UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

EXAME DE MESTRADO DE ÁLGEBRA

Data: 11 de julho de 2005
Horário: 8h

Aluno: ____

1- Analise a irredutibilidade dos seguintes polinômios $A[X]$:
(a) $p(X) = X^3 + (1329!)X^2 + 3002X + 12001$ e $A = \mathbb{Z}$;
(b) $p(X) = X^{q-1} + X^{q-2} + ... + X + 1$, onde q é um primo e $A = \mathbb{Q}$;
(c) $p(X) = X^3 + X^2 + X + 1$ e $A = \mathbb{Z}[i]$.

2- Seja $F_{11} := \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$. Mostre que $F_{11}[X]/(X^2 + \bar{1})$ é um corpo com 121 elementos.

3- Seja $G = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; a \neq 0\}$ munido da operação $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + b)$.
(a) Mostre que G é um grupo não abeliano;
(b) Seja $H = \{(1, b); b \in \mathbb{R}\}$. Mostre que $H \lhd G$ e $G/H \backsimeq \mathbb{R}^*$.

4- Seja G um grupo finito, tal que $|G| = nm$ tal que $(n, m) = 1$. Suponha que existe um subgrupo H de G, tal que $|H| = n$. Prove que H é o único subgrupo de G de ordem n, se e somente se $H \lhd G$.

5- Analise se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique, em cada caso, sua resposta.
(a) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \backsimeq S_3$;
(b) Sejam p um número primo e G um grupo tais que $|G| = p$ ou $|G| = p^2$. Então G é abeliano;
(c) Se G é um grupo tal que $|G| = 242$, então a quantidade de elementos de ordem 2 é ímpar.

BANCA EXAMINADORA
1. Prof. Adán Corcho
2. Prof. Fernando Echaiz