Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Análise Real-Iniciação Científica

Data: 18 de janeiro de 2008 Prof. Adán J. Corcho
Aluno: Prof. Marcos P. Cavalcante

1- Prove que um conjunto X é infinito se, e somente se, existe uma bijeção de X num subconjunto próprio de X.

2- Dizemos que uma seqüência $(x_n)_n$ é de *Cauchy* quando ela cumpre a seguinte condição:

Dado arbitrariamente um número real $\varepsilon > 0$, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \text{ e } m > n_0 \text{ implica } |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Mostre que toda seqüência de Cauchy é convergente e que toda seqüência convergente é de Cauchy.

3- Prove os sequintes itens por indução:
(a) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$;
(b) $1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 < \frac{n^4}{4} < 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.

4- Seja $(a_n)_n$ uma seqüência de números reais positivos. Prove que a desigualdade abaixo ocorre para infinitos valores de $n \in \mathbb{N}$.

$$1 + a_n > \frac{a_{n-1}}{2} \sqrt[n]{2}.$$

5- Suponha que $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$. Mostre que a série $\sum a_n$ converge se, e somente se, a série

$$\sum 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots$$

converge.

[Sugestão: Mostre que a seqüência das somas parciais é limitada.]