As curiosas matrizes circulantes

Emanuel Carlos Albuquerque Alves
Tiago Alves de Sousa

Universidade Federal de Campina Grande
Unidade Acadêmica de Matemática

06 de Novembro de 2014

Método

Objetivo Explorar a curiosa resolução de equações polinomiais utilizando matrizes circulantes e conceitos de álgebra linear.

Método

- Seja p um polinômio de grau n ao qual deseja-se determinar as raízes.
- Considere uma matriz circulante C formada pelo vetor $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ \ a_{n-1})$, que apresente polinômio característico igual a p, ou seja, $p_c(x) = p(x)$. Logo, as raízes de p serão autovalores da matriz C.
- Podemos associar a matriz C a um polinômio q de coeficientes $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ \ a_{n-1})$ de sorte que $C = q(M)$, com M sendo uma matriz circulante de vetor $(0, 1, 0, ..., 0)$ e de raízes complexas da unidade (ω) como autovalores.
- **Proposição 1:** $Mv = \omega v \Rightarrow Cv = q(\omega)v$, com v sendo o autovetor.
- A proposição 1 nos diz que os autovalores da matriz circulante C são da forma $q(\omega)$. Portanto, as raízes de $p = p_c$ também são $q(\omega)$.

Exemplificação

Calcular as raízes de $p(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 1$.

Resolução

Considere a matriz $C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$ de polinômio característico p_c e $q(x) = a + bx + cx^2$ o polinômio associado a C.

Daí, $p(x) = \mathrm{p_c}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 3a & = & 3 \\ 3bc - 3a^2 & = & 3 \\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc & = & 1 \end{cases}$.

Podemos concluir, a partir do sistema acima, que $q(x) = 1 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}x^2$.
Portanto, pela proposição 1, têm-se $q(1), q(w)$ e $q(\overline{w})$ tanto como autovalores de C, quanto raízes do polinômio $p(x)$, com $w = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

KALMAN, D.; WHITE, J. E..*Polynomial Equations and Circulant Matrices.* The Mathematical Association of America, Vol.108, nº 9, p. 821-840, 2001.