Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Prova de Seleção de Doutorado

Data: 20 de junho de 2016

Início: 9 horas - Término: 12 horas

---

1. Parte 1 - Julgue a veracidade de afirmações, com breve justificativa.

1- Um ponto crítico não degenerado de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 é sempre um ponto isolado.

( ) Verdadeiro ou ( ) Falso

2- Dado $r \in (0,1)$, a função $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) = x^r$ é Lipschitziana.

( ) Verdadeiro ou ( ) Falso

3- Sejam $f, g : A \to \mathbb{R}$ funções integráveis definidas em um conjunto $J-$mensurável $A \subset \mathbb{R}^n$. Se $\displaystyle\int_A f(x)dx > \int_A g(x)dx$, então $f(x) > g(x)$ para todo $x \in A$.

( ) Verdadeiro ou ( ) Falso

4- Sejam a um ponto de acumulação de $X \subset \mathbb{R}^n$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real. Se $L = \lim_{x \to a} f(x)$ é um número positivo, então existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$ implicam $f(x) > 0$.

( ) Verdadeiro ou ( ) Falso

2. Parte 2 - Resolva os seguintes problemas

1- Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e seja $f : I \to \mathbb{R}^n$ um caminho diferenciável tal que $f(t) \neq 0$ e $f'(t) = \lambda(t) f(t)$ para todo $t \in I$. Prove que a imagem $f(I)$ está contida numa reta que passa pela origem.

2- Sejam $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ o espaço das transformações lineares de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$, e $A : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^p$. Defina $f : U \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ por $f(x, v) = A(x) \cdot v$. Prove que f é diferenciável e que $f'(x, v) \cdot (h, k) = (A'(x) \cdot h) \cdot k + A(x) \cdot k$.

3- Seja $f : U \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$ no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se, no ponto $a \in U$, a derivada $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo, prove que

$$\lim_{r \to 0} \frac{\text{volume}(f(B(a;r))}{\text{volume}(B(a;r))} = |\det f'(a)|,$$

onde $B(a;r)$ é a bola de centro a e raio r.

4- Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $g : U \to \mathbb{R}^m$ e $f : U \to \mathbb{R}^n$ aplicações de classe C^k, $k \geq 1$, sendo $V = f(U)$ um aberto do $\mathbb{R}^n$. Defina $F : U \times \mathbb{R}^m \to V \times \mathbb{R}^m$ por

$$F(x, y) = (f(x), y + g(x)).$$

Prove que F é um difeomorfismo de classe C^k se, e somente se, f é um difeomorfismo de classe C^k.