Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Prova de Seleção de Mestrado

Data: 20 de junho de 2016

Início: 08 horas

Término: 12 horas

---

1. Parte 1 - Julgue a veracidade de afirmações, com breve justificativa.

1- O número $\dfrac{1}{4}$ pertence ao conjunto de Cantor K.

( ) Verdadeiro ou ( ) Falso

2- Sejam V um espaço vetorial e $W \subset V$ um subespaço vetorial. Sempre existe uma transformação linear $T : V \to V$ tal que $T(V) = W$.

( ) Verdadeiro ou ( ) Falso

3- Todo conjunto de conteúdo nulo é enumerável.

( ) Verdadeiro ou ( ) Falso

4- No conjunto $C^0[0,\pi]$, conjunto das funções contínuas no intervalo $[0,\pi]$, as funções $f(x) = x$, $g(x) = sen\, x$ e $h(x) = \cos x$ são linearmente dependentes.

( ) Verdadeiro ou ( ) Falso

2. Parte 2 - Resolva os seguintes problemas

1- Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Prove que são equivalentes:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| = \lim\limits_{x\to-\infty} |f(x)| = +\infty$;
(b) Se $|x_n| \to +\infty$, então $|f(x_n)| \to +\infty$;
(c) Se K é compacto, então $f^{-1}(K)$ é compacto.

2- Sejam V e W espaços vetoriais complexos de dimensão finita e $T : V \to W$ uma transformação linear. Defina a aplicação $S : W' \to V'$ por $S(f) = f \circ T$, onde V' indica o conjunto dos funcionais lineares sobre V e $\circ$ significa composição. Prove que existem bases dos espaços vetoriais V, W, V' e W' tal que a matriz que representa S é a transposta da matriz que representa T, nas respectivas bases.

3- Toda função $g : (-2,2) \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável na origem e tal que $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$ satisfaz $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x^2} = 0$.

4- Sejam V um espaço vetorial complexo e com produto interno e $T : V \to V$ um operador linear. Assuma que $\langle Tu, u\rangle = 0$ para todo $u \in V$. Prove que T é identicamente nulo.