

**Universidade Federal de Alagoas**  
**Instituto de Matemática**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**

---

EXAME DE MESTRADO EM ANÁLISE

**Data: 26 de julho de 2007**

Início: 8h.

Término: 12h.

**Banca Examinadora**

Prof. Vinícius Mello

Prof. Ediel A. Guerra

---

**1-** Demonstre ou refute as seguintes proposições:

- (a) As matrizes ortogonais  $n \times n$  ( $A^T A = I$ ) formam um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^{n^2}$ .
- (b) A circunferência  $S^1$  e a esfera  $S^2$  são homeomorfas.
- (c) O cone  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z \geq 0, x^2 + y^2 = z^2\}$  e o  $\mathbb{R}^2$  são homeomorfos.
- (d) A imagem de um conjunto compacto por uma função contínua é um conjunto compacto.

**2-** Prove que não existe função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  que seja injetiva.

**3-** Prove que o conjunto dos pontos  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tais que

$$z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 = 1$$

é uma superfície  $C^\infty$ . Qual a forma dessa superfície ?

**4-** Seja  $\phi: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um difeomorfismo de classe  $C^1$ . Mostre que:

- (a)  $\phi$  leva conjuntos  $J$ -mensuráveis em conjuntos  $J$ -mensuráveis;
- (b) se  $\det \phi'(x) = 1$  para todo  $x \in U$ , então  $\phi$  preserva volumes.