



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

EXAME DE MESTRADO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Data: 19 de dezembro de 2005

Horário: 8h

Aluno: _____

1- Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \sqrt{|y|}$. Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(0) = 0.$$

- (a) Dê uma solução desta equação.
- (b) Ela é única?
- (c) Caso a resposta em (b) seja negativa, contradiz o Teorema de Picard? Justifique.

2- Para as funções abaixo esboce o retrato de fase do fluxo gradiente $x' = -\text{grad}V(x)$. Identifique os pontos de equilíbrio e classifique-os com respeito à estabilidade.

(a) $V(x, y) = x^2 + 2y^2$ (b) $V(x, y) = y \operatorname{sen} x$

3- Seja $X : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^2 definido em um aberto Δ do \mathbb{R}^n . Mostre que se o divergente de x se anula em Δ , então o fluxo $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ associado a X preserva o volume.

4- Seja $X = (X_1, X_2)$ um campo de classe C^1 no aberto Δ do \mathbb{R}^n , onde Δ é um conjunto simplesmente conexo. Mostre que se $\operatorname{div} X \neq 0$ em todos os pontos de Δ , então X não tem órbitas periódicas.

5- Prove que o sistema

$$\begin{cases} x' = 2x - x^5 - y^4x, \\ y' = y - y^3 - yx^2 \end{cases}$$

não tem órbitas periódicas.

6- Sejam X_1 e X_2 campos de classe C^1 , respectivamente, em Δ_1 e Δ_2 abertos de \mathbb{R}^n . Prove que para cada conjugação topológica

$$h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$$

vale que $h(\omega(p)) = \omega(h(p))$ para todo p em Δ_1 . Aqui $\omega(p)$ denota o ω -limite do ponto p .

BANCA EXAMINADORA

- 1. Prof. Adán Corcho
- 2. Prof. Ediel Azevêdo