Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Álgebra - Julho/2006

Exame de Qualificação

1. [2,0] Responda verdadeiro ou falso, justificando.
   (a) O anel dos polinômios $A = \mathbb{Z}[X]$ é um domínio principal;
   (b) Seja $n \in \mathbb{N}$. Então o grupo multiplicativo $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^*$ é um grupo cíclico;
   (c) Todo ideal do anel $\mathbb{Z}[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ é um ideal finitamente gerado;
2. [1,0] Sejam p primo e $f(X) := X^p + 2p^3X^2 - X + 1$. Mostrar que $f(X)$ é irredutível em $\mathbb{Q}[X]$.
3. [2,0] Seja $p(X)$ um polinômio irredutível de grau n sobre $\mathbb{Z}_p$, p primo, e seja $J = p(X) \cdot \mathbb{Z}_p[X]$. Prove que $\mathbb{Z}_p[X]/J$ é um corpo com exatamente p^n elementos.
4. [2,0] Decida se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falasa, justificando:
   (a) O Kernel de um homomorfismo de grupos é um subgrupo normal;
   (b) A_n é um subgrupo normal de S_n;
   (c) $\mathbb{Z}_8$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$;
   (d) S_{17} possui um elemento de ordem 23.
5. [1,0] Seja D_5 o grupo dihedral com 10 elementos. Sejam $a :=$ rotação plana de ângulo $2\pi/5$ e $b :=$ uma das reflexões. Mostre que:
   (a) $Z(D_5) = \{id\}$
   (b) Calcule o subgrupo dos comutadores de D_5.
6. [2,0] Seja G um grupo de ordem $11^2.13^2$.
   (a) Mostre que G é possui um subgrupo normal de ordem 13
   (b) Mostre que G é possui um subgrupo normal de ordem 11
   (c) Mostre que G é abeliano.

Duração: 3 horas.