UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

EXAME DE MESTRADO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Data: 18 de dezembro de 2004

Horário: 8h 30 min

Aluno: ____

1- Seja $f : [0, a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq \frac{q}{t}|y_1 - y_2|,$$

onde $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, $0 < t \leq a$ e $q < 1$. Mostre que existe uma única solução para o seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

2- Sejam

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{H}(t) = \begin{pmatrix} \cos \pi t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \tan \pi t \\ \cot \pi t & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcule a solução ψ de $x' = \mathcal{A}x$ tal que $x(0) = (a, b, c, d, e)$. Dê uma condição necessária e suficiente sobre as condições iniciais para que a solução ψ seja limitada;

(b) Considere a seguinte equação:

$$\text{(I)} \quad y' = \mathcal{H}(t)y + b(t), \quad \text{onde } b(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{\ln \lambda}{2} t} \\ e^{\frac{\ln \lambda}{2} t} \\ e^{\frac{\ln \lambda}{2} t} \end{pmatrix}.$$

Prove que, se ψ é uma solução de (I) com $\psi(2) = \lambda\psi(0)$, então $\psi(t + 2k) = \lambda^k \psi(t)$, $k \in \mathbb{N}$.

3- Sejam a, b, c, d números reais e $f, g : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ funções contínuas de classe C^1, onde $\mathcal{B}$ denota uma bola de centro na origem $(0, 0)$ de $\mathbb{R}^2$ e raio r. Considere o sistema

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} x' = ax + by + f(x, y), \\ y' = cx + dy + g(x, y), \end{cases}$$

onde $ad - bc = 1$ e $a + d \neq 0$.

(a) Prove que se $f = 0(r)$ e $g = 0(r)$ então a origem $(0,0)$ é um ponto singular isolado de (II);

(b) Suponha que $f(0,0) = g(0,0) = 0$ e $Df(0,0) = Dg(0,0) = 0$. Neste caso, descreva o espaço de fase para (II) numa vizinhança da origem;

(c) Mostre que o sistema abaixo não é topologicamente equivalente a nenhum dos tipos de sistemas encontrados em (b).

$$\begin{cases} x' = x^2, \\ y' = -y. \end{cases}$$

4- Seja p o polinômio, definido por $p(t) = \sum_{k=0}^{2004} a_k t^{2k+1}$, com coeficientes positivos. Considere o campo $\mathcal{X} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dado por

$$\mathcal{X}(x,y) = (p(x-y),\ p(x+y)).$$

Prove que $\mathcal{X}$ não tem órbitas periódicas.

Sugestão: Use o Teorema de Green para campos vetoriais no plano.

5- Investigue a estabilidade da origem para os seguintes sistemas:

(a) $\begin{cases} x' = -x - \frac{1}{3}x^3 - 2\mathrm{sen}y, \\ y' = -y - \frac{1}{3}y^3, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x^n, \text{ onde } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$

6- O movimento de um pêndulo de comprimento variável obedece à equação

$$\text{(III)} \quad \theta'' + \alpha(t)\theta' + \omega^2(t)\theta = 0,$$

onde $\alpha(t)$ e $\omega(t)$ são funções contínuas. Além disso, $\omega(t)$ e $\theta(t)$ denotam, respectivamente, a freqüência das oscilações e o ângulo com respeito à posição de equilíbrio no instante t.

(a) Prove que a solução nula não é assintoticamente estável, se $\alpha(t) \leq 0$;

(b) Verifique se a solução nula é necessariamente estável na presença de amortecimento, isto é, para $\alpha(t) > 0$;

(c) Mostre que os zeros de qualquer solução não trivial de (III) são isolados.

BANCA EXAMINADORA
1. Prof. Adán Corcho
2. Prof. Hilário Alencar