Universidade Federal de Alagoas
Centro Ciências Exatas e Naturais - CCEN
Departamento de Pós-Graduação em Matemática

Exame de Mestrado em Análise no $\mathbb{R}^n$

Data: 18 de Julho de 2005
Horário: 8h30

1. Coloque (V) ou (F) e justifique:

   (i) A aplicação $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, dada por $f(x,y,z)=(x,x+y,x+y+z)$ preserva volume;

   (ii) A função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, dada por $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x,y)\neq(0,0)$ e $f(0,0)=0$, é diferenciável;

   (iii) Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é de classe C^2 e possui três zeros distintos, então $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ possui pelo menos um zero.

   (iv) O plano $\mathbb{R}^2$ é homeomorfo a esfera $\mathbb{S}^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2=1\}$;

   (v) Toda função $f:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ contínua é uniformemente contínua;

   (vi) A aplicação $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=x^3$ é uma submersão;

   (vii) A função $f:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=0$ se $x\neq\frac{1}{2}$ e $f\left(\frac{1}{2},y\right)=1$ se y é racional e $f\left(\frac{1}{2},y\right)=0$ se y é irracional é integrável.

2. Prove que não existe imersão de $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, se $m>n$.

3. Sejam M uma superfície compacta de dimensão n em $\mathbb{R}^{n+1}$ e F um hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$. Prove que existe $p\in M$, tal que $T_pM=F$.

4. Mostre que existe $\epsilon>0$, de modo que: se A é uma matriz $n\times n$ com $\|A-I\|<\epsilon$, então existe alguma matriz B tal que $A=B^2$. Generalize.

5. Prove que o conjunto das matrizes $n\times n$ com determinante diferente de 0 é um aberto denso de $\mathbb{R}^{n^2}$.

6. Um difeomorfismo C^1 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *preserva volume* se $vol(f(A))=vol(A)$, para todo cubo A. Mostre que f preserva volume se, e somente se, $|\det Df(x)|=1$, para todo $x\in\mathbb{R}^n$.