SOBRE DECOMPOSIÇÕES DE LIOUVILLE

Elaine Cristine de Souza Silva[1]

Orientador: Prof. Dr. Diego Marques
Universidade de Brasília

Novembro de 2014, Maceió-AL, Brasil

[1]Bolsista CNPQ

Definição. Um número real ξ é chamado *número de Liouville* se existir uma sequência de racionais distintos $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j\geq 1}$ tal que $q_j > 1$ e $0 < \left|\xi - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}$ para todo $j \geq 1$.

Definição. Sejam $X \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $\alpha \in \mathbb{R}$, dizemos que f é *localmente injetiva em* α se existem abertos U e V em $\mathbb{R}$, $U \times V \subseteq X$, tais que:

(i) Para todo $x \in U$, existe um único $y \in V$ de modo que $f(x, y) = \alpha$;

(ii) Para todo $y \in V$, existe um único $x \in U$ de modo que $f(x, y) = \alpha$.

Mais precisamente dizemos que f *é localmente injetiva em* α *sobre* $U \times V$.

Exemplo. $f : \mathbb{R}_+^* \times ((0, 1) \cup (1, +\infty)) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = y^{1/x}$ é localmente injetiva para qualquer α positivo diferente de 0 e 1.

Teorema. *Sejam* $X \subseteq \mathbb{R}^2$ *aberto,* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua e* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Suponha que* f *é localmente injetiva em* α *sobre* $U_1 \times V_1 \subseteq X$ *e que* $g_1 : U_1 \longrightarrow V_1$ *e* $g_2 : V_1 \longrightarrow U_1$*, definidas implicitamente por* $f(x, g_1(x)) = \alpha$ *e* $f(g_2(y), y) = \alpha$*, são aplicações abertas. Então, existem números de Liouville* σ *e* τ *tais que* $f(\sigma, \tau) = \alpha$.

Aplicação. Dado α real positivo diferente de 0 e 1 existem l_1 e l_2 números de Liouville tais que $l_2^{1/l_1} = \alpha$, consequentemente, α^{l_1} é um número de Liouville. Em particular, existem números de Liouville σ e τ tais que $e^{\tau} = \sigma$.

Referências

[1] BURGUER, E. *On Liouville decompositions in local fields*. Procedings of the A.M.S., **124** (1996) 3305-3310.

[2] ERDÖS, P. *Representations of real numbers as sums and products of Liouville numbers*, Michigan Math. J. **9**, 1962, 59-60.

[3] MARQUES, D. *Teoria dos números transcendentes*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.