UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

EXAME DE MESTRADO DE ÁLGEBRA

Data: 9 de julho de 2004
Horário: 8h 30 min

Aluno: ____

1- Decida se o polinômio $p(X)$ abaixo é irredutível em $A[X]$, onde:
(a) $p(X) = X^3 + 2X^2 + X + 2$ e $A = \mathbb{Z}$;
(b) $p(X) = X^{q-1} + X^{q-2} + ... + X + 1$, onde q é um primo e $A = \mathbb{Q}$;
(c) $p(X) = 2X^{12} + 5(1+3i)X^{10} + 39X^3 + 13$ e $A = \mathbb{Z}[i]$.

2- Mostre que $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] \approx \dfrac{\mathbb{Z}[X]}{(X^2-3)}$. Utilizando este fato, dado um número primo p em $\mathbb{Z}$, mostre que p é elemento primo de $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, se e somente se o polinômio $X^2 - 3$ é irredutível em $\dfrac{\mathbb{Z}}{(p \cdot \mathbb{Z})}[X]$.

3- Sejam D_6 o dihedral com 12 elementos e a:= rotação plana de ângulo $\dfrac{2\pi}{5}$. Mostre que
(a) $Z(D_6) = < a^3 >$ e que $\mathcal{I}(D_6) \approx S_3$;
(b) $D_6 \approx S_3 \times \dfrac{\mathbb{Z}}{2 \cdot \mathbb{Z}}$;
(c) $\mathrm{Aut}(D_6) \approx D_6$.

4- Seja G um grupo de ordem $2^2 \cdot 3^n$. Mostre que G possui um subgrupo normal de ordem 3^n ou 3^{n-1}.

5- Seja G um grupo de ordem $2^n \cdot k$ com k um número ímpar tal que $n > k$. Mostre que G não pode ser simples.

BANCA EXAMINADORA
1. Prof. Hilário Alencar
2. Prof. Krerley Oliveira