

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

EXAME DE MESTRADO EM ANÁLISE

Data: 12 de julho de 2007

Início: 8h.

Término: 12h.

Banca Examinadora

Prof. Vinícius Mello

Prof. Ediel A. Guerra

1- Demonstre ou refute as seguintes proposições:

- (a) O conjunto das matrizes reais $n \times n$ ($n \geq 2$) com determinante 1 é fechado mas não é compacto.
- (b) $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ é homeomorfo a $S^2 \times \mathbb{R}$.
- (c) O plano \mathbb{R}^2 é homeomorfo à esfera S^2 .
- (d) A reunião de uma família de compactos com um ponto em comum é um conjunto compacto.
- (e) As matrizes ortogonais $n \times n$ ($A^T A = I$) formam um subconjunto compacto de \mathbb{R}^{n^2} .

2- Defina continuidade uniforme e mostre que uma função uniformemente contínua em um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ leva seqüências de Cauchy em seqüências de Cauchy.

3- Sejam $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , com $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ em todos os pontos, e $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, g(x)) = 0$ para todo $x \in I$. Prove que g é de classe C^1 .

4- Mostre que o subconjunto do \mathbb{R}^3 definido pela equação

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xyz = 1$$

é uma hipersuperfície de classe C^∞ .

5- Seja $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ um difeomorfismo de classe C^1 .

(a) Mostre que

$$(f^n)'(x) = \prod_{i=1}^n f'(f^{n-i}(x)).$$

(b) Se $f(B) \subset B$, onde $B = B[0, 1]$ é a bola unitária fechada do \mathbb{R}^m e $|\det f'(x)| < 1$ para todo $x \in B$, prove que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{vol } f^n(B) = 0.$$

6- Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$:

- (a) Prove que se $\text{med } X = 0$ e Y está contido num bloco B , então $\text{med } X \times Y = 0$;
- (b) O que acontece quando Y não é necessariamente limitado ?