme.ufcg.edu.br; daniel@dme.ufcg.edu.br

Teorema: *Existe uma equação diferencial de quarta ordem* $P(y', y'', y''', y'''')$ (1) *onde* P *é um polinômio em quatro variáveis, com coeficiente constantes, tal que para toda função real contínua* φ *definida em* $\mathbb{R}$, *e para todo* $\epsilon > 0$, *existe uma solução* y *de* (1) *tal que* $\sup_{t\in\mathbb{R}}|y(t) - \varphi(t)| < \epsilon$. *Mais especificamente uma equação homogênea de grau 7 e ordem quatro e tem a seguinte forma*:

$$3{y'}^4 y'' {y''''}^2 - 4{y'}^4 {y'''}^2 y'''' + 6{y'}^3 {y''}^2 y''' y'''' + 24{y'}^2 {y''}^4 y'''' - 12{y'}^3 y'' {y'''}^3 - 29{y'}^2 {y''}^3 {y'''}^2 + 12{y''}^7 = 0$$

Demonstração. Vamos escrever o polinômio $P(y', y'', y''', y'''') = 0$ explicitamente. Considere as funções:

$$f(t) = \int g(t)dt \qquad \text{e} \qquad g(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{(1-t^2)}}, & |t| < 1 \\ 0, & \textit{caso contrário} \end{cases}$$



observe que $g(t)$, para $|t| < 1$, satisfaz uma EDO de primeira ordem, pois

$$g'(t) = -\frac{2t}{(1-t^2)^2} \cdot e^{-\frac{1}{(1-t^2)}} = -\frac{2t}{(1-t^2)^2} \cdot g(t) \Rightarrow g'(t) \cdot (1-t^2)^2 + 2t \cdot g(t) = 0$$

de modo que cada f e $af + b$, a e b constantes, satisfaçam uma EDO de segunda ordem, ou seja,

$$f''(t) = g'(t) \Rightarrow f''(t) = -f'(t) \cdot \frac{2t}{(1-t^2)^2} \Rightarrow f''(t) \cdot (1-t^2)^2 + 2t \cdot f'(t) = 0$$

A ideia é escrever uma EDO de quarta ordem, por diferenciação e manipulações algébricas, que venha a satisfazer todas as funções $y = Af(\alpha t + \beta) + B$ quaisquer que sejam as constantes A, α, β, B.

Seja $y = Af(\alpha t + \beta) + B$ tal que

$$y' = A \cdot \alpha \cdot f'(\alpha t + \beta),\ y'' = A \cdot \alpha^2 \cdot f''(\alpha t + \beta),\ y''' = A \cdot \alpha^3 \cdot f'''(\alpha t + \beta),\ y'''' = A \cdot \alpha^4 \cdot f''''(\alpha t + \beta)$$

Agora para $|s| < 1$

$i)\ f'(s) = g\,(s) = e^{-\frac{1}{(1-s^2)}}$

$ii)\ f''(s) = -\dfrac{2s}{(1-s^2)^2} \cdot e^{-\frac{1}{(1-s^2)}}$

$iii) f'''(s) = \dfrac{6s^4 - 2}{(1-s^2)^4} \cdot e^{-\frac{1}{(1-s^2)}}$

$iv)\ f''''(s) = \dfrac{-24s^7 - 12s^5 + 40s^3 - 12s}{(1-s^2)^6} \cdot e^{-\frac{1}{(1-s^2)}}$

Sendo, $s = \alpha t + \beta$, temos

$y'' = A \cdot \alpha^2 \cdot f''(s)$, onde $f''(s) = -\dfrac{2s}{(1-s^2)^2} \cdot e^{-\frac{1}{(1-s^2)}}$

Vamos obter a seguinte expressão:

$$\alpha = -\frac{y''}{y'} \cdot \frac{(1-s^2)^2}{2s} \quad (\boldsymbol{I})$$

Sendo $y''' = A \cdot \alpha^3 \cdot f'''(s)$ temos,

$$\begin{aligned} y''' &= A \cdot \alpha^3 \cdot \frac{6s^4 - 2}{(1-s^2)^4} \cdot f'(s) \\ &= A \cdot \alpha^3 \cdot \frac{6s^4 - 2}{(1-s^2)^4} \cdot \frac{y'}{A \cdot \alpha} \quad (\boldsymbol{II}) \end{aligned}$$

Substituindo (I) em (II)

$$3y''^2 s^4 - 2y'y'''s^2 - y''^2 = 0$$

Agora fazendo $r = s^2$ e resolvendo a equação chegamos a:

$$r = \frac{2y''y''' + \sqrt{4y'^2 y'''^2 + 12y''^2 y''^2}}{6y''^2}$$

Sendo $r = s^2$ então

$$s^2 = \frac{2y''y''' + \sqrt{4y'^2 y'''^2 + 12y''^2 y''^2}}{6y''^2} \quad (*)$$

Por outro lado,

$$y'''' = A \cdot \alpha^4 \left(\frac{-24s^7 - 12s^5 + 40s^3 - 12s}{(1-s^2)^6} \cdot f'(s) \right) \ (**)$$

Substituindo $(*)$ em $(**)$ e isolando os termos que apare – cem com raizes em um dos lados da igualdade e elevando ao quadrado vamos ficar com a seguinte expressão:

$$3y'^4 y'' y''''^2 - 4y'^4 y'''^2 y'''' + 6y'^3 y''^2 y''' y'''' + 24y'^2 y''^4 y'''' - $$
$$-12y'^3 y'' y'''^3 - 29y'^2 y''^3 y'''^2 + 12y''^7 = 0$$

As soluções de (1).

Dada uma função φ contínua , essa função pode ser aproxi – mada por uma função poligonal P_ϵ , com $sup_{t\in\mathbb{R}}|P_\epsilon - \varphi| < \frac{\epsilon}{2}$.
O próximo passo é encontrar parâmetros constantes A, α, β e B de sorte que $sup_{t\in\mathbb{R}}|P_\epsilon - \varphi| < \frac{\epsilon}{2}$.
Essa aproximação é feita em intervalos fechados da reta e estendida, por colagem dessas funções, para toda reta.
Em outras palavras o conjunto de soluções de (1) é denso no espaço das funções contínuas.

$\blacksquare$

Referências:

[1] C. Elsner. "*A Universal Differential Equation of Degree 6*",Journal of Mathematical Analysis and Application 244, 533-544, 2000.

[2] R. J. Duffin. "*Rubel's Universal Differential Equation*", Proc. Natl. Acad. Sci. USA, Vol. 78, No. 8, pp. 4661-4662, 1981.

[3] Lee. A. Rubel. "*A Universal Differential Equation*" American Mathematical Society, Vol. 4, Number3, May 1981.

[4] <http://mohankv.blogspot.com.br/2009/10/understanding-rubels-universal.html>, consultada em 27/06/2014