



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

EXAME DE MESTRADO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Data: 19 de dezembro de 2005

Horário: 8h

Aluno: \_\_\_\_\_

1- Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = \sqrt{|y|}$ . Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(0) = 0.$$

- (a) Dê uma solução desta equação.
- (b) Ela é única?
- (c) Caso a resposta em (b) seja negativa, contradiz o Teorema de Picard? Justifique.

2- Para as funções abaixo esboce o retrato de fase do fluxo gradiente  $x' = -\text{grad}V(x)$ . Identifique os pontos de equilíbrio e classifique-os com respeito à estabilidade.

$$(a) V(x, y) = x^2 + 2y^2 \quad (b) V(x, y) = y \operatorname{sen} x$$

3- Seja  $X : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial de classe  $C^2$  definido em um aberto  $\Delta$  do  $\mathbb{R}^n$ . Mostre que se o divergente de  $x$  se anula em  $\Delta$ , então o fluxo  $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$  associado a  $X$  preserva o volume.

4- Seja  $X = (X_1, X_2)$  um campo de classe  $C^1$  no aberto  $\Delta$  do  $\mathbb{R}^n$ , onde  $\Delta$  é um conjunto simplesmente conexo. Mostre que se  $\operatorname{div} X \neq 0$  em todos os pontos de  $\Delta$ , então  $X$  não tem órbitas periódicas.

5- Prove que o sistema

$$\begin{cases} x' = 2x - x^5 - y^4x, \\ y' = y - y^3 - yx^2 \end{cases}$$

não tem órbitas periódicas.

6- Sejam  $X_1$  e  $X_2$  campos de classe  $C^1$ , respectivamente, em  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$  abertos de  $\mathbb{R}^n$ . Prove que para cada conjugação topológica

$$h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$$

vale que  $h(\omega(p)) = \omega(h(p))$  para todo  $p$  em  $\Delta_1$ . Aqui  $\omega(p)$  denota o  $\omega$ -limite do ponto  $p$ .

BANCA EXAMINADORA

- 1. Prof. Adán Corcho
- 2. Prof. Ediel Azevêdo