UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

EXAME DE MESTRADO DE GEOMETRIA DIFERENCIAL

Data: 29 de dezembro de 2004
Horário: 8h 30 min

Aluno: ____

1- Sejam S uma superfície orientada e N um campo normal unitário à S. Mostre que

$$div(N)(p) = -2H(p) \ \ \forall\, p \in S,$$

onde H é a curvatura média de S.

2- Mostre que não existem superfícies mínimas e fechadas em $\mathbb{R}^3$.

3- Sejam Σ uma superfície regular difeomorfa a uma esfera, γ uma geodésica fechada simples em Σ, e A e B as duas regiões de Σ que têm γ por fronteira comum. Seja $N : \Sigma \to S^2$ a aplicação normal de Gauss. Mostre que $N(A)$ e $N(B)$ possuem a mesma área (orientada).

4- Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular compacta. Prove que

(a) Se a curvatura Gaussiana K de S é maior ou igual a zero, então S é difeomorfa a uma esfera. Dê exemplo de uma tal superfície;

(b) Se S não é homeomorfa a uma esfera, então S possui pontos elípticos, parabólicos e hiperbólicos. Dê exemplo de uma tal superfície.

5- Assinale certo ou errado nas afirmações abaixo justificando sua resposta.

(a) Para cada superfície compacta M, existe um $\epsilon > 0$ tal que M não contém geodésicas fechadas de comprimento menor do que ϵ.

(b) Se entre duas superfícies existe um difeomorfismo que preserva curvaturas, então elas são isométricas;

(c) Em uma superfície de revolução, todos os paralelos são geodésicas;

(d) Suponha que duas superfícies S e $\overline{S}$ sejam tangentes ao longo de uma curva C. Então C é geodésica de S, se e somente se C é geodésica de $\overline{S}$;

(e) Seja $f : S \to \overline{S}$ uma aplicação diferenciável que é localmente uma isometria. Seja $C \subset S$ uma linha assintótica de S. Então $f(S)$ é uma linha assintótica de $\overline{S}$;

(f) Uma geodésica minimiza o comprimento entre dois quaisquer de seus pontos;

(g) A imagem pela aplicação normal de Gauss de uma superfície compacta cobre a esfera pelo menos uma vez;

(h) Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma aplicação C^1 e $a \in \mathbb{R}$ um valor regular de f. Então $f^{-1}(a)$ é uma superfície orientável;

(i) Seja $p \in S$ um ponto de curvatura Gaussiana negativa. Então existe uma vizinhança de p na qual dois pontos distintos têm normais não paralelas;

(j) Seja S uma superfície compacta. O conjunto dos pontos de S que têm curvatura Gaussiana zero é compacto.

6- Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular compacta com curvatura Gaussiana positiva. Prove que duas geodésicas de S sempre se intersectam.

BANCA EXAMINADORA
1. Prof. Fernando Codá Marques
2. Prof. Hilário Alencar