UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EXAME DE ANÁLISE NO $\mathbb{R}^n$

1. Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ duas funções diferenciáveis tais que

$$\nabla f(X) = h(X)\, X.$$

   Mostre que f é constante sobre a esfera de raio r e centro na origem, $S_r(0)$.

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Mostre que f não é injetiva.

3. Mostre que o conjunto das matrizes de ordem n e de posto $n-1$ é uma hipersuperfície orientável.

4. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação definida por

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

   Determine os pontos de $\mathbb{R}^2$ para os quais f é localmente invertível e determine se f tem uma inversa definida em todo $\mathbb{R}^2$.

5. Seja A um conjunto J-mensurável em $\mathbb{R}^n$ contido em algum retângulo R. Prove que

$$Vol(A) = \sup_P \sum_{B \in P \,e\, B \subset R} Vol(B),$$

   onde o supremo é tomado sobre todas as partições P de R.

BOM EXAME !!!!!