UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

EXAME DE MESTRADO DE ANÁLISE

Data: 16 de julho de 2004
Horário: 8h 30 min

Aluno: ____

1- Seja $f : A \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função localmente Lipschitziana, isto é, para cada $x_0 \in A$, existe uma bola $B(x_0; r)$ em $\mathbb{R}^m$ tal que $f|B(x_0; r) \cap A$ é Lipschitziana. Prove que se A é compacto, então f é Lipschitziana.

2- Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$, diz-se localmente conexo quando, para cada $x_0 \in X$, existe $r > 0$ tal que o conjunto $X \cap B(x_0; \rho)$ é conexo para qualquer $0 < \rho \leq r$. Responder e justificar as seguintes questões:

(a) Todo conjunto conexo é localmente conexo?

(b) Todo conjunto localmente conexo é conexo?

3- Classifique cada uma das afirmações abaixo como verdadeira ou falsa. Para as afirmações verdadeiras apresente uma justificativa e para as afirmações falsas dê um contra-exemplo.

(a) Se $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável, com $\lim\limits_{|x|\to\infty} f'(x)x = 0$, então a aplicação $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $g(x) = f(2x) - f(x)$, é limitada;

(b) As imersões $f : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 definidas em um aberto U de $\mathbb{R}^m$ são aplicações abertas;

(c) As submersões $f : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 definidas em um aberto U de $\mathbb{R}^m$ são aplicações abertas.

4- Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, definida por $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$.

(a) Mostre que, se p e q são pontos da esfera unitária S^2 com centro na origem, então $f(p) = f(q)$, se e somente se $p = \pm q$;

(b) Mostre que f é uma imersão de classe C^∞ para todo $p \in S^2 \setminus \{a, -a\}$, onde $a = (0, 0, 1)$.

5- Classifique cada uma das afirmações abaixo como verdadeira ou falsa. Para as afirmações verdadeiras apresente uma justificativa e para as afirmações falsas dê um contra-exemplo.

(a) Se um compacto $A \subset \mathbb{R}^n$ tem medida nula, então K tem conteúdo nulo;

(b) Se um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tem conteúdo nulo, então K tem medida nula;

(c) Um conjunto limitado $X \subset \mathbb{R}^n$ é J- mensurável, se e somente se sua fronteira ∂X tem medida nula;

(d) Seja $B \subset \mathbb{R}^n$ um bloco n-dimensional fechado. Se $A \subset B$ é um conjunto de medida nula, então a medida da fronteira de A tem medida nula.

6- Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto U de $\mathbb{R}^n$. Para algum $a \in U$, seja $f'(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um isomorfismo. Mostre que $\lim_{r \to 0} \dfrac{\text{vol.} f(B[a;r])}{\text{vol.} B[a;r]} = |\text{det} f'(a)|$.

BANCA EXAMINADORA
1. Prof. Adán Corcho
2. Prof. Ediel Azevêdo