UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Exame de Geometria Diferencial - 07/12/2006

Aluno(a): ____

(1) Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Mostre que a difencial da aplicação normal de Gauss de S é uma transformação linear auto-adjunta.

(2) Descreva a região da esfera unitária coberta pela aplicação normal de Gauss das seguintes superfícies:
(a) Parabolóide de revolução: $z = x^2 + y^2$;
(b) Hiperbolóide de revolução: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$;
(c) Catenóine: $x^2 + y^2 = \cosh^2 z$.

(3) Considere a parametrização $X(\theta, \phi) = (2\sin\phi\cos\theta, 2\sin\phi\sin\theta, 2\cos\phi)$, onde $0 < \theta < \pi$, $-\dfrac{\pi}{2} < \phi < \dfrac{\pi}{2}$, de um aberto S contido na esfera de raio 2 em R^3.
(a) Determine uma base ortonormal do plano tangente $T_{X(\theta,\phi)}S$;
(b) Dada uma curva $\alpha(\theta) = (2\sin\phi_0\cos\theta, 2\sin\phi_0\sin\theta, 2\cos\phi_0)$, onde $0 < \phi_0 < \frac{\pi}{2}$, determine a derivada covariante $\left(\dfrac{D\alpha'}{d\theta}\right)(\frac{\pi}{2})$. Aqui α' é o campo velocidade da curva α.

(4) Mostre que se x é uma parametrização ortogonal, isto é, $F = 0$, então

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_v}{\sqrt{EG}}\right)_u\right\}.$$

(5) Calcule a característica de Euler-Poincaré do *elipsóide* e da *superfície* $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^{10} + z^6 = 1\}$.