Universidade Federal de Alagoas

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

1º Exame de Álgebra Linear - Verão 2007 - 19/01/2007

Nome:

1- Um cone $C \subset E$ ($E$ espaço vetorial) é um conjunto convexo se, e somente se, $u, v \in C \Rightarrow u + v \in C$.

2- Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ chama-se simétrica (respectivamente, anti-simétrica) quando $a_{ij} = a_{ji}$ (respectivamente, $a_{ij} = -a_{ji}$) para todo $i$ e todo $j$. Prove que o conjunto $\mathcal{S}$ das matrizes simétricas e o conjunto $\mathcal{A}$ das matrizes anti-simétricas $n \times n$ são subespaços vetoriais de $M(n \times n)$ e que se tem $M(n \times n) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

3- Analise as afirmações e justifique suas respostas:

a) Para todo subespaço vetorial $F \subset \mathbb{R}^n$, existe um subespaço $G \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbb{R}^n = F \oplus G$;

b) Os vetores $v_1, ..., v_m$ são L.I. se, e somente se, os vetores $v_1, v_2 - v_1, ..., v_m - v_1$ também são L.I.;

c) Pode-se ter uma base de $\mathcal{P}_n$ formada por $n + 1$ polinômios de grau $n$;

d) O conjunto $\{1, e^x, e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}\}$ é L.I. no espaço $C^\infty(\mathbb{R})$.

4- É dada uma isometria $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, isto é, $|f(x) - f(y)| = |x - y|$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$. Prove que existem $a \in \mathbb{R}^n$ e uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tais que $f(x) = T(x) + a$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$. Prove que $T$ também preserva distâncias.

5- Sejam $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear e $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a projeção ortogonal sobre uma reta $r$ (passando pela origem). Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

a) Para todo $v \in r$ tem-se $Av \in r$;

b) $PAP = AP$.

6- a) Seja $A : E \to E$ linear. Prove que $A^2 = 0$ se, e somente se, $\mathcal{I}m(A) \subset \mathcal{N}(A)$;

b) Dado um funcional linear não-nulo $f : E \to \mathbb{R}$, prove que existe um vetor $u \in E$ tal que $f(u) = 1$. Seja $F \subset E$ o subespaço (reta) gerado por $u$. Prove que $E = F \oplus \mathcal{N}(f)$.