

Geometria Diferencial  
das  
Curvas Planas

Hilário Alencar      Walcy Santos



*Dedicamos este livro ao amigo e Professor  
Manfredo do Carmo por sua notável  
contribuição à Geometria Diferencial.*



# Prefácio

Neste texto, apresentamos alguns resultados de geometria e topologia das curvas planas. Os aspectos topológicos das curvas no plano, em muitas situações, possuem generalizações para dimensões maiores. A escolha de trabalhar com curvas planas se deve ao fato de que muitos resultados podem ser apresentados de forma elementar. Por elementar, queremos dizer que os pré-requisitos necessários para o entendimento deste livro se reduzem a um bom curso de Cálculo e Geometria Analítica. A noção nova que aparece é a de número de rotação de uma curva fechada no plano. Essa idéia, fundamental na demonstração de vários resultados, é muito intuitiva e não acreditamos que possa o leitor ter dificuldades no seu entendimento. Tal noção, que é característica do plano, contribuiu para a nossa opção de trabalharmos com curvas no plano.

O fato de que os conceitos envolvidos sejam *elementares* não acarreta, de forma alguma, que os resultados sejam triviais ou as demonstrações sejam simples. De fato, muitos resultados, devido à complexidade de suas provas, não são demonstrados nos cursos de graduação. Um exemplo típico é o Teorema de Jordan para curvas fechadas e simples no plano, que diz que o traço de tal curva separa o plano em dois subconjuntos, um dos quais limitado, cuja fronteira comum é o traço dessa curva. Esse resultado talvez seja o melhor exemplo de um teorema que

facilmente acreditamos no seu enunciado, mas cuja prova não é, de forma alguma, simples.

A escolha dos tópicos abordados foi baseada na tentativa de aguçarmos a intuição matemática do leitor para vários conceitos e resultados geométricos. Por exemplo, como estão entrelaçadas as noções de convexidade e curvatura; como o comportamento do vetor tangente de uma curva pode estar ligada com sua topologia. Ressaltamos, ainda, o Teorema dos Quatro Vértices, que nos dá restrições para que uma função seja a curvatura de uma curva fechada.

Começamos estudando as curvas localmente. O primeiro capítulo apresenta o comportamento de uma curva diferenciável em uma vizinhança de um ponto de seu traço. Aqui, exploramos o conceito de curvatura de uma curva plana, mostrando que ela determina a curva, a menos de sua posição no plano.

No segundo capítulo, voltamo-nos para o estudo das curvas planas e contínuas, de forma global. Introduzimos a noção de número de rotação de uma curva e obtivemos várias aplicações desse conceito, como o Teorema Fundamental da Álgebra e alguns resultados de análise complexa. Em seguida, estudamos o número de rotação da curva descrita pelo vetor unitário tangente de uma curva diferenciável. Nesse contexto, o Teorema de Rotação das Tangentes é o resultado mais importante apresentado.

No capítulo 4, demonstramos o Teorema de Jordan para curvas regulares e de classe  $\mathcal{C}^2$  e, além disso, incluímos a discussão da Desigualdade Isoperimétrica para curvas fechadas no plano, cujo resultado clássico nos dá uma estimativa da área delimitada por uma curva fechada e simples de perímetro fixado.

No capítulo 5, estudamos as curvas convexas no plano. Além das propriedades geométricas de tais curvas, introduzimos a noção de largura de uma curva e fazemos uma introdução às cur-

vas de largura constante. Finalmente, no sexto capítulo, introduzimos as condições necessárias para provarmos o Teorema dos Quatro Vértices.

Este livro teve uma primeira versão que foi a base para o mini-curso *Geometria das Curvas Planas*, apresentado na XII Escola de Geometria Diferencial, que ocorreu na Universidade Federal de Goiás em julho de 2002. Ela foi ampliada e revisada para a apresentação do mini-curso *Geometria Diferencial das Curvas Planas*, durante o 24<sup>o</sup> **Colóquio Brasileiro de Matemática**. Gostaríamos de agradecer a Comissão Organizadora deste Colóquio pela acolhida à nossa proposta, aos colegas que sugeriram mudanças e aos alunos Aliny Trajano, Claudemir Leandro e Márcio Batista que resolveram os exercícios e fizeram uma leitura crítica deste texto. Também agradecemos: Departamento de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e Instituto do Milênio: Avanço Global e Integrado da Matemática Brasileira, que nos propiciaram as condições necessárias para a redação desse texto. Finalmente, nosso reconhecimento e gratidão aos nossos familiares pelo apoio decisivo em momentos difíceis nesta trajetória.



# Sumário

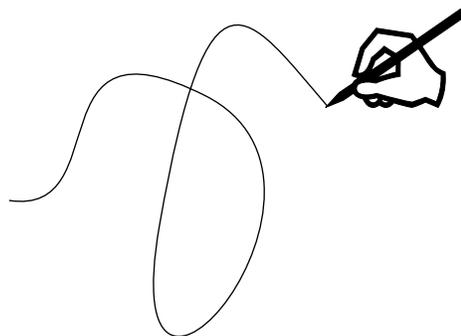
<b>1</b>	<b>Curvas Planas</b>	<b>11</b>
1.1	Curvas Suaves . . . . .	26
1.2	Vetor Tangente - Reta Tangente . . . . .	27
1.3	Reparametrização . . . . .	31
1.4	Comprimento de Arco . . . . .	32
1.5	Campo de Vetores ao Longo de Curvas . . . . .	37
1.6	Curvatura e Fórmulas de Frenet . . . . .	40
1.7	Curvas no Plano Complexo . . . . .	49
1.8	Teorema Fundamental das Curvas Planas . . . . .	55
1.9	Forma Canônica Local . . . . .	58
1.10	Evolutas e Involutas . . . . .	59
1.11	Exercícios . . . . .	66
<b>2</b>	<b>Número de Rotação de uma Curva Fechada</b>	<b>73</b>
2.1	Ângulo Orientado . . . . .	73
2.2	Número de Rotação de uma Curva Fechada . . . . .	80
2.3	Propriedades do Número de Rotação . . . . .	88
2.4	Número de Rotação de Curvas Deformáveis . . . . .	99
2.5	Cálculo do Número de Rotação - Número de In- terseções . . . . .	106
2.6	Aplicações . . . . .	117
2.7	Exercícios . . . . .	128

<b>3</b>	<b>Curvas Fechadas - Índice de Rotação</b>	<b>131</b>
3.1	Curvatura Total . . . . .	136
3.2	Índice de Rotação de Curvas Fechadas Simples . .	140
3.3	Curvatura Absoluta Total . . . . .	145
3.4	Exercícios . . . . .	151
<b>4</b>	<b>Teorema de Jordan</b>	<b>155</b>
4.1	Teorema de Jordan . . . . .	156
4.2	Desigualdade Isoperimétrica . . . . .	168
4.3	Exercícios . . . . .	173
<b>5</b>	<b>Curvas Convexas</b>	<b>175</b>
5.1	Curvas Fechadas e Convexas . . . . .	177
5.2	Teorema de Schur . . . . .	194
5.3	Curvas de Largura Constante . . . . .	199
5.4	Comprimento e Área de Curvas Convexas . . . .	210
5.5	Curvas Paralelas . . . . .	218
5.6	Exercícios . . . . .	219
<b>6</b>	<b>Teorema dos Quatro Vértices</b>	<b>223</b>
6.1	Teorema dos Quatro Vértices . . . . .	225
6.2	Exercícios . . . . .	239
	<b>Respostas dos Exercícios</b>	<b>241</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>249</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>252</b>

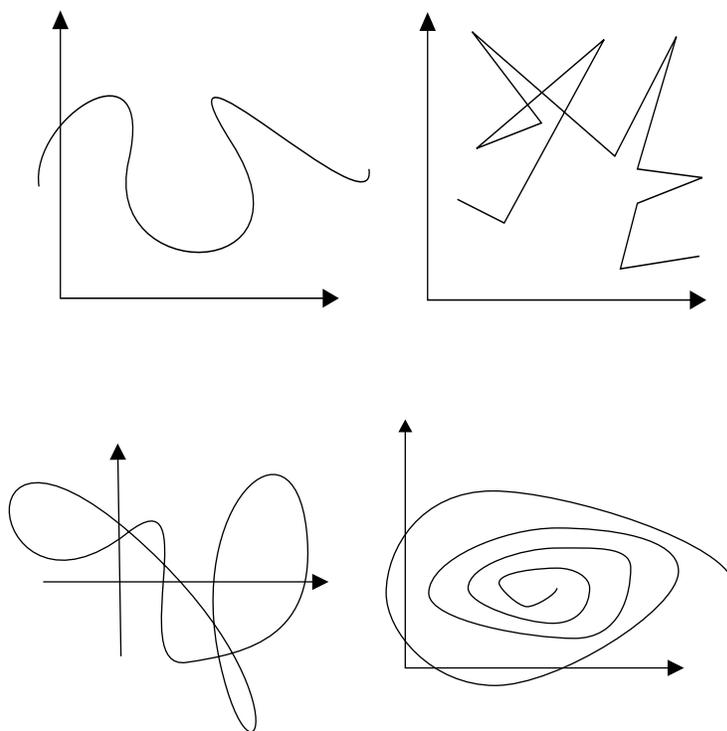
# Capítulo 1

## Curvas Planas

Intuitivamente, gostaríamos de pensar em uma curva no plano como um subconjunto que *tenha dimensão igual a 1*, por exemplo, o gráfico de funções de uma variável real ou figuras “*desenhadas*” com um único traço, sem tirar o lápis do papel. De forma um pouco mais precisa, uma curva é uma deformação contínua de um intervalo, ou ainda, a trajetória de um deslocamento de uma partícula no plano.



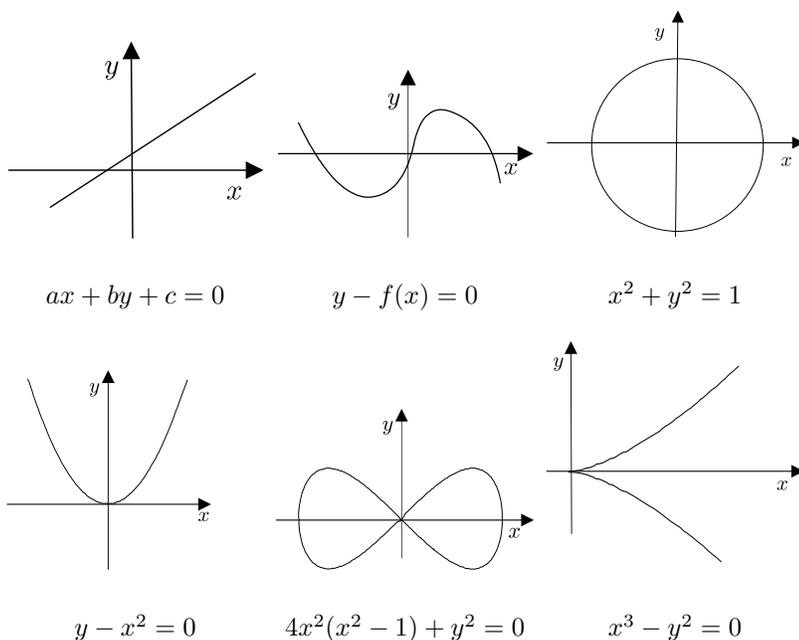
Como exemplos dos objetos que queremos definir, veja as figuras a seguir:



Tornar essas idéias mais precisas e aplicáveis pode ser um trabalho longo e difícil. Um primeiro ponto de vista, inspirado na Geometria Analítica, seria considerar uma curva em  $\mathbb{R}^2$  como o conjunto de pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , tais que satisfazem uma equação do tipo

$$F(x, y) = 0.$$

Muitos exemplos que gostaríamos de considerar como curvas estão nessa classe de subconjuntos do plano, veja as figuras a seguir:



Mesmo para funções muito bem comportadas, esse tipo de conjunto pode ficar muito longe da idéia do que consideramos uma curva. Por exemplo, para a função definida por  $F(x, y) = xy$ , a equação  $F(x, y) = 0$  descreve o conjunto formado pelos eixos coordenados, que aparentemente não se enquadra na nossa idéia original, ou seja, de uma figura “traçada” sem tirarmos o lápis do papel. Por outro lado, existem conjuntos que gostaríamos de considerar como curvas e que não podem ser descritos desse modo. Em muitas situações, considerar o caso especial em que curvas são descritas por uma equação da forma  $F(x, y) = 0$  pode ser útil. Um caso especialmente importante é quando  $F(x, y)$  é um polinômio em duas variáveis. Nesse caso, o conjunto  $F(x, y) = 0$  é chamado uma curva algébrica. O estudo desse tipo de “curva” é o ponto inicial da Geometria Algébrica,

um importante ramo da Matemática.

No contexto de Geometria Diferencial, em vez de considerarmos curvas definidas por equações, vamos retornar à idéia intuitiva que uma curva deve descrever a trajetória contínua do movimento de uma partícula sobre o plano. Se considerarmos que um ponto  $\alpha(t)$  representa a posição de uma partícula em movimento contínuo, quando o tempo  $t$  varia em um intervalo  $[a, b]$ , o conjunto que iremos considerar é  $\mathcal{C} = \{\alpha(t) \in \mathbb{R}^2, t \in [a, b]\}$ . A vantagem dessa abordagem é que ela poderá ser facilmente formalizada e conterà várias informações sobre como o ponto  $\alpha(t)$  percorre o conjunto  $\mathcal{C}$ , o sentido que o ponto “*anda*” sobre  $\mathcal{C}$ : podemos definir sua velocidade, sua aceleração, etc.. Vamos introduzir a definição formal de curva.

**Definição 1.1** *Uma curva contínua no plano  $\mathbb{R}^2$  é uma aplicação contínua  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida num intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ . A aplicação  $\alpha$ , dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , é contínua, se cada função coordenada  $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua.*

O conjunto imagem  $\mathcal{C}$  da aplicação  $\alpha$ , dado por

$$\mathcal{C} = \{\alpha(t) = (x(t), y(t)), t \in I\},$$

é chamado de *traço* de  $\alpha$ . Observe que, com a definição acima, estamos estudando todo o movimento da partícula e não apenas o conjunto  $\mathcal{C}$ . Nesse caso,  $\alpha$  é dita uma parametrização de  $\mathcal{C}$  e denominamos  $t$  o parâmetro da curva  $\alpha$ .

Se a curva  $\alpha$  está definida em um intervalo fechado  $I = [a, b]$ , os pontos  $\alpha(a)$  e  $\alpha(b)$  são chamados de ponto inicial de  $\alpha$  e ponto final de  $\alpha$ , respectivamente.

Se  $\alpha$  está definida num intervalo  $I = [a, b]$  e  $\alpha(a) = \alpha(b)$ , dizemos que  $\alpha$  é uma curva *fechada*. Uma curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita *periódica* se existe um número real  $l > 0$ , tal que

$$\alpha(t + l) = \alpha(t),$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . O menor valor  $l_0$  para o qual a equação acima se verifica é chamado de *período* de  $\alpha$ . É claro que a curva  $\alpha$  fica completamente determinada por sua restrição a um intervalo da forma  $[t_0, t_0 + l_0]$ .

Uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita *simples*, se a aplicação  $\alpha$  for injetiva. Quando temos que  $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ , com  $t_1, t_2 \in I$  e  $t_1 \neq t_2$ , dizemos que  $\alpha$  possui um ponto duplo (ou múltiplo) em  $t_1$  e  $t_2$ . Uma curva fechada  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita *fechada e simples*, se  $\alpha(t) \neq \alpha(s)$  para todo  $t \neq s \in [a, b]$  e  $\alpha(a) = \alpha(b)$ , isto é, se o único ponto duplo de  $\alpha$  ocorre nos seus pontos inicial/final. Quando  $\alpha$  é uma curva fechada e simples, ela é denominada *curva de Jordan*. Em muitas situações, quando não houver prejuízo no entendimento, iremos denominar o traço de curva de Jordan também como curva de Jordan.

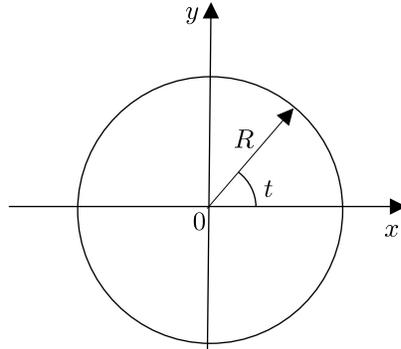
Vamos encerrar esta seção com alguns exemplos ilustrativos de como pode ser uma curva contínua no plano.

### 1. Círculos e elipses

O círculo de raio  $R$  e centro na origem  $O$ ,  $S_R(O)$ , é o conjunto de pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  cuja distância ao ponto  $(0, 0)$  é constante e igual a  $R$ , isto é,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = R.$$

O círculo  $S_R(O)$  é o traço da curva contínua  $\alpha$ , definida por  $\alpha(t) = (R \cos t, R \sin t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . O parâmetro  $t$  representa o ângulo que  $\alpha(t)$  faz com o eixo  $Ox$ . Mais geralmente, o círculo de centro  $(a, b)$  e raio  $R$ ,  $S_R((a, b))$ , é o traço da curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $\alpha(t) = (a + R \cos t, b + R \sin t)$ . Observe que, quando  $t$  percorre a reta real,  $\alpha(t)$  move-se sobre  $S_R((a, b))$  no sentido anti-horário um número infinito de vezes. Se restringimos o domínio de  $\alpha$  a um intervalo de comprimento  $2\pi$  então  $\alpha(t)$  percorrerá  $S_R((a, b))$  uma única vez. A curva  $\alpha|_{[0, 2\pi]}$  é uma curva de Jordan.



A curva  $\beta : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\beta(t) = (\cos 2t, \sin 2t),$$

é uma outra parametrização de  $S_R(O)$ . Tal curva também percorre  $S_R(O)$  no sentido anti-horário, porém com o dobro da velocidade escalar de  $\alpha$ .

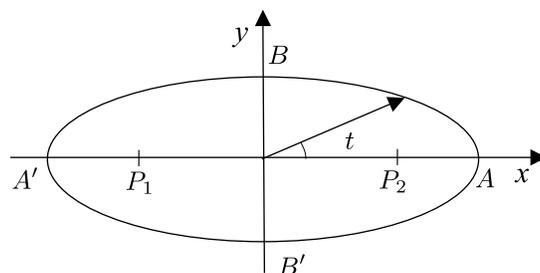
A elipse de focos  $P_1$  e  $P_2$  é o conjunto de pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  cuja soma das distâncias aos pontos  $P_1$  e  $P_2$  é uma constante. Se escolhermos o sistema de coordenadas de  $\mathbb{R}^2$  de modo que  $P_1 = (-c, 0)$  e  $P_2 = (c, 0)$ , com  $c > 0$ , então a elipse é descrita pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Seja  $(x, y) \neq (0, 0)$  e considere  $t$  o ângulo que o vetor com ponto inicial na origem e ponto final  $(x, y)$  faz com o semi-eixo  $Ox$  positivo. Agora podemos parametrizar a elipse pelo traço da curva  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t), \quad a, b > 0.$$

A elipse intersecta os eixos coordenados nos pontos  $A = (a, 0)$ ,  $A' = (-a, 0)$ ,  $B = (0, b)$  e  $B' = (0, -b)$ . Os segmentos  $AA'$  e  $BB'$  são chamados de eixos da elipse.

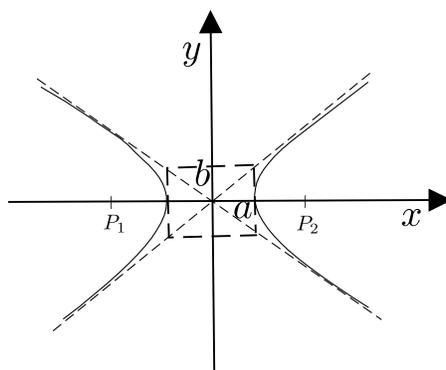


## 2. Hipérbole

A hipérbole de focos  $P_1$  e  $P_2$  é o conjunto de pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  cuja diferença das distâncias aos pontos  $P_1$  e  $P_2$  é, em valor absoluto, uma constante. Se escolhermos o sistema de coordenadas de  $\mathbb{R}^2$ , tal que  $P_1 = (-c, 0)$  e  $P_2 = (c, 0)$  com  $c > 0$ , então a hipérbole (veja figura a seguir) é descrita pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

onde  $a$  e  $b$  são números reais e positivos.



Consideremos as funções cosseno hiperbólico e seno hiperbólico dadas, respectivamente, por

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

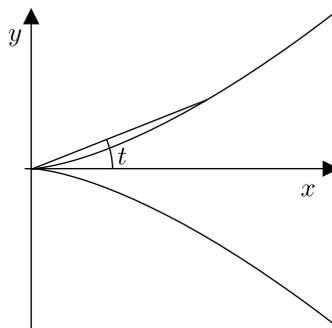
Logo, como  $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ , podemos parametrizar o ramo direito da hipérbole pelo traço da curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por

$$\alpha(t) = (a \cosh t, b \sinh t).$$

### 3. Parábola de Neill

A parábola de Neill, veja figura abaixo, é o conjunto de pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , tal que  $x^3 - y^2 = 0$ . Seja  $(x, y) \neq (0, 0)$  e considere  $t$  o ângulo que o vetor com ponto inicial na origem e ponto final  $(x, y)$  faz com o semi-eixo  $Ox$  positivo. Assim podemos parametrizar a parábola de Neill pelo traço da curva  $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por

$$\alpha(t) = (t^2, t^3).$$



### 4. Gráficos

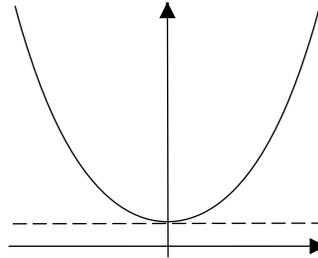
Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $\mathcal{C}^k$ . O conjunto

$$\mathcal{G} = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$$

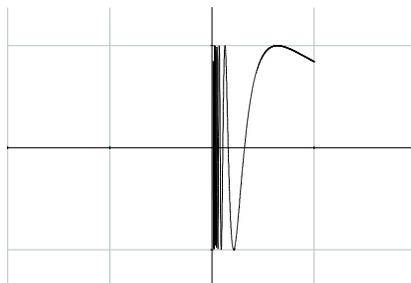
é chamado de gráfico de  $f$ . É claro que  $\mathcal{G}$  pode ser, naturalmente, parametrizado pela curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $\mathcal{C}^k$ , dada por

$$\alpha(t) = (t, f(t)).$$

Por exemplo, se consideramos a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(t) = \frac{a}{2} (e^{t/a} + e^{-t/a}) = a \cosh(t/a)$ , onde  $a$  é uma constante positiva, obtemos que o gráfico de  $f$ , ou equivalentemente, o traço de  $\alpha$  descreve uma catenária. A catenária é a curva obtida quando uma corda de peso uniforme é presa em dois pontos e é deixada sob a ação da força gravitacional. A catenária tem outros interesses geométricos, como no estudo de superfícies minimizantes de área.



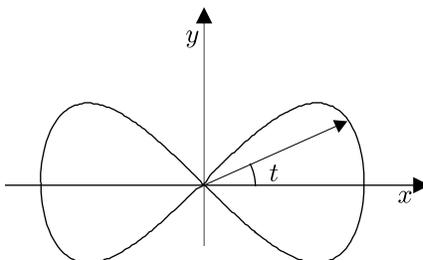
Um outro exemplo de uma curva dessa forma é obtido quando consideramos  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ . Observe que nenhum ponto do segmento  $\{(0, y); -1 \leq y \leq 1\}$  pertence ao gráfico de  $f$ , porém existem pontos do gráfico de  $f$  arbitrariamente próximos de cada ponto desse segmento.



## 5. Lemniscata

A lemniscata, veja figura abaixo, é o conjunto de pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , tal que  $y^2 = 4x^2(1 - x^2)$ . Agora consideremos  $t$  o ângulo entre um vetor de  $\mathbb{R}^2$ , com ponto final  $(x, y)$ , e o eixo  $Ox$ . Podemos, portanto, parametrizar a lemniscata pelo traço da curva  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\alpha(t) = (\text{sen } t, \text{sen } 2t).$$

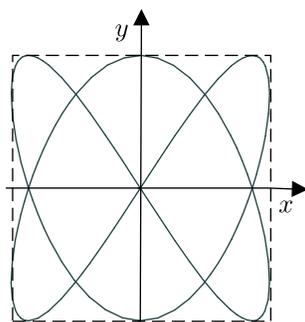


## 6. Curvas de Lissajous

Vamos descrever apenas uma classe especial dessas curvas, as quais aparecem na Mecânica, quando duas oscilações elásticas ocorrem simultaneamente em planos ortogonais, por exemplo, os pêndulos duplos. A curva de Lissajous é o traço da curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por

$$\alpha(t) = (\text{sen } at, \text{sen } bt), \quad a, b > 0, \quad a \neq b.$$

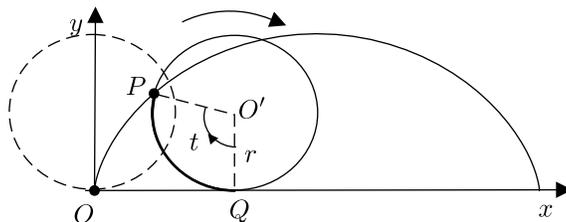
Note que a lemniscata é um caso particular da curva de Lissajous, quando  $a = 1$  e  $b = 2$ . A figura abaixo mostra um esboço do traço de  $\alpha$  no caso em que  $a = 2$  e  $b = 3$ .



Observe que o traço de  $\alpha$  está contido no quadrado  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ . A curva  $\alpha$  é periódica, se e somente se  $a/b$  é um número racional.

#### 7. Ciclóide

A cicloide é a trajetória descrita por um ponto  $P = (x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$ , localizado no círculo de raio  $r$  e centro  $O'$ , que gira ao longo do eixo  $Ox$ , sem escorregar e com aceleração escalar constante. Seja  $u$  o vetor com ponto inicial em  $O'$  e ponto final em  $P$ , e seja  $t$  o ângulo descrito pelo vetor  $u$ , supondo que  $P$  coincida com a origem  $O$ , quando  $t = 0$ , conforme a figura abaixo.



Então o arco  $\widehat{QP}$  tem o mesmo comprimento que o segmento com ponto inicial na origem  $O$  e ponto final  $Q$ , onde  $Q$  é o ponto de interseção entre o círculo e o eixo  $Ox$ . Concluimos que  $rt$  e  $r$  são abscissa e ordenada, respectivamente, de  $O'$  e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} x &= rt - r \cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = rt - r \operatorname{sen} t \\ y &= r - r \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = r - r \cos t \end{aligned} \quad (1.1)$$

são as coordenadas de  $P$ . Logo podemos descrever a cicloide, como sendo o traço da curva parametrizada  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\alpha(t) = (rt - r \operatorname{sen} t, r - r \cos t).$$

Notamos que é possível eliminar  $t$  nas equações (1.1). De fato, usando essas equações,  $\cos t = 1 - \frac{y}{r}$  e, portanto,  $t = \arccos\left(1 - \frac{y}{r}\right)$ . Assim

$$\operatorname{sen} t = \pm \sqrt{1 - \cos^2 t} = \pm \frac{\sqrt{(2r - y)y}}{r}$$

e obtemos a equação cartesiana da cicloide, dada por

$$x = r \arccos\left(1 - \frac{y}{r}\right) \mp \sqrt{(2r - y)y}.$$

## 8. Espirais

A espiral de Arquimedes, veja figura a seguir, é o conjunto de pontos  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$ , tal que

$$x \tan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right) = y, \quad a > 0.$$

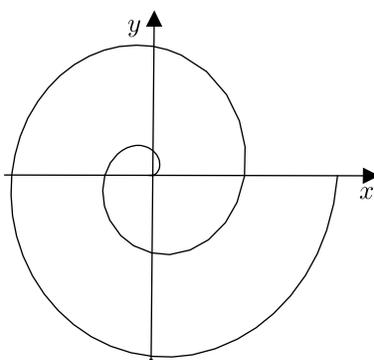
Observamos que, em coordenadas polares, sua equação é dada por

$$r = a\theta, \quad a > 0.$$

Logo podemos descrever a espiral de Arquimedes, como sendo o traço da curva  $\alpha : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por

$$\alpha(t) = (at \cos t, at \sin t).$$

Esboçamos abaixo a espiral de Arquimedes com  $a = 1$ .

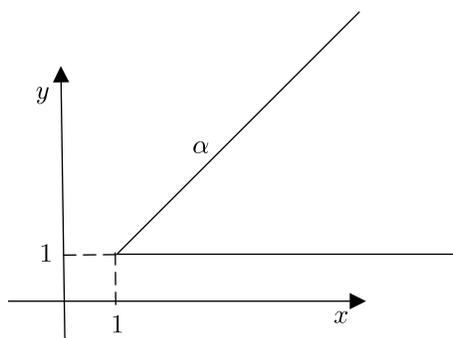


9. Considere as funções  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2}, & \text{se } t \neq 0, \\ 0, & \text{se } t = 0, \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2}, & \text{se } t > 0, \\ 0, & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

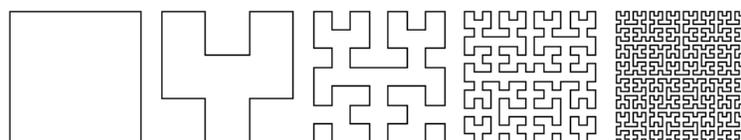
A curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por  $\alpha(t) = (x(t), y(t)) = (f(t) + 1, g(t) + 1)$ , é uma curva contínua cujo traço é a união das semi-retas  $y = x$ ,  $x \geq 1$  e  $y = 1$ ,  $x \geq 1$ .



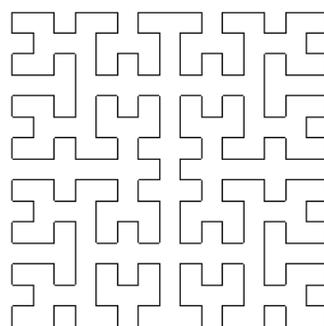
Observe que as funções  $x$  e  $y$  são diferenciáveis em  $\mathbb{R}$ , porém  $x'(0) = y'(0) = 0$ . Este exemplo mostra que o traço de uma curva pode ter “*bicos*”, mesmo quando suas coordenadas são funções diferenciáveis.

10. Curvas que preenchem o espaço - Curva de Peano e curva de Hilbert:

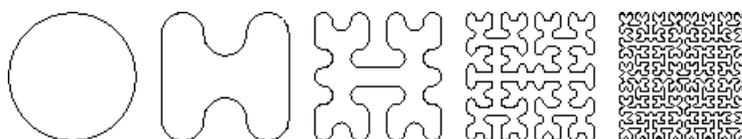
Essas curvas foram pesquisadas originalmente pelo matemático Giuseppe Peano no século XIX, e como homenagem ao pesquisador, as curvas de preenchimento do espaço são referenciadas como curvas de Peano. Outros pesquisadores, como David Hilbert, deram continuidade a pesquisa das curvas de preenchimento do espaço estendendo-as para espaços  $n$ -dimensionais. As curvas de Peano-Hilbert funcionam baseadas na partição do espaço, de forma contínua e única. Como cada partição é um subespaço similar ao original, a construção pode ser novamente aplicada a cada partição, gerando novas partições e assim sucessivamente. A curva de Hilbert é a aplicação limite desse processo, aplicado ao conjunto formado por três segmentos de reta de comprimento um, dois a dois ortogonais, formando uma figura “U”. As figuras a seguir mostram os traços das cinco primeiras etapas da construção da curva de Hilbert.



A curva limite obtida por este processo será uma curva contínua cujo traço é todo o quadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ . E. Moore obteve uma construção similar, tomando-se inicialmente um quadrado, construiu uma curva, chamada *curva de Moore*, cujo traço preenche  $[0, 1] \times [0, 1]$ , porém em cada etapa da construção, temos uma curva de Jordan. A figura a seguir mostra a quarta etapa da construção da curva de Moore.



Podemos fazer uma construção similar a essa, onde, em cada etapa, temos uma curva de Jordan diferenciável. Veja as figuras a seguir:



## 1.1 Curvas Suaves

Nesta seção, vamos estudar localmente uma curva  $\alpha$  no plano, isto é, fixado  $t_0$ , estudaremos como se comporta  $\alpha(t)$  para valores de  $t$  próximo de  $t_0$ . Para este estudo, o ideal seria que pudéssemos ter uma reta que fosse uma boa aproximação para esta curva numa vizinhança de um ponto sobre a curva. No entanto, somente com a definição de curvas contínuas, isso nem sempre é possível. Se escrevemos  $\alpha$  como

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)),$$

então  $\alpha$  é uma aplicação *suave*, se e somente se cada função coordenada  $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , isto é,  $x$  e  $y$  possuem derivadas contínuas de qualquer ordem em todo ponto de  $I$ . Assim, podemos introduzir o seguinte conceito:

**Definição 1.2** *Uma curva parametrizada suave ou um caminho no plano  $\mathbb{R}^2$  é uma aplicação suave*

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

que a cada  $t \in I$  associa  $\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$ . Quando não houver prejuízo do entendimento, iremos nos referir a tais curvas simplesmente como *curvas parametrizadas* ou *curvas suaves*.

Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 1.1** *(Curva constante)* A aplicação  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\alpha(t) = (a, b)$$

é uma curva parametrizada cujo traço se reduz ao ponto  $(a, b)$ .

**Exemplo 1.2** Considere  $P = (a_0, b_0) \neq Q = (a_1, b_1)$  pontos de  $\mathbb{R}^2$ . A aplicação  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\alpha(t) = P + t(P - Q) = (a_0 + t(a_1 - a_0), b_0 + t(b_1 - b_0)),$$

é uma curva parametrizada cujo traço é a reta que passa por  $P$  e  $Q$ .

Seja  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação definida por

$$\beta(t) = P + t^3(P - Q) = (a_0 + t^3(a_1 - a_0), b_0 + t^3(b_1 - b_0)).$$

A aplicação  $\beta$  também é uma curva parametrizada cujo traço é a reta que passa por  $P$  e  $Q$ . Observemos que  $\alpha$  e  $\beta$  possuem o mesmo traço. A diferença entre essas curvas está na velocidade que seu traço é percorrido.

**Exemplo 1.3** A aplicação  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\alpha(t) = (t, |t|),$$

não é uma curva parametrizada suave. De fato, a função  $y$ , definida por  $y(t) = |t|$ , não é diferenciável em  $t = 0$ . Porém, a restrição de  $\alpha$ , a qualquer intervalo que não contém o ponto  $t = 0$ , é uma curva parametrizada.

## 1.2 Vetor Tangente - Reta Tangente

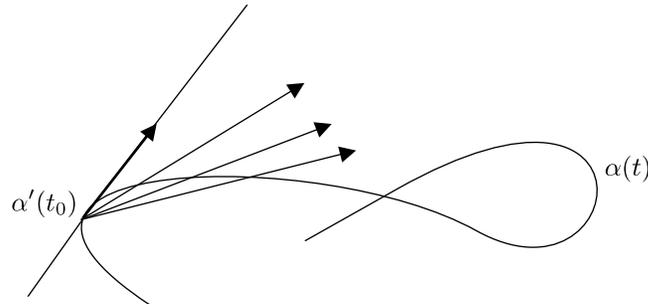
Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada, dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . O vetor tangente (ou vetor velocidade) de  $\alpha$  em  $t_0 \in I$  é dado por

$$\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)).$$

A velocidade escalar de  $\alpha$  em  $t_0 \in I$  é dada pelo módulo do vetor velocidade  $\alpha'(t_0)$ , isto é,

$$\|\alpha'(t_0)\| = \sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}.$$

Quando  $\alpha'(t_0) \neq (0, 0)$ , tal vetor aponta na direção tangente à curva  $\alpha$  em  $t_0$ .



O vetor  $\alpha'(t_0)$  aponta na direção da reta tangente à curva  $\alpha$  no ponto  $\alpha(t_0)$  e esta reta é a reta limite das retas secantes à curva  $\alpha$  passando por  $\alpha(t_0)$  e por  $\alpha(t)$ , quando fazemos  $t$  tender a  $t_0$ .

**Definição 1.3** Dizemos que uma curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é regular em  $t_0 \in I$ , se  $\alpha'(t_0) \neq (0, 0)$ , ou equivalentemente, se  $\|\alpha'(t_0)\| \neq 0$ . A curva  $\alpha$  é regular em  $I$ , se  $\alpha$  for regular para todo  $t \in I$ . Se  $\|\alpha'(t_0)\| = 0$ , dizemos que  $\alpha$  é singular em  $t_0$  e  $\alpha(t_0)$  é chamada uma singularidade de  $\alpha$ .

Como afirmamos, se  $\alpha$  for uma curva regular, o vetor  $\alpha'(t)$  aponta para a direção tangente à curva  $\alpha$  no ponto  $\alpha(t)$  e podemos, portanto, definir a reta tangente à curva  $\alpha$  em  $\alpha(t)$  por

$$r_t(u) = \alpha(t) + u\alpha'(t),$$

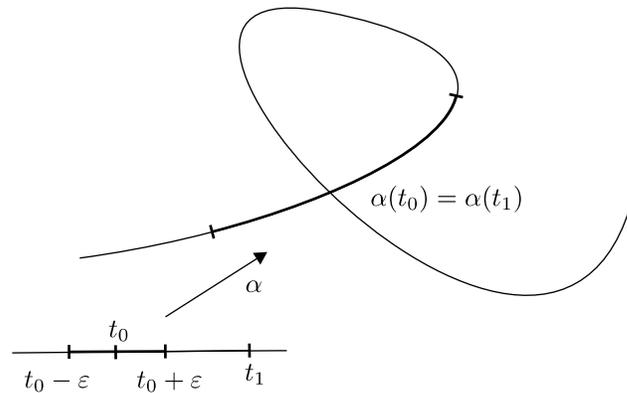
onde  $u \in \mathbb{R}$ .

Veremos mais adiante que a reta  $r_{t_0}(u)$  é a melhor aproximação linear de  $\alpha$  em  $t_0$ .

Intuitivamente, o traço de uma curva regular é suave, sem bicos, exceto por possíveis pontos de auto-interseção. Localmente, porém,  $\alpha$  não tem auto-interseção como mostra o resultado seguinte.

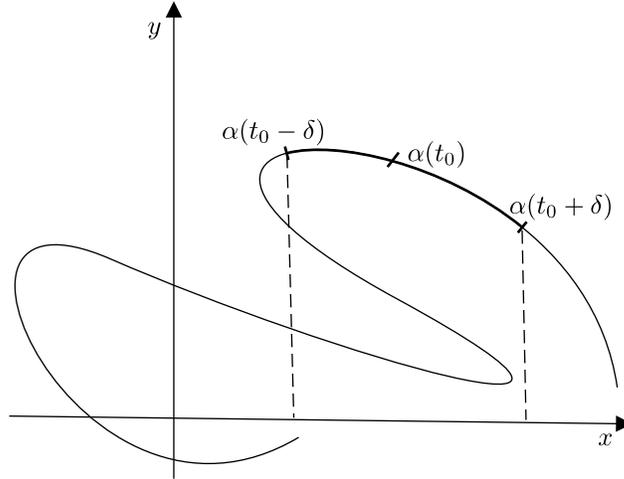
**Proposição 1.1** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada e regular em  $t_0 \in I$ . Então existe  $\varepsilon > 0$ , tal que  $\alpha$  é injetiva no intervalo  $I_0 = \{t \in I \mid |t - t_0| < \varepsilon\}$ .*

**Prova:** Como  $\alpha'(t_0) \neq (0, 0)$ , temos que  $x'(t_0) \neq 0$  ou  $y'(t_0) \neq 0$ . Vamos supor que  $x'(t_0) \neq 0$ . Logo, visto que  $x'$  é uma função contínua, existe  $\varepsilon > 0$ , tal que  $x'(t) \neq 0$ , para todo  $t \in I_0$ . Nesse caso,  $x$  é estritamente monótona e, portanto injetiva, o que implica que  $\alpha|_{I_0}$  é injetiva. A prova no caso em que  $y'(t_0) \neq 0$ , é análoga.  $\square$



Um exemplo de curva parametrizada e regular é dado por  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por  $\alpha(t) = (t, f(t))$ , onde  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável. O traço de  $\alpha$  é igual ao gráfico de  $f$ . Como  $\alpha'(t) = (1, f'(t)) \neq (0, 0)$ ,  $\forall t \in I$ ,  $\alpha$  é uma curva parametrizada e regular. Vamos provar que localmente toda curva regular é dessa forma.

**Proposição 1.2** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada e regular em  $t_0 \in I$ . Então, existe  $\delta > 0$ , tal que, restrito ao intervalo  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ , o traço de  $\alpha$  coincide com o traço de uma curva  $\beta$  da forma  $\beta(t) = (t, f(t))$  ou  $\beta(t) = (f(t), t)$ , para uma função diferenciável  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ .*



**Prova.** Seja  $\alpha$  dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . Como  $\alpha$  é regular em  $t = t_0$ , temos que

$$\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0).$$

Vamos supor que  $x'(t_0) \neq 0$ . Nesse caso, pelo teorema da função inversa, existe um intervalo  $(t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1)$ , tal que a função  $x$  é um difeomorfismo, isto é, uma função diferenciável com inversa diferenciável, sobre  $J = x((t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1))$ . Seja  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\beta(t) = \alpha(x^{-1}(t))$ . Temos portanto, que  $\beta$  é uma curva diferenciável e

$$\beta(t) = (x(x^{-1}(t)), y(x^{-1}(t))) = (t, f(t)),$$

onde  $f$ , dada por  $f(t) = y(x^{-1}(t))$ , é uma função diferenciável. A prova, no caso em que  $y'(t_0) \neq 0$ , é análoga e, nesse caso, obtemos que o traço de  $\alpha$  coincide localmente em  $\alpha(t_0)$  com o traço de uma curva da forma  $\beta(t) = (f(t), t)$ .  $\square$

### 1.3 Reparametrização

Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada, definida por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , e seja  $h : J \rightarrow I$  uma função de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Podemos então considerar uma nova curva  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por

$$\beta(t) = (\alpha \circ h)(t) = \alpha(h(t)).$$

A curva  $\beta$  é, portanto, uma curva parametrizada de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Dizemos que a curva  $\beta$  é uma *reparametrização* de  $\alpha$ . Pela regra da cadeia, temos que

$$\beta'(t) = (x'(h(t))h'(t), y'(h(t))h'(t)),$$

ou ainda,

$$\beta'(t) = (\alpha \circ h)'(t) = \alpha'(h(t))h'(t).$$

A velocidade escalar de  $\beta$  é dada por

$$\|\beta'(t)\| = \|\alpha'(h(t))\| |h'(t)|.$$

Vamos considerar apenas reparametrizações onde a função  $h$  é estritamente monótona. Nesse caso,  $h'(t) \neq 0$  e, portanto, se  $\alpha$  for uma curva regular em  $I$ , sua reparametrização  $\beta = \alpha \circ h$  também será regular em  $J$ . Se  $h$  é estritamente crescente, dizemos que a reparametrização  $\beta = \alpha \circ h$  é uma reparametrização positiva ou própria, ou que preserva a orientação de  $\alpha$ . No caso em que  $h$  é estritamente decrescente, a reparametrização é dita negativa ou que reverte a orientação de  $\alpha$ .

## 1.4 Comprimento de Arco

Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada, dada por

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)).$$

A função  $L_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$L_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \int_{t_0}^t \sqrt{(x'(\xi))^2 + (y'(\xi))^2} d\xi, \quad (1.2)$$

$t_0 \in I$ , é denominada *comprimento de arco*. Como  $\|\alpha'(t)\|$  é uma função contínua, a função  $L_\alpha$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  e, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$L'_\alpha(t) = \|\alpha'(t)\|. \quad (1.3)$$

Observe que, se  $\alpha$  for regular em  $I$ , então a função  $L_\alpha$  é de fato de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

Para  $t_1 < t_2$ ,  $t_1, t_2 \in I$ , chamamos comprimento de arco de  $\alpha$  entre os pontos  $t_1$  e  $t_2$  ao número

$$L(\alpha|_{[t_1, t_2]}) = L_\alpha(t_2) - L_\alpha(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(\xi)\| d\xi.$$

Note que a definição acima não depende da escolha do ponto  $t_0 \in I$ . De fato, se dado  $\tilde{t}_0 \in I$ , definimos

$$\tilde{L}_\alpha(t) = \int_{\tilde{t}_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi.$$

Então

$$L_\alpha(t) - \tilde{L}_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi - \int_{\tilde{t}_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|\alpha'(\xi)\| d\xi.$$

Logo concluímos que a função comprimento de arco de  $\alpha$  está determinada de forma única, a menos de uma constante.

**Definição 1.4** Dizemos que uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  está parametrizada pelo comprimento de arco, se o parâmetro  $t$  é, a menos de constante, igual a  $L_\alpha(t)$ , isto é,

$$L_\alpha(t) = t + C.$$

Observe que, se  $\|\alpha'(t)\| = 1$ , para todo  $t \in I$ , então

$$L_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \int_{t_0}^t d\xi = t - t_0,$$

e, portanto,  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco. Reciprocamente, se

$$L_\alpha(t) = t + C,$$

obtemos que

$$\|\alpha'(t)\| = L'_\alpha(t) = 1.$$

Provamos então o resultado seguinte.

**Proposição 1.3** Uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  está parametrizada pelo comprimento de arco, se e somente se

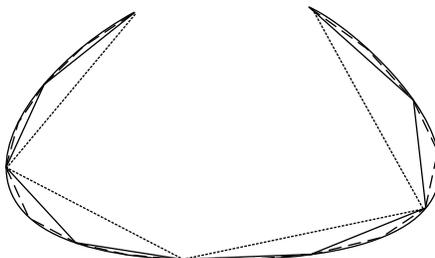
$$\|\alpha'(t)\| \equiv 1.$$

**Observação 1.1** Se  $I = [a, b]$ , então o comprimento de  $\alpha$  existe e é dado por

$$L(\alpha) = L_\alpha(b) - L_\alpha(a).$$

Dizemos que uma poligonal  $\mathcal{P} = \overline{P_0P_1} \cup \dots \cup \overline{P_{n-1}P_n}$  está inscrita em uma curva  $\alpha$  de traço  $C$  se  $\mathcal{P} \cap C = \{P_0, \dots, P_n\}$ . É possível provar, usando as idéias do Cálculo Diferencial, que  $L$  é dado por

$L(\alpha) = \sup\{L(\mathcal{P}), \text{ sendo } \mathcal{P} \text{ uma curva poligonal inscrita em } \alpha, \text{ ligando } \alpha(a) \text{ e } \alpha(b)\}.$



*O comprimento de  $\alpha$  é aproximado pelo comprimento de poligonais inscritas no traço de  $\alpha$ .*

Os dois exemplos a seguir mostram que a definição de comprimento de arco coincide com fórmulas conhecidas da Geometria Elementar.

**Exemplo 1.4** *Sejam  $A, B \in \mathbb{R}^2$ , e seja  $V_0 = B - A$ . A reta que passa por  $A$  e  $B$  pode ser parametrizada por  $\alpha(t) = A + tV_0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Para  $t_0 = 0$ , temos*

$$L_\alpha(t) = \int_0^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \int_0^t \|V_0\| d\xi = \|B - A\|t.$$

*Em particular, o segmento de reta que liga  $A$  a  $B$  tem comprimento  $L(\alpha|_{[0,1]}) = \|B - A\|$ .*

**Exemplo 1.5** *Considere o círculo de raio  $R$  parametrizado por  $\alpha(t) = (R \cos t, R \sin t)$ . Visto que  $\|\alpha'(t)\| = R$ , temos  $L_\alpha(t) = Rt$ , tomando  $t_0 = 0$ . Em particular, se consideramos  $\alpha|_{[0,2\pi]}$ , o comprimento de  $\alpha$  é  $2\pi R$ . Se damos  $k$  voltas em torno da origem, isto é, se tomamos  $\alpha|_{[0,2k\pi]}$ , temos que o comprimento de  $\alpha$  é  $2k\pi R$ .*

O próximo exemplo mostra que o fato de  $L_\alpha(t)$  sempre existir para curvas parametrizadas, a integral de (1.2) nem sempre pode ser expressa em termos de funções elementares.

**Exemplo 1.6** Considere a elipse parametrizada por

$$\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Temos

$$L_\alpha(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 \sin^2 \xi + b^2 \cos^2 \xi} \, d\xi,$$

que não pode ser expressa em termos de funções elementares.

Vejam os que o comprimento de uma curva pode ser finito, mesmo que o seu intervalo de definição tenha comprimento infinito.

**Exemplo 1.7** A espiral  $\alpha(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t)$ , definida em  $\mathbb{R}$  é tal que

$$L_\alpha(t) = \int_0^t \|\alpha'(\xi)\| \, d\xi = \sqrt{2}(1 - e^{-t}).$$

Em particular,  $L(\alpha|_{[0,+\infty)}) = \lim_{t \rightarrow \infty} L_\alpha(t) = \sqrt{2}$  e  $L(\alpha|_{(-\infty,0]})$  é infinito.

O próximo resultado nos mostra que toda curva regular admite uma reparametrização pelo comprimento de arco.

**Teorema 1.1** Toda curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco. De forma mais precisa, fixado  $t_0 \in I$ , existe uma bijeção  $h : J \rightarrow I$  de classe  $C^\infty$  definida em um intervalo  $J$  sobre  $I$ , com  $0 \in J$  e  $h(0) = t_0$ , de modo que a curva  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $\beta(s) = (\alpha \circ h)(s)$ , satisfaz  $\|\beta'(s)\| = 1$ .

**Prova.** Visto que  $\alpha$  é regular, a função comprimento de arco, por (1.3), satisfaz

$$L'_\alpha(t) = \|\alpha'(t)\| > 0.$$

Logo  $L_\alpha$  é estritamente crescente e, portanto, injetiva. Devido à continuidade de  $L_\alpha$ , temos ainda que  $L_\alpha(I)$  é um intervalo  $J$ . Concluimos então que  $L_\alpha$  possui inversa diferenciável

$$h : J \rightarrow I.$$

Como  $L_\alpha(t_0) = 0$ ,  $0 \in J$  e  $h(0) = t_0$ , vamos provar que  $\beta$  definida por  $\beta(s) = (\alpha \circ h)(s)$  está parametrizada pelo comprimento de arco. Com efeito, visto que  $h = L_\alpha^{-1}$ ,

$$h'(s) = \frac{1}{L'_\alpha(h(s))} = \frac{1}{\|\alpha'(h(s))\|}.$$

Logo

$$\beta'(s) = [\alpha \circ h(s)]' = \alpha'(h(s)) h'(s).$$

Portanto

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(h(s)) h'(s)\| = \|\alpha'(h(s))\| |h'(s)| = 1.$$

□

Vejamos agora alguns exemplos de reparametrizações de curvas pelo comprimento de arco.

**Exemplo 1.8** *Considere o círculo de raio  $R$  dado pelo traço da curva  $\alpha$  definida por  $\alpha(t) = (R \cos t, R \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Logo, se tomamos  $t_0 = 0$ ,  $L_\alpha(t) = Rt$ . Assim uma reparametrização pelo comprimento de arco de  $\alpha$  é dada por*

$$\beta(s) = \left( R \cos \left( \frac{s}{R} \right), R \sin \left( \frac{s}{R} \right) \right),$$

onde  $\beta : [0, 2\pi R] \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

**Exemplo 1.9** *Seja  $\alpha$  uma curva, dada por*

$$\alpha(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t),$$

*$t \in \mathbb{R}$ . O traço da curva  $\alpha$  descreve uma espiral, tal que*

$$L_\alpha(t) = \int_0^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \sqrt{2}(1 - e^{-t}).$$

*Em particular,*

$$L_\alpha^{-1}(s) = -\ln \left( 1 - \frac{s}{\sqrt{2}} \right).$$

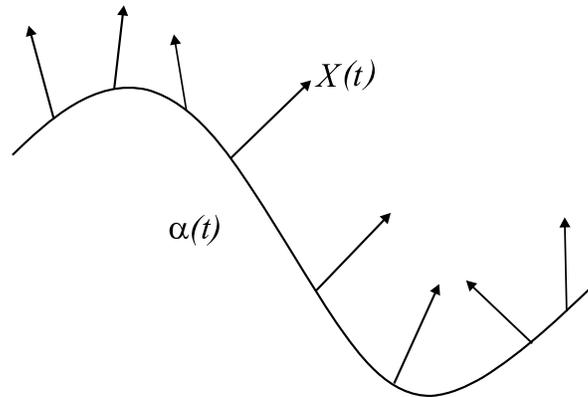
*Portanto uma reparametrização pelo comprimento de arco de  $\alpha$  é dada por*

$$\beta(s) = \left( 1 - \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \left( \cos \ln \left( 1 - \frac{s}{\sqrt{2}} \right), \sin \ln \left( 1 - \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \right),$$

*onde  $\beta : [0, \sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ .*

## 1.5 Campo de Vetores ao Longo de Curvas

Intuitivamente, um campo de vetores  $X(t)$  ao longo de uma curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma aplicação que a cada  $t \in I$  associa um vetor com origem em  $\alpha(t)$ .



*Campo de vetores  $X(t)$  ao longo de  $\alpha$ .*

Logo para determinar  $X(t)$ , basta conhecer a extremidade final do vetor  $X(t)$ , uma vez que sua extremidade inicial é  $\alpha(t)$ .

**Definição 1.5** *Um campo de vetores de classe  $\mathcal{C}^r$  ao longo de  $\alpha$  é uma aplicação  $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $\mathcal{C}^r$ . Geometricamente, o campo de vetores  $X$  é dado, em cada ponto  $\alpha(t)$ , pelo vetor de extremidades  $\alpha(t)$  e  $X(t)$ .*

Se  $\alpha$  é uma curva parametrizada e regular, dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , então  $T$ , definido por  $T(t) = (x'(t), y'(t))$ , é um campo de classe  $\mathcal{C}^\infty$  ao longo de  $\alpha$ .  $T$  é chamado *campo tangente*. No caso em que  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco,  $T$  é um campo unitário, isto é,  $\|T(t)\| = 1$ . O campo  $N$ , dado por  $N(t) = (-y'(t), x'(t))$ , é também um campo de classe  $\mathcal{C}^\infty$  ao longo de  $\alpha$ . Observe que, para todo  $t \in I$ ,

$$\langle T(t), N(t) \rangle = -x'(t)y'(t) + y'(t)x'(t) = 0,$$

isto é,  $N$  é perpendicular a  $T$ .  $N$  é chamado *campo normal*. No caso em que  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco,  $N$  é um campo unitário.

Dados dois campos  $X$  e  $Y$  de classe  $\mathcal{C}^r$  ao longo de  $\alpha$  e uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^r$ , podemos definir os campos  $X+Y$  e  $fX$  por

$$(X + Y)(t) = X(t) + Y(t), \quad (fX)(t) = f(t)X(t),$$

que também serão campos de classe  $\mathcal{C}^r$  ao longo de  $\alpha$ . Se  $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$  é um campo de classe  $\mathcal{C}^r$ , com  $r > 0$ , definimos a derivada de  $X$  por

$$X'(t) = (X'_1(t), X'_2(t)).$$

Nesse caso, o campo  $X'$  é um campo de classe  $\mathcal{C}^{r-1}$  ao longo de  $\alpha$ . As seguintes relações são facilmente verificadas:

$$\begin{aligned} (X + Y)' &= X' + Y', \\ (fX)' &= f'X + fX', \\ \langle X, Y \rangle' &= \langle X', Y \rangle + \langle X, Y' \rangle. \end{aligned}$$

Temos então o seguinte resultado:

**Proposição 1.4** *Se  $\|X\|$  é constante, então  $X'(t)$  é perpendicular a  $X(t)$ , para todo  $t \in I$ , isto é,*

$$\langle X, X' \rangle = 0. \quad (1.4)$$

*Se  $X$  e  $Y$  são perpendiculares para todo  $t \in I$ , então*

$$\langle X', Y \rangle = -\langle X, Y' \rangle. \quad (1.5)$$

**Prova.** Derivando a equação  $\langle X, X \rangle = \text{const.}$ , obtemos

$$2\langle X', X \rangle = 0,$$

o que prova a primeira parte. Para demonstrar a segunda parte, basta derivar a equação  $\langle X, Y \rangle = 0$  para obter

$$0 = \langle X, Y \rangle' = \langle X', Y \rangle + \langle X, Y' \rangle. \quad \square$$

## 1.6 Curvatura e Fórmulas de Frenet

Vamos considerar nesta seção curvas  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizadas pelo comprimento de arco. Observe que por hipótese,  $\alpha'(s) \neq 0$ . Dessa forma está bem definido um campo  $T$  de vetores tangentes e unitários ao longo de  $\alpha$  dado por

$$T(s) = \alpha'(s).$$

$T(s)$  é chamado *vetor tangente* à curva  $\alpha$  em  $\alpha(s)$ . Se  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ , então  $T(s) = (x'(s), y'(s))$ . Observe que podemos definir o campo  $N$  ao longo de  $\alpha$ , tal que, para cada  $s \in I$ ,  $\{T, N\}$  seja uma base positiva de  $\mathbb{R}^2$ , isto é, existe uma rotação que leva  $(1, 0)$  em  $T$  e  $(0, 1)$  em  $N$ . Assim sendo,

$$N(s) = (-y'(s), x'(s)),$$

e temos que  $N$  é um campo normal e unitário ao longo de  $\alpha$  e de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . A aplicação que a cada  $s$  associa  $N(s)$  é chamada de *vetor normal* à curva  $\alpha$ . Para cada  $s \in I$ ,  $N(s)$  é chamado vetor normal à curva  $\alpha$  em  $\alpha(s)$ .

**Definição 1.6** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. O referencial  $\{T(s), N(s)\}$  é chamado referencial de Frenet de  $\alpha$ .*

Visto que  $\|T\| = 1$ , temos, pela Proposição 1.4, que  $T'(s)$  é perpendicular a  $T(s)$ . Como  $T$  e  $N$  geram o espaço  $\mathbb{R}^2$ , temos que, para cada  $s \in I$ ,  $T'(s)$  é paralelo a  $N(s)$ . Isso significa que existe uma função  $k$ , tal que

$$T'(s) = k(s)N(s), \quad s \in I. \quad (1.6)$$

**Definição 1.7** *A função  $k$ , definida pela equação (1.6), é chamada curvatura de  $\alpha$  em  $s \in I$ .*

Observe que a curvatura  $k(s)$  é dada por

$$k(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle = -\langle N'(s), T(s) \rangle.$$

Portanto temos que  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , quando  $\alpha$  for de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

Geometricamente, visto que  $\|T(s)\| = 1$  e  $|k(s)| = \|T'(s)\|$ , a função curvatura é uma medida da variação da direção de  $T$  e, portanto, da variação da mudança de direção da reta tangente a  $\alpha$  em  $\alpha(s)$ .

A curvatura então é uma medida de quanto uma curva deixa de ser uma reta. De fato, o próximo resultado caracteriza as retas como as curvas cuja curvatura é identicamente nula.

**Proposição 1.5** *A curvatura de uma curva regular  $\alpha$  é identicamente zero, se e somente se o traço de  $\alpha$  está contido em uma reta.*

**Prova.** Suponha que  $k(s) \equiv 0$ . Como  $0 = |k(s)| = \|T'(s)\|$ , temos que  $T'(s) = (0, 0)$ . Como  $T$  está definida em um intervalo  $I$ , concluímos que  $T(s)$  é um vetor constante  $V_0$ . Isso implica que

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + \int_{s_0}^s T(\xi) d\xi = \alpha(s_0) + V_0(s - s_0).$$

Portanto o traço de  $\alpha$  está contido na reta que passa por  $\alpha(s_0)$  e é paralela ao vetor  $V_0$ . Reciprocamente, se o traço de  $\alpha$  está contido em uma reta e  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco, temos que

$$\alpha(s) = P_0 + sV_0, \quad \|V_0\| = 1.$$

Logo  $T(s) = V_0$  e, portanto,  $T'(s) = (0, 0)$ . Assim concluímos que  $k(s) = 0$ . □

Agora vamos estudar a variação do campo  $N$ . Como  $\|N(s)\| = 1$ , obtemos que  $N'(s)$  é perpendicular a  $N(s)$  e, portanto, paralelo a  $T(s)$ . Observe que a equação (1.6) implica que

$$\begin{aligned}x'' &= -k(s)y'(s), \\y'' &= k(s)x'(s).\end{aligned}$$

Assim

$$N'(s) = (-y''(s), x''(s)) = -k(s)(x'(s), y'(s)) = -k(s)T(s). \quad (1.7)$$

Os campos  $T$  e  $N$  satisfazem o seguinte sistema:

$$\begin{cases} T'(s) &= k(s)N(s), \\ N'(s) &= -k(s)T(s). \end{cases} \quad (1.8)$$

As equações desse sistema são denominadas *Equações de Frenet* da curva  $\alpha$ . Vamos definir a curvatura de uma curva regular não necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco. Como vimos anteriormente, toda curva regular admite uma reparametrização pelo comprimento de arco.

**Definição 1.8** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada e regular, e seja  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma reparametrização pelo comprimento de arco de  $\alpha$ . Definimos a curvatura de  $\alpha$  em  $t \in I$  pela curvatura de  $\beta$  no ponto  $s \in J$  que corresponde ao ponto  $t \in I$ .*

O próximo resultado expressará a curvatura de uma curva regular e não necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco.

**Proposição 1.6** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular, definida por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . Então a curvatura de  $\alpha$  em  $t \in I$  é dada pela expressão*

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\sqrt{((x')^2 + (y')^2)^3}}. \quad (1.9)$$

**Prova.** Consideremos  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma reparametrização positiva de  $\alpha$  pelo comprimento de arco. Então, se escrevemos  $\beta(s(t)) = \alpha(t) = (x(t), y(t))$ ,

$$(x'(t), y'(t)) = \alpha'(t) = \frac{d\beta}{ds} s'(t)$$

e

$$(x''(t), y''(t)) = \alpha''(t) = \frac{d^2\beta}{ds^2} (s'(t))^2 + \frac{d\beta}{ds} s''(t).$$

Usando a primeira equação acima e o fato de que  $s'(t) > 0$ , temos que  $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$  e, portanto,

$$s''(t) = \frac{\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|}.$$

Logo obtemos que

$$T(s(t)) = \frac{d\beta}{ds}(s(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} (x'(t), y'(t))$$

e

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds}(s(t)) &= \frac{d^2\beta}{ds^2}(s(t)) = \frac{1}{(s'(t))^2} [\alpha''(t) - s''(t)T(s(t))] \\ &= \frac{1}{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} [(x''(t), y''(t)) - s''(t)T(s(t))]. \end{aligned}$$

Por definição do campo normal,

$$N(s(t)) = \frac{1}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} (-y'(t), x'(t)).$$

A equação (1.6) nos diz que

$$k(s(t)) = \left\langle \frac{dT}{ds}(s(t)), N(s(t)) \right\rangle.$$

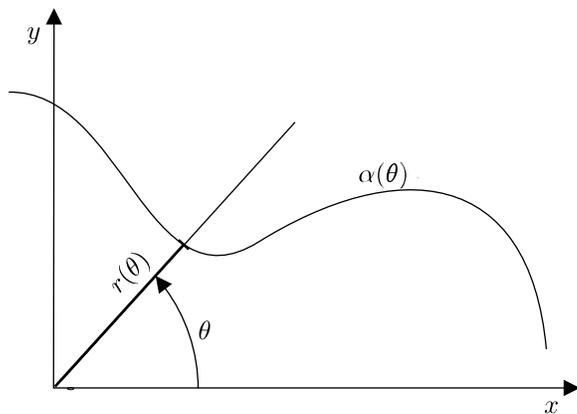
Substituindo as expressões de  $\frac{dT}{ds}$  e  $N$  na equação acima e usando o fato de que  $T$  e  $N$  são ortogonais, obtemos o resultado desejado.  $\square$

Em muitas situações, uma curva pode ter uma expressão mais simples, se ao invés de descrevê-la em relação ao sistema de coordenadas cartesianas, usarmos coordenadas polares. O próximo resultado nos dará a expressão para a curvatura em coordenadas polares.

**Proposição 1.7** *Seja  $r = r(\theta)$  uma curva regular, definida por uma equação polar. Então sua curvatura  $k(\theta)$  é dada por*

$$k(\theta) = \frac{(r(\theta))^2 + 2(r'(\theta))^2 - r(\theta)r''(\theta)}{((r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.10)$$

**Prova.** Seja  $\alpha(\theta) = r(\theta)(\cos\theta, \sin\theta) = (x(\theta), y(\theta))$  a equação paramétrica da curva dada por  $r = r(\theta)$ .



Logo

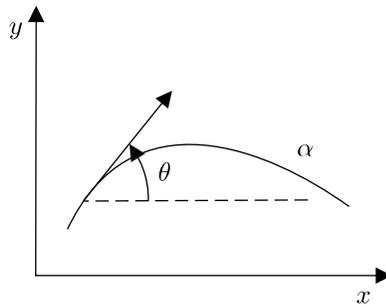
$$\alpha'(\theta) = (x', y') = r'(\cos\theta, \sin\theta) + r(-\sin\theta, \cos\theta)$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned}\alpha''(\theta) &= (x'', y'') = r''(\cos \theta, \sin \theta) + r'(-\sin \theta, \cos \theta) + \\ &\quad r'(-\sin \theta, \cos \theta) + r(-\cos \theta, -\sin \theta) = \\ &= (r'' - r)(\cos \theta, \sin \theta) + 2r'(-\sin \theta, \cos \theta).\end{aligned}$$

Portanto, substituindo os valores de  $x', y', x'', y''$  em (1.6), obtemos a expressão desejada.  $\square$

Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular, dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . Podemos definir  $\theta(t)$  como sendo o ângulo que o vetor tangente à  $\alpha$  faz com o eixo  $x$ .



Portanto, nos intervalos em que  $x'$  não se anule,

$$\theta(t) = \arctan \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Caso  $x'$  se anule, podemos considerar

$$\theta(t) = \arctan \frac{x'(t)}{y'(t)}.$$

Assim temos um resultado simples e útil, envolvendo a derivada de  $\theta$  e a curvatura de  $\alpha$ .

**Proposição 1.8** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva de classe  $\mathcal{C}^2$ , parametrizada pelo comprimento de arco e definida por  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ . Seja  $\theta(s)$  o ângulo que o vetor  $\alpha'(s)$  faz com o eixo  $x$ . Então*

$$\theta'(s) = k(s), \quad (1.11)$$

onde  $k$  é a função curvatura da curva  $\alpha$ .

**Prova.** Suponha que  $\theta(s) = \arctan \frac{y'(s)}{x'(s)}$ , isto é, em pontos com  $x'(s) \neq 0$ . É claro que

$$\begin{aligned} \theta'(s) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y'(s)}{x'(s)}\right)^2} \frac{x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)}{(x'(s))^2} \\ &= \frac{x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)}{(x'(s))^2 + (y'(s))^2} \\ &= x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s). \end{aligned}$$

Agora, usando a equação (1.9), obtemos o resultado desejado.  $\square$

## Interpretação Geométrica

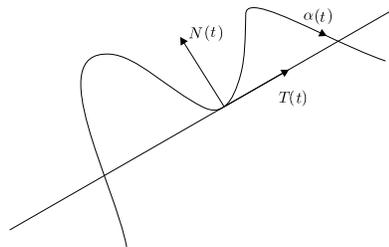
Vamos considerar uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , com curvatura  $k(s)$ , para cada  $s \in I$ .

### 1. Do sinal de $k$ :

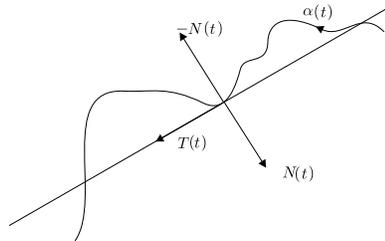
Se  $k(t_0) > 0$ , então, para todo  $t$  suficientemente próximo de  $t_0$ ,  $\alpha(t)$  está no semi-plano determinado pela reta tangente à curva  $\alpha$  em  $\alpha(t_0)$  para o qual aponta  $N(t_0)$ . De fato, basta verificar que a função

$$f(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), N(t_0) \rangle$$

é maior ou igual a zero, para  $t$  próximo de  $t_0$ . Observe que  $f'(t_0) = 0$  e, por (1.8),  $f''(t_0) = k(t_0) > 0$ . Logo  $f$  possui um mínimo relativo estrito em  $t_0$ . Como  $f(t_0) = 0$ , concluímos a prova. Observe que, de modo análogo, se  $k(t_0) < 0$ ,  $f$  possui um máximo relativo estrito em  $t_0$  e, portanto,  $\alpha(t)$  pertence ao semi-plano determinado pela reta tangente à curva  $\alpha$  em  $t_0$  para o qual aponta o vetor  $-N(t_0)$ .



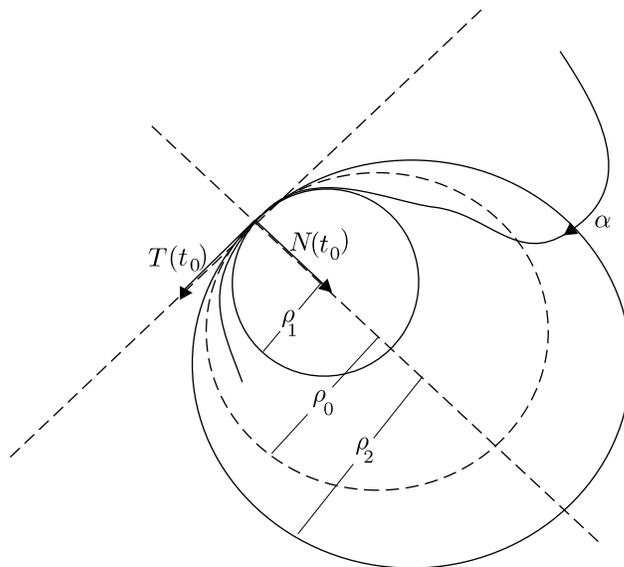
$k(t) > 0$



$k(t) < 0$

**2. Do valor de  $k$ :**

Suponha que  $k(t_0) > 0$ . Para cada  $\rho > 0$ , sejam  $P_\rho = \alpha(t_0) + \rho N(t_0)$  e  $\mathcal{C}_\rho$  o círculo de centro em  $P_\rho$  e raio  $\rho$ . Então, para  $t$  suficientemente pequeno,  $\alpha(t)$  está contido no interior de  $\mathcal{C}_\rho$ , se  $\rho < \frac{1}{k(t_0)}$  e está contido no exterior de  $\mathcal{C}_\rho$ , se  $\rho > \frac{1}{k(t_0)}$ .



$$\rho_0 = \frac{1}{k(t_0)}, \quad 0 < \rho_1 < \rho_0 < \rho_2$$

De fato, vamos considerar a função  $g$  definida por

$$g(t) = \|\alpha(t) - P_\rho\|^2 - \rho^2$$

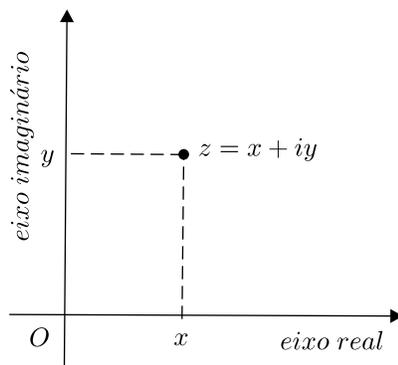
próximo de  $t_0$ . Agora usando a definição de  $g$  e as Equações de Frenet, temos que  $g(t_0) = g'(t_0) = 0$  e  $g''(t_0) = -k(t_0)\rho + 1$ . Logo, se  $\rho < \frac{1}{k(t_0)}$ , então  $g$  possui um máximo estrito em  $t_0$  e, se  $\rho > \frac{1}{k(t_0)}$ ,  $g$  possui um mínimo estrito em  $t_0$ , o que conclui a prova da afirmação. Em geral, nada se pode afirmar quando  $\rho = \frac{1}{k(t_0)}$ .

Quando  $k(t_0) > 0$ , definimos o *raio de curvatura* de  $\alpha$  em  $t_0$  por  $\rho_0 = \frac{1}{k(t_0)}$ . O ponto  $P_{\rho_0} = \alpha(t_0) + \frac{1}{k(t_0)}N(t_0)$  é chamado de *centro de curvatura* ou *ponto focal* de  $\alpha$  em  $t_0$  e o círculo

$\mathcal{C}_{\rho_0}$  é chamado *círculo osculador* de  $\alpha$  em  $t_0$ . Observe que  $\mathcal{C}_{\rho_0}$  é tangente à curva  $\alpha$  em  $\alpha(t_0)$  e tem a mesma curvatura que  $\alpha$  nesse ponto.

## 1.7 Curvas no Plano Complexo

Vimos que os pontos do plano  $\mathbb{R}^2$  podem ser representados por um par ordenado  $(x, y)$  em coordenadas cartesianas ou ainda por um par  $(r, \theta)$  em coordenadas polares. Por outro lado, o conjunto de números complexos  $\mathbb{C} = \{a + bi, a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\}$  também pode ser identificado com o plano  $\mathbb{R}^2$  através da seguinte aplicação: fixe um ponto  $O$  e uma semi-reta  $l$  com origem  $O$ . Considere o sistema cartesiano dado por: a origem é o ponto  $O$ , a semi-reta  $l$  corresponde ao eixo  $Ox$  positivo e o eixo  $Oy$  positivo é obtido por uma rotação de  $\frac{\pi}{2}$  da semi-reta  $l$ , no sentido anti-horário. A cada número complexo  $z = x + iy$  iremos associar o ponto de coordenadas  $(x, y)$ . Se  $z = x + iy$ , as partes real e imaginária de  $z$  são definidas por  $Re(z) = x$  e  $Im(z) = y$ , respectivamente. Em relação a identificação que fizemos de  $\mathbb{C}$  com  $\mathbb{R}^2$ , temos que  $Re(z)$  é a projeção de  $z$  em relação à primeira coordenada, enquanto  $Im(z)$  é a projeção de  $z$  em relação à segunda coordenada. Observe que, com essa associação, o eixo  $Ox$  corresponde aos números complexos que são reais e será denominado *eixo real*, enquanto o eixo  $Oy$  corresponde aos números complexos que são imaginários puros e será denominado *eixo imaginário*.



No conjunto de números complexos, além das operações de soma e multiplicação por escalar real, as quais correspondem as operações de soma e multiplicação por escalar de  $\mathbb{R}^2$ , estão definidas as seguintes operações:

- Multiplicação de números complexos:  
Se  $z_1 = x_1 + iy_1$  e  $z_2 = x_2 + iy_2$ , a multiplicação de  $z_1$  por  $z_2$  é dada por

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Observe que se  $z = x + iy$  e  $z_1 = i$ , então  $z_1 z = iz = -y + ix$ . Logo, se  $z$  está associado ao par ordenado  $(x, y)$ , então  $iz$  está associado ao par  $(-y, x)$ . Geometricamente, a multiplicação por  $i$  corresponde, nessa identificação, a uma rotação de  $\frac{\pi}{2}$ , no sentido anti-horário.

- Conjugação:  
Dado um número complexo  $z = x + iy$ , definimos o seu conjugado  $\bar{z}$  por

$$\bar{z} = x - iy.$$

Se  $z$  está associado ao par ordenado  $(x, y)$ , seu conjugado está associado ao par  $(x, -y)$  e, portanto, a conjugação de

números complexos corresponde geometricamente a uma reflexão em relação ao eixo  $Ox$ . É fácil ver que  $\bar{\bar{z}} = z$ .

- Módulo e argumento:

O módulo de um número complexo  $z = x + iy$  é  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Observe que o módulo do número complexo  $x + iy$  é igual ao módulo do vetor  $(x, y)$ . Se  $z \neq 0$ , o argumento de  $z$ ,  $arg(z)$ , é o ângulo que  $z$  faz com o eixo  $Ox$ , no sentido anti-horário. Note que, se  $\theta$  é o argumento de  $z$ , então podemos escrever  $z$  como

$$z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = |z| e^{i\theta},$$

onde  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$  é a aplicação exponencial complexa calculada em  $i\theta$ . Se pensamos o plano  $\mathbb{R}^2$  com coordenadas polares, a identificação de  $\mathbb{C}$  com  $\mathbb{R}^2$  é a aplicação que a cada  $z \neq 0$  associa  $(|z|, arg(z))$ . Dois números complexos não-nulos  $z$  e  $w$  são ortogonais se  $Re(z\bar{w}) = 0$  ou  $Re(w\bar{z}) = 0$ , ou, equivalentemente, se multiplicamos um deles por  $i$ , obtemos um múltiplo escalar do segundo. Uma outra observação útil é que o módulo de  $z$  satisfaz a equação

$$|z|^2 = z\bar{z}.$$

Agora vamos definir uma *curva parametrizada* cujo traço está contido em  $\mathbb{C}$ . De fato, considere  $z : I \rightarrow \mathbb{C}$  uma aplicação definida no intervalo  $I$  e tomando valores em  $\mathbb{C}$ , dada por

$$z(t) = x(t) + iy(t),$$

onde  $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$  são funções reais. O *traço* da curva  $z$  é o conjunto imagem  $z(I) \subset \mathbb{C}$ . A curva  $z$  é contínua, se as funções  $x$  e  $y$  são funções contínuas em  $I$ . Além disso, se  $x$  e  $y$  são funções

$n$ -vezes diferenciáveis em  $I$ , temos que  $z$  é  $n$ -vezes diferenciável em  $I$  e

$$z^{(k)}(t) = x^{(k)}(t) + iy^{(k)}(t).$$

O *vetor velocidade* da curva  $z$  em  $t \in I$  é  $z'(t)$ . A *velocidade escalar* é dada pelo módulo  $|z'(t)|$  de  $z'(t)$ . Em analogia com a definição de curvas no plano, dizemos que  $z$  é *regular*, se  $|z'(t)| \neq 0$ , para todo  $t \in I$ , e que  $z$  está *parametrizada pelo comprimento de arco*, se  $|z'(t)| = 1$ , para todo  $t \in I$ .

Daremos agora alguns exemplos de curvas parametrizadas em  $\mathbb{C}$ .

1. Reta

Seja  $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  uma aplicação dada por  $z(t) = z_0 + tw$ , com  $z_0, w \in \mathbb{C}$  e  $w \neq 0$ . A curva  $z$  é regular e seu traço é uma reta.

2. Círculo

Considere  $z : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  uma aplicação definida por  $z(t) = r e^{it}$ , onde  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ . A curva  $z$  é regular e seu traço é um círculo de raio  $r$  e centro na origem.

3. Espiral de Arquimedes

Seja  $z : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  uma aplicação, dada por  $z(t) = at e^{it}$ , onde  $a \in \mathbb{R}$ . A curva  $z$  é regular e seu traço é denominado espiral de Arquimedes.

Suponha que  $z : I \rightarrow \mathbb{C}$  é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Definimos os campos tangente e normal,  $T$  e  $N$ , respectivamente, por

$$T(t) = z'(t)$$

e

$$N(t) = iz'(t) = iT(t).$$

Identificando  $T$  e  $N$  com vetores de  $\mathbb{R}^2$ , temos que  $\{T, N\}$  é uma base ortonormal positiva de  $\mathbb{R}^2$ , uma vez que  $N$  é obtido por uma rotação de  $T$  por um ângulo  $\frac{\pi}{2}$ , no sentido anti-horário.

A reta tangente à curva  $z$  em  $t \in I$  é a reta que passa por  $z(t)$  e é paralela a  $z'(t)$ . Essa reta é o traço da curva  $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida por

$$w(s) = z(t) + sz'(t).$$

A reta normal à curva  $z$  em  $t \in I$  é a reta que passa por  $z(t)$  e paralela a  $iz'(t)$ . Essa reta é o traço da curva  $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , dada por

$$w(s) = z(t) + isz'(t).$$

Como  $T(t)$  é um número complexo unitário, temos que sua derivada  $T'(t)$  é ortogonal a  $T(t)$ , isto é, existe uma função real  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$T'(t) = k(t)N(t) = k(t)iT(t). \quad (1.12)$$

A função  $k$  é chamada curvatura de  $z$ . A equação acima pode ser reescrita como

$$z''(t) = ik(t)z'(t),$$

que é a Equação de Frenet de  $z$ . No caso em que  $z$  é uma curva regular, mas não está necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco, o campo tangente  $T$  é dado por  $T(t) = \frac{z'(t)}{|z'(t)|}$  e, portanto, vale um resultado, que é equivalente a Equação de Frenet de  $z$ .

**Proposição 1.9** *Seja  $z : I \rightarrow \mathbb{C}$  uma curva regular. Então*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{z'}{|z'|} \right) = ik(t)z'(t).$$

**Prova.** É uma conseqüência direta da Equação de Frenet para uma reparametrização de  $z$ , pelo comprimento de arco.  $\square$

Para obtermos uma expressão para  $k$ , em função de  $z(t)$ , vamos lembrar que, se  $r = x + iy$  e  $w = u + iv$ , então

$$r\bar{w} = xu + yv + i(yu - xv).$$

Como  $\mathbb{C}$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ , podemos definir o *produto escalar real* entre  $r$  e  $w$  por

$$\langle r, w \rangle = \operatorname{Re}(r\bar{w}).$$

É claro que  $\langle r, iw \rangle = \operatorname{Im}(r\bar{w})$  e  $\langle r, iw \rangle = -\langle ir, w \rangle$ . Podemos agora calcular a função curvatura de  $z$ .

**Proposição 1.10** *Seja  $z : I \rightarrow \mathbb{C}$  uma curva regular. Então a curvatura de  $z$  é dada por  $k(t) = -\frac{\operatorname{Im}(z'(t)\bar{z}''(t))}{|z'(t)|^3}$ .*

**Prova.** Considere  $T$  o campo tangente de  $z$ , que é dado por  $T(t) = \frac{z'(t)}{|z'(t)|}$ . Pela Proposição 1.9,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{z'(t)}{|z'(t)|} \right) = ik(t)z'(t) = k(t)|z'(t)|N(t). \quad (1.13)$$

Visto que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{z'(t)}{|z'(t)|} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{|z'(t)|} \right) z'(t) + \frac{1}{|z'(t)|} z''(t),$$

temos:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{|z'(t)|} \right) z'(t) + \frac{1}{|z'(t)|} z''(t) = k(t)|z'(t)|N(t).$$

Portanto

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{|z'(t)|} \right) |z'(t)|T(t) + \frac{1}{|z'(t)|} z''(t) = k(t)|z'(t)|N(t).$$

Fazendo o produto interno de ambos os membros da equação acima por  $N(t)$  e usando o fato que  $T(t)$  e  $N(t)$  são ortonormais, obtemos

$$k(t) = \frac{1}{|z'(t)|^2} \langle z''(t), N(t) \rangle. \quad (1.14)$$

Observe que  $N(t) = i \frac{z'(t)}{|z'(t)|}$ . Portanto a equação (1.14) implica que

$$k(t) = \frac{1}{|z'(t)|^2} \langle z''(t), i \frac{z'(t)}{|z'(t)|} \rangle = \frac{1}{|z'(t)|^3} \langle z''(t), iz'(t) \rangle.$$

Como  $\langle z''(t), iz'(t) \rangle = \text{Im}(z''(t)\overline{z'(t)}) = -\text{Im}(\overline{z''(t)}z'(t))$ , concluímos que

$$k(t) = \frac{-\text{Im}(\overline{z''(t)}z'(t))}{|z'(t)|^3},$$

o que termina a prova. □

## 1.8 Teorema Fundamental das Curvas Planas

Nosso objetivo é mostrar que, de certa forma, a função curvatura determina a curva. Esse fato é demonstrado pelo seguinte resultado:

**Teorema 1.2** *Seja  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Então, dados  $s_0 \in I$ ,  $P = (P_1, P_2) \in \mathbb{R}^2$  e  $V_0 = (V_1, V_2) \in \mathbb{R}^2$ , com*

$\|V_0\| = 1$ , existe uma única curva parametrizada pelo comprimento de arco  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que a curvatura em cada ponto  $\alpha(s)$  é dada por  $k(s)$ ,  $\alpha(s_0) = P$  e  $\alpha'(s_0) = V_0$ .

**Prova.** Suponha que  $\alpha$ , definida por  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ , seja uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e possua curvatura  $k$ . As Equações de Frenet, veja (1.8), implicam que as funções  $x$  e  $y$  satisfazem

$$\begin{cases} x''(s) = -k(s)y'(s), \\ y''(s) = k(s)x'(s), \end{cases}$$

com condições iniciais dadas por  $x(t_0) = P_1$ ,  $y(t_0) = P_2$ ,  $x'(t_0) = V_1$  e  $y'(t_0) = V_2$ . O sistema acima tem uma integral primeira, dada por

$$\begin{cases} x'(s) = \cos \left( \int_{s_0}^s k(\xi) d\xi + a \right), \\ y'(s) = \text{sen} \left( \int_{s_0}^s k(\xi) d\xi + a \right), \end{cases} \quad (1.15)$$

onde  $a$  é determinado pelas relações  $\cos a = V_1$  e  $\text{sen} a = V_2$ . Integrando as equações do sistema acima, obtemos

$$\begin{cases} x(s) = P_1 + \int_{s_0}^s \cos \left( \int_{s_0}^{\tau} k(\xi) d\xi + a \right) d\tau, \\ y(s) = P_2 + \int_{s_0}^s \text{sen} \left( \int_{s_0}^{\tau} k(\xi) d\xi + a \right) d\tau. \end{cases}$$

É fácil verificar que a curva dada por  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  satisfaz às condições do teorema.

Vamos provar agora a unicidade de tal curva. Suponhamos que existam duas curvas, definidas por  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  e  $\beta(s) = (u(s), v(s))$  nas condições do teorema. As Equações de

Frenet para  $\alpha$  e  $\beta$  implicam que as funções  $f(s) = x'(s) - u'(s)$  e  $g(s) = y'(s) - v'(s)$  satisfazem o sistema

$$\begin{cases} f'(s) &= -k(s)g(s), \\ g'(s) &= k(s)f(s). \end{cases}$$

Isto implica então que

$$\frac{1}{2}(f^2 + g^2)'(s) = f(s)f'(s) + g(s)g'(s) = 0.$$

Logo  $(f^2 + g^2)$  é uma função constante e como é nula em  $s = s_0$ , temos que  $(f^2 + g^2)(s) \equiv 0$  e, portanto,  $f(s) = g(s) = 0$ . Assim concluímos que

$$\alpha'(s) = \beta'(s), \quad \forall s \in I.$$

Agora, usando o fato de que  $\alpha(s_0) = \beta(s_0) = P_0$ , obtemos que  $\alpha(s) \equiv \beta(s)$ , o que conclui a prova do teorema.  $\square$

Esse resultado tem, como conseqüência, que a curvatura determina uma curva, a menos de sua posição no plano.

**Corolário 1.1** *Duas curvas  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizadas pelo comprimento de arco com a mesma função de curvatura  $k : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  são congruentes, isto é, existem uma rotação  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e uma translação por um vetor  $b \in \mathbb{R}^2$ , tal que, para todo  $s \in I$ ,*

$$\beta(s) = (A \circ \alpha)(s) + b.$$

**Prova.** Fixe  $s_0 \in I$ . Seja  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a rotação que leva  $\alpha'(s_0)$  em  $\beta'(s_0)$ , e seja  $b = \beta(s_0) - \alpha(s_0)$ . Temos que a curva  $\gamma$ , dada por  $\gamma(s) = A \circ \alpha(s) + b$ , é tal que  $\gamma(s_0) = \beta(s_0)$ ,  $\gamma'(s_0) = \beta'(s_0)$  e a curvatura em cada ponto  $\gamma(s)$  é  $k(s)$ . Pelo Teorema Fundamental das Curvas Planas,  $\gamma(s) \equiv \beta(s)$ , o que conclui a prova.  $\square$

## 1.9 Forma Canônica Local

Iremos ver a seguir que a curvatura é uma medida de quanto a curva difere da reta tangente para pontos próximos do ponto estudado. Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Considerando a aproximação pelo polinômio de Taylor de cada coordenada de  $\alpha$ , temos que

$$\left\{ \begin{array}{l} x(s) = x(s_0) + (s - s_0)x'(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2!}x''(s_0) \\ \quad + \frac{(s - s_0)^3}{3!}x'''(s_0) + r_1(s), \\ y(s) = y(s_0) + (s - s_0)y'(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2!}y''(s_0) \\ \quad + \frac{(s - s_0)^3}{3!}y'''(s_0) + r_2(s). \end{array} \right. \quad (1.16)$$

Pelas Equações de Frenet, obtemos que

$$\begin{aligned} (x'''(s_0), y'''(s_0)) &= \alpha'''(s_0) = (k(s)N(s))'|_{s=s_0} \\ &= k'(s_0)N(s_0) + k(s_0)N'(s_0) = k'(s_0)N(s_0) - k^2(s_0)T(s_0). \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \alpha(s_0) + (s - s_0)T(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2!}k(s_0)N(s_0) \\ &\quad + \frac{(s - s_0)^3}{3!}[k'(s_0)N(s_0) - k^2(s_0)T(s_0)] + R(s), \end{aligned} \quad (1.17)$$

onde  $\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\|R(s)\|}{(s - s_0)^3} = 0$ . A equação (1.17) mostra que  $k(s_0)$  determina o quanto  $\alpha(s)$  difere da reta tangente à curva  $\alpha$  em  $s_0$ , para pontos próximos de  $\alpha(s_0)$ . De fato,  $\alpha(s)$  difere da reta tangente pelo fator

$$\frac{(s - s_0)^2}{2!}k(s_0)N(s_0) + \frac{(s - s_0)^3}{3!}[k'(s_0)N(s_0) - k^2(s_0)T(s_0)] + R,$$

para pontos próximos de  $s_0$ .

Podemos escolher um sistema de coordenadas de  $\mathbb{R}^2$  de modo que  $\alpha(s_0) = (0, 0)$  e a base canônica seja  $\{T(s_0), N(s_0)\}$ , isto é,  $T(s_0) = (1, 0)$  e  $N(s_0) = (0, 1)$ . Se em relação a este referencial, a curva  $\alpha$  é dada por  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ , a equação (1.17) nos diz que

$$\begin{cases} x(s) = (s - s_0) - k^2(s_0) \frac{(s - s_0)^3}{3!} + R_1(s) \\ y(s) = k(s_0) \frac{(s - s_0)^2}{2!} + k'(s_0) \frac{(s - s_0)^3}{3!} + R_2(s). \end{cases} \quad (1.18)$$

A representação (1.18) é chamada *forma canônica local* de  $\alpha$  e descreve o comportamento de qualquer curva regular na vizinhança de um ponto  $\alpha(s_0)$ . Em particular, ela nos diz que, se  $k(s_0) \neq 0$ , o traço de  $\alpha$  fica de um lado da reta tangente à  $\alpha$  em  $s_0$ .

## 1.10 Evolutas e Involutas

Vamos considerar curvas regulares  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizadas pelo comprimento de arco, tais que sua curvatura  $k$  não se anule em  $I$ . Nesse caso, para cada  $t \in I$ , está bem definido o centro de curvatura de  $\alpha$  em  $t$ , dado por

$$\alpha_e(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)}N(t),$$

onde  $N$  é o campo normal e unitário de  $\alpha$ . A aplicação que a cada  $t \in I$  associa  $\alpha_e(t)$  define uma curva diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ , e é chamada *evoluta* da curva  $\alpha$ . Vamos estudar a regularidade

de  $\alpha_e$ . Usando as equações de Frenet, obtemos

$$\alpha'_e(t) = \alpha'(t) + \frac{1}{k(t)}N'(t) - \frac{k'(t)}{k^2(t)}N(t) = -\frac{k'(t)}{k^2(t)}N(t). \quad (1.19)$$

Temos, portanto, que  $\alpha_e$  é regular, se e somente se

$$k'(t) \neq 0.$$

Os pontos singulares da evoluta de uma curva  $\alpha$  são aqueles para os quais a curvatura de  $\alpha$  possui um ponto crítico. Antes de vermos alguns exemplos de evolutas, observamos que, se  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva regular, com  $k(t) \neq 0$ , a expressão da evoluta  $\beta_e$  de  $\beta$  é dada por

$$\beta_e(t) = \beta(t) + \frac{1}{k(t)}N(t) = \beta(t) + \frac{\|\beta'(t)\|^2}{\langle \beta''(t), N(t) \rangle}N(t). \quad (1.20)$$

Notemos que  $\beta$  não está necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco.

**Exemplo 1.10** *Se o traço de uma curva  $\alpha$  descreve um círculo de raio  $R$  e centro  $P_0$ , sua evoluta é a curva constante dada por  $\alpha_e(t) = P_0$ . De fato, parametrizando a curva  $\alpha$  por*

$$\alpha(s) = P_0 + \left(R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R}\right), \quad s \in [0, 2\pi R],$$

*temos que  $k(s) = 1/R$  e, portanto,*

$$\alpha_e(s) = \alpha(s) + R\left(-\cos \frac{s}{R}, -\sin \frac{s}{R}\right) = P_0.$$

**Exemplo 1.11** *Considere a elipse dada pelo traço da curva  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por*

$$\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t).$$

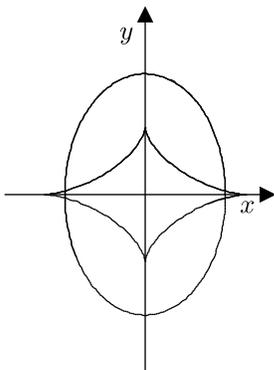
A curvatura de  $\alpha$  é dada por

$$k(t) = \frac{ab}{(a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \operatorname{cos}^2 t)^{3/2}} \neq 0.$$

A evoluta de  $\alpha$ , pela equação (1.20), é dada por

$$\begin{aligned} \alpha_e(t) &= (a \operatorname{cos} t, b \operatorname{sen} t) + \frac{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \operatorname{cos}^2 t}{ab} (-b \operatorname{cos} t, -a \operatorname{sen} t) \\ &= \left( \frac{a^2 - b^2}{a} \operatorname{cos}^3 t, \frac{b^2 - a^2}{b} \operatorname{sen}^3 t \right). \end{aligned}$$

O traço da evoluta da elipse é descrito pelo astróide  $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$ , que não é regular nos pontos  $\alpha_e(t)$ , com  $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$  e  $\frac{3\pi}{2}$ .



Elipse e sua evoluta.

**Exemplo 1.12** Considere a cicloide dada pelo traço da curva  $\alpha$ , definida por  $\alpha(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \operatorname{cos} t)$ ,  $t \in (0, 2\pi)$ . Sua curvatura é dada por

$$k(t) = \frac{\operatorname{cos} t - 1}{(2 - 2 \operatorname{cos} t)^{3/2}} \neq 0.$$

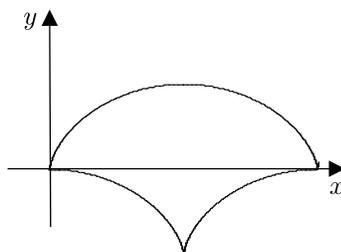
A evoluta de  $\alpha$  é a curva definida por

$$\begin{aligned}\alpha_e(t) &= (t - \operatorname{sen} t, 1 - \operatorname{cos} t) + \frac{2 - 2 \operatorname{cos} t}{\operatorname{cos} t - 1}(-\operatorname{sen} t, 1 - \operatorname{cos} t) \\ &= (t + \operatorname{sen} t, \operatorname{cos} t - 1).\end{aligned}$$

Observe que

$$\alpha(t + \pi) = \alpha_e(t) + (\pi, 2).$$

Logo, a menos de uma translação, a evoluta de  $\alpha$  é a própria cicloide.



Evoluta da cicloide

Note que  $\alpha_e$  deixa de ser regular em  $t = \pi$ .

A equação (1.19) mostra que o vetor  $N(t)$  é paralelo ao vetor  $\alpha'_e(t)$  e, portanto, a reta normal à curva  $\alpha$  em  $\alpha(t)$  coincide com a reta tangente à  $\alpha_e$  em  $\alpha_e(t)$ . Um outro modo de interpretar esse fato é dizer que a evoluta de uma curva tem a propriedade de, em cada instante, ser tangente às retas normais da curva. Nesse caso, dizemos que a evoluta de uma curva é a envoltória da família de retas normais dessa curva.

Em geral, a evoluta de uma curva parametrizada pelo comprimento de arco não está parametrizada pelo comprimento de arco. Considere  $J \subset I$  um intervalo no qual  $\alpha_e$  seja regular. O comprimento de arco de  $\alpha_e$ , a partir de  $t_0 \in J$ , é dado por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'_e(\varepsilon)\| d\varepsilon = \int_{t_0}^t \left| \left( \frac{1}{k(\varepsilon)} \right)' \right| d\varepsilon = \left| \frac{1}{k(t)} - \frac{1}{k(t_0)} \right|,$$

onde usamos que  $k$  e  $k'$  não trocam de sinal em  $J$ . Da definição da evoluta  $\alpha_e$  de uma curva  $\alpha$ , temos que

$$\alpha(t) = \alpha_e(t) - \frac{1}{k(t)}N(t).$$

A equação (1.19) nos diz que o campo tangente unitário de  $\alpha_e$  é igual a  $-N$ , se  $k'(t) > 0$ . Podemos, portanto, recuperar a curva

$\alpha$ , a partir de  $\alpha_e$ , pela equação

$$\alpha(t) = \alpha_e(t) + \frac{1}{k(t)} \frac{\alpha'_e(t)}{\|\alpha'_e(t)\|}.$$

Vamos introduzir agora uma noção dual à de evoluta de uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Seja  $t_0 \in I$  fixado, e seja  $\mathcal{L} : I \rightarrow \mathbb{R}$  o comprimento de arco de  $\alpha$  a partir de  $t_0$ ,

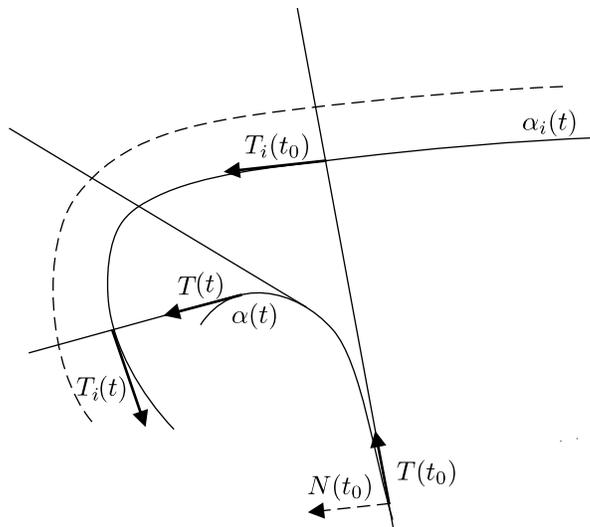
$$\mathcal{L}(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\varepsilon)\| d\varepsilon.$$

**Definição 1.9** Uma involuta da curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a curva  $\alpha_i : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\alpha_i(t) = \alpha(t) + (C - \mathcal{L}(t))T(t),$$

sendo  $T$  o campo tangente de  $\alpha$ , e  $C$  é uma constante real positiva.

Observe que, para valores diferentes de  $C$ , obtemos involutas diferentes de  $\alpha$ , porém todas são equidistantes, conforme mostra a figura a seguir.



Agora estudaremos a regularidade da involuta de uma curva regular. Calculando o vetor  $\alpha'_i(t)$ , obtemos

$$\begin{aligned}\alpha'_i(t) &= \alpha'(t) - \mathcal{L}'(t)T(t) + (C - \mathcal{L}(t))T'(t) \\ &= \alpha'(t) - \|\alpha'(t)\|T(t) + (C - \mathcal{L}(t))k(t)\|\alpha'(t)\|N(t) \quad (1.21) \\ &= (C - \mathcal{L}(t))k(t)\|\alpha'(t)\|N(t),\end{aligned}$$

onde  $k$  é a curvatura de  $\alpha$ . Portanto, se  $C \neq \mathcal{L}(t)$  e  $k(t) \neq 0$ , então  $\alpha_i$  é regular em  $t$ . Vamos supor que  $C > \mathcal{L}(t)$ ,  $\forall t \in I$  e nos restringir aos subintervalos  $J$  de  $I$  nos quais  $k(t) \neq 0$ . Se  $k(t) > 0$  em  $J$ , temos que os campos tangente  $T_i$  e normal  $N_i$  da involuta  $\alpha_i$  se relacionam com os campos correspondentes da curva  $\alpha$  por

$$T_i(t) = N(t) \quad N_i(t) = -T(t),$$

enquanto nos intervalos onde  $k(s) < 0$ , temos

$$T_i(t) = -N(t) \quad N_i(t) = T(t).$$

Dessas equações, temos que as retas normais da involuta  $\alpha_i$  são as retas tangentes à  $\alpha$ , e as retas tangentes de  $\alpha_i$  são paralelas às retas normais de  $\alpha$  nos pontos correspondentes.

O cálculo da curvatura  $k_i$  de  $\alpha_i$  nos dá que

$$k_i(t) = \frac{\langle T'_i(t), N_i(t) \rangle}{\|\alpha'_i(t)\|} = -\frac{\langle T'(t), N(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|} = -\frac{k(t)\|\alpha'(t)\|}{\|\alpha'_i(t)\|}$$

Pela equação (1.21), se  $k(t) > 0$ ,

$$k_i(t) = \frac{1}{C - \mathcal{L}(t)},$$

e, se  $k(t) < 0$ ,

$$k_i(t) = -\frac{1}{C - \mathcal{L}(t)}.$$

O próximo resultado nos dará a evoluta de  $\alpha_i$ .

**Proposição 1.11** *A curva  $\alpha$  é a evoluta de qualquer uma de suas involutas, isto é,*

$$(\alpha_i)_e(t) = \alpha(t).$$

**Prova.** Temos, por definição da evoluta de  $\alpha_i$ , que

$$\begin{aligned} (\alpha_i)_e(t) &= \alpha_i(t) + \frac{1}{k_i(t)} N_i(t) \\ &= \alpha(t) + (C - \mathcal{L}(t))T(t) - (C - \mathcal{L}(t))T(t) \\ &= \alpha(t). \end{aligned}$$

□

## 1.11 Exercícios

1. Calcule as curvaturas das curvas, dadas por:

- (a)  $z(t) = a \cos t e^{it}$ ;
- (b)  $z(t) = at e^{it}$ ;
- (c)  $z(t) = e^{(b+i)t}$ ;
- (d)  $z(t) = z_0 + tw$ ,  $z_0, w \in \mathbb{C}$ ,  $w \neq 0$ ;
- (e)  $z(t) = a(1 + \cos t) e^{it}$ .

2. Considere uma curva cujo traço é o gráfico de uma função definida por  $y = f(x)$ , onde  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função duas vezes diferenciável. Mostre que a curvatura dessa curva é dada por

$$k(x) = \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

3. Determine a curvatura do gráfico da função  $f$ , definida por  $f(x) = \log x$ ,  $x \in (0, \infty)$ .

4. Mostre que a curvatura do gráfico da função  $f$ , dada por  $f(x) = a \cosh \frac{x}{a}$ ,  $a \neq 0$  (catenária), é  $\frac{a}{(f(x))^2}$ .
5. Determine a curvatura do gráfico da função  $f$ , definida por  $f(x) = \sin ax^2$  no ponto  $(0, 0)$ .
6. Seja  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva, dada por

$$\alpha(t) = ((1 - 2 \sin t) \cos t, (1 - \sin t) \sin t).$$

- (a) Mostre que  $\alpha$  é uma curva regular, de classe  $\mathcal{C}^\infty$  e fechada;
  - (b) A curva  $\alpha$  é simples?
  - (c) Esboce o traço de  $\alpha$ .
7. Seja  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva, definida por

$$\alpha(t) = ((1 + \cos t) \cos t, (1 + \cos t) \sin t).$$

- (a) Determine as singularidades de  $\alpha$ ;
  - (b) A curva  $\alpha$  é fechada?
  - (c) Calcule a curvatura de  $\alpha$ ;
  - (d) Mostre que o traço de  $\alpha$  pode ser descrito pela equação  $z(t) = (1 + \cos t) e^{it}$ ;
  - (e) Esboce o traço de  $\alpha$ , o qual é denominado de cardióide.
8. A hipociclóide é a trajetória descrita pelo movimento de um ponto fixo  $P$  pertencente ao círculo de raio  $r$ , que gira no interior de um círculo fixo de raio  $R > r$ . Se  $R = 4r$ , então a hipociclóide recebe o nome particular de astróide.

- (a) Demonstre que a curva  $\alpha$ , dada por  $\alpha(t) = ((R - r) \cos t + r \cos \frac{(R-r)}{r}t, (R-r) \sin t - r \sin \frac{(R-r)}{r}t)$ , é uma parametrização da hipociclóide;
- (b) Esboce o traço de  $\alpha$  com  $R = 5$  e  $r = 2$ ;
- (c) Esboce o traço de  $\alpha$  com  $R = 4$  e  $r = 1$ .
9. A epiciclóide é a trajetória descrita pelo movimento de um ponto fixo  $P$ , pertencente a um círculo de raio  $r$ , que gira sobre a parte externa de um círculo de raio  $R > r$ . Se  $R = r$ , então a epiciclóide recebe o nome particular de cardióide.
- (a) Mostre que a curva  $\alpha$ , definida por  $\alpha(t) = ((R + r) \cos t - r \cos \frac{(R+r)}{r}t, (R+r) \sin t - r \sin \frac{(R+r)}{r}t)$ , é uma parametrização da epiciclóide;
- (b) Esboce o traço de  $\alpha$  com  $R = 3$  e  $r = 1$ ;
- (c) Esboce o traço de  $\alpha$  com  $R = r = 1$ .
10. O conjunto dos pontos de  $\mathbb{R}^2$  que satisfazem as equações polares  $r = a \sin(n\theta)$  ou  $r = a \cos(n\theta)$ ,  $n \geq 2$ , é chamado de rosácea de  $n$  pétalas, para  $n$  ímpar e rosácea de  $2n$  pétalas para  $n$  par.

- (a) Mostre que as curvas  $\alpha$  e  $\beta$ , dadas por

$$\alpha(\theta) = (a \sin(n\theta) \cos \theta, a \sin(n\theta) \sin \theta)$$

e

$$\beta(\theta) = (a \cos(n\theta) \cos \theta, a \cos(n\theta) \sin \theta),$$

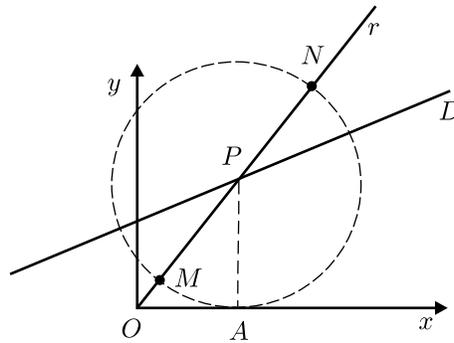
são parametrizações da rosácea;

- (b) Esboce o traço de  $\alpha$  com  $n = 3$ ;
- (c) Esboce o traço de  $\beta$  com  $n = 4$ .

11. Seja  $D$  uma reta fixada em  $\mathbb{R}^2$ . Para cada raio vetor  $r$  partindo da origem de um sistema de coordenadas  $Oxy$  e que intersecta  $D$ , sejam  $M$  e  $N$  pontos sobre  $r$  tais que

$$d(M, P) = d(N, P) = d(P, A),$$

onde  $P = D \cap r$  e  $A$  é o pé da perpendicular ao eixo  $Ox$  passando por  $P$ . Denominamos de estrofóide ou logocíclica ao conjunto de pontos  $M$  e  $N$  definidos como acima, quando variamos o raio vetor  $r$ .



- (a) Determine uma curva parametrizada  $\alpha$ , tal que o traço de  $\alpha$  descreve o estrofóide;
- (b) Esboce o traço da curva.
12. O círculo osculador de uma curva  $\alpha$  no ponto  $p \in \alpha$  é o círculo  $\mathbb{S}^1$  que é tangente à curva  $\alpha$  em  $p$  e tem raio  $\frac{1}{k(p)}$ . Mostre que, se  $k'(p) \neq 0$ , então o círculo osculador em  $p$  intersecta a curva  $\alpha$ .
13. Seja  $\alpha$  uma curva definida por  $\alpha(t) = (3 \operatorname{sen} t - 2 \operatorname{sen}^3 t, 3 \operatorname{cos} t - 2 \operatorname{cos}^3 t)$ . Mostre que a evoluta de  $\alpha$  é dada pela equação  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3}}$ .

14. Determine a evoluta da curva, definida por  $\alpha(t) = (t^2, t^3)$ .
15. A curva  $x^3 + xy^2 = y^2$  pode ser parametrizada por  $\alpha(t) = \left( \frac{t^2}{1+t^2}, \frac{t^3}{1+t^2} \right)$ . Mostre que a equação de sua evoluta é  $512x + 288y^2 + 27y^4 = 0$ .
16. Determine a curvatura da curva, definida por

$$\alpha(t) = \left( \int_0^t \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du, \int_0^t \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du \right).$$

Esboce o traço da curva.

17. Calcule as curvaturas das curvas dadas em coordenadas polares:
- (a)  $r = a \cos \theta$  (círculo);
  - (b)  $r = a\theta$  (espiral de Arquimedes);
  - (c)  $r = a(1 + \cos \theta)$  (cardiíde).

Esboce os traços das curvas.

18. A lemniscata de Bernoulli é a curva cujo traço é formado pelos pontos tais que o produto das distâncias a dois pontos fixos, chamados de focos e distando  $2a$  é sempre constante e igual a  $a^2$ . Tomando os focos em  $(\pm a, 0)$  sua equação cartesiana é, portanto,  $[(x - a)^2 + y^2][(x + a)^2 + y^2] = a^4$ .
- (a) Mostre que essa equação é equivalente a  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ ;
  - (b) Use (a) para mostrar que a equação da lemniscata de Bernoulli, em coordenadas polares, é  $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ ;

(c) Mostre que sua curvatura é dada por

$$k(\theta) = \frac{3}{a\sqrt{2}}\sqrt{\cos 2\theta}.$$

(d) Use (a) para mostrar que

$$\alpha(t) = \left( \frac{a\sqrt{2}\cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{a\sqrt{2}\sin t \cos t}{1 + \sin^2 t} \right),$$

$t \in [-\pi, \pi]$  é uma parametrização para a lemniscata de Bernoulli;

19. A lemniscata de Geron, também conhecida como “curva oito”, é a curva dada pela equação  $x^4 = a^2(x^2 - y^2)$ .

(a) Mostre que sua equação em coordenadas polares é  $r^2 = a^2 \sec^4 \theta \cos(2\theta)$ ;

(b) Fazendo  $y = x \sin t$ , mostre que uma parametrização para a lemniscata de Geron pode ser dada por  $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t \cos t)$ ,  $t \in [-\pi, \pi]$ ;

(c) Mostre que sua curvatura é  $k(t) = \frac{3 \cos t - 2 \cos^3 t}{a(\sin^2 t + \cos^2 2t)^{\frac{3}{2}}}$ ;

(d) Compare com a lemniscata de Bernoulli.

20. Seja  $\alpha$  a curva dada por  $\alpha(t) = (t^m, t^{-n})$ , onde  $m$  e  $n$  são inteiros positivos e  $t > 0$ . Mostre que a curva  $\alpha$  é regular. Sejam  $p = \alpha(t)$ ,  $q$  e  $r$  os pontos onde a reta tangente à  $\alpha$  em  $p$  intersecta os eixo  $Ox$  e  $Oy$ , respectivamente. Mostre que  $\frac{|p - q|}{|p - r|}$  é constante e descubra o seu valor.

21. Seja  $\alpha$  uma curva que tem a seguinte propriedade: todas as suas retas normais são paralelas. Mostre que o seu traço está contido em uma reta.

22. Seja  $\alpha$  uma curva que tem a seguinte propriedade: todas as suas retas normais passam por um ponto fixo  $c$ . Mostre que o traço de  $\alpha$  está contido em um círculo de centro  $c$ .
23. Encontre as retas tangentes à curva dada por

$$\alpha(t) = (t, t^4 - t + 3),$$

que passam pela origem.

24. Seja  $P$  o ponto onde a reta tangente à curva, definida por  $\alpha(t) = (t, t^3)$  intersecta o eixo  $Ox$  e seja  $M = (t, 0)$ . Mostre que  $d(O, P) = 2d(P, M)$ , onde  $O$  é a origem. Generalize esse resultado para a curva, dada por  $\alpha(t) = (t, t^n)$ .

## Capítulo 2

# Número de Rotação de uma Curva Fechada

Neste capítulo, iremos estudar curvas fechadas no plano do ponto de vista global, enfatizando o número de rotação de uma curva, que terá um papel importante nas aplicações geométricas e topológicas.

### 2.1 Ângulo Orientado

Sejam  $v$  e  $w$  dois vetores não-nulos em  $\mathbb{R}^2$ . A medida do ângulo entre  $v$  e  $w$ ,  $\sphericalangle(v, w)$ , é dado de modo único por  $\sphericalangle(v, w) \in [0, \pi]$  com

$$\cos \sphericalangle(v, w) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} = \left\langle \frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|} \right\rangle.$$

Vemos da definição acima que a noção de ângulo pode ser facilmente generalizada para espaços vetoriais com um produto interno. A noção de ângulo orientado entre  $v$  e  $w$ ,  $\sphericalangle(v, w)$ ,

que iremos introduzir a seguir é mais refinada, porém é uma característica do espaço Euclidiano bidimensional  $\mathbb{R}^2$ . A principal razão desse fato é que em  $\mathbb{R}^2$ , dado um vetor  $v = (v_1, v_2) \neq (0, 0)$ , podemos associar o vetor

$$v^\perp = (-v_2, v_1), \quad (2.1)$$

tal que  $\{v, v^\perp\}$  é uma base de  $\mathbb{R}^2$  com a mesma orientação da base canônica  $\{e_1, e_2\}$  no sentido de que, se fazemos uma rotação de modo que  $e_1$  seja levado no vetor  $\frac{v}{\|v\|}$ , então  $e_2$  é levado em  $\frac{v^\perp}{\|v^\perp\|}$ . Isso está relacionado ao fato de que, no plano  $\mathbb{R}^2$ , é natural falar-se em rotação nos sentidos *horário* e *anti-horário*, que não pode ser definida, por exemplo, em  $\mathbb{R}^3$ . Vamos então definir o ângulo orientado entre  $v$  e  $w$ .

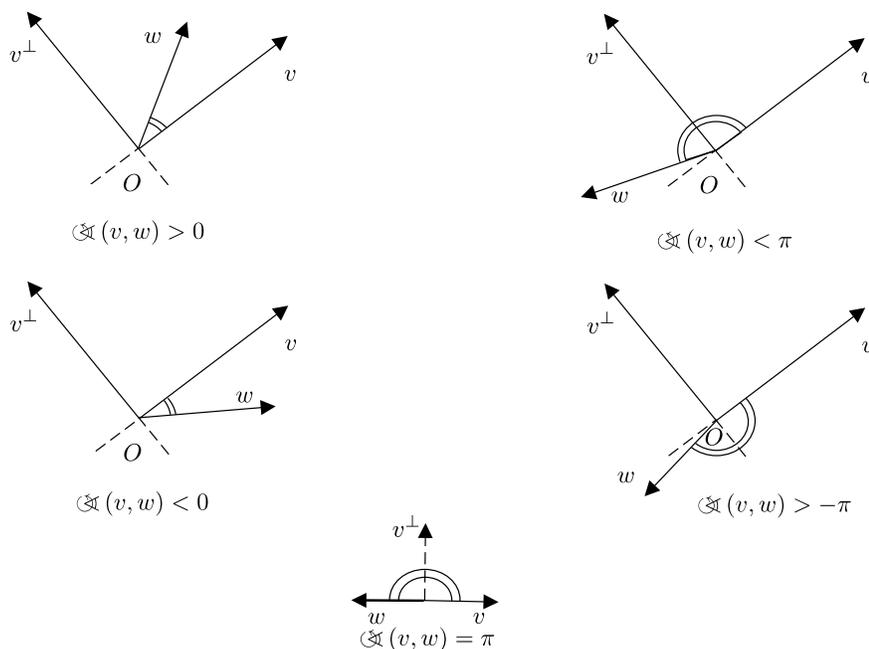
**Definição 2.1** *Dados dois vetores  $v$  e  $w$  não-nulos de  $\mathbb{R}^2$ , a medida do ângulo orientado (ou simplesmente ângulo orientado) de  $v$  para  $w$ ,  $\mathfrak{A}(v, w)$ , é dada por*

$$\mathfrak{A}(v, w) = \begin{cases} \sphericalangle(v, w), & \text{se } \langle v^\perp, w \rangle \geq 0, \\ -\sphericalangle(v, w), & \text{se } \langle v^\perp, w \rangle < 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Observe que  $\mathfrak{A}(v, w) \in (-\pi, \pi]$ . De fato, temos que

$$|\mathfrak{A}(v, w)| = \sphericalangle(v, w)$$

e, portanto,  $-\pi \leq \mathfrak{A}(v, w) \leq \pi$ . Para verificar que  $\mathfrak{A}(v, w) > -\pi$ , observe que, se  $\sphericalangle(v, w) = \pi$ ,  $\langle v^\perp, w \rangle = 0$  e, conseqüentemente,  $\mathfrak{A}(v, w) = \pi$ .



A definição de  $\mathfrak{A}(v, w)$  é tal que, se fixamos  $v$  e deixamos  $w$  rodar no sentido anti-horário para a posição na direção de  $-v$ , então  $\mathfrak{A}(v, w)$  decresce continuamente de  $\pi$  (incluído) até  $-\pi$  (excluído). Logo a função que a cada  $w \neq (0, 0)$  associa  $\mathfrak{A}(v, w)$  é descontínua e dá um salto de  $2\pi$ , exatamente, quando  $w$  atravessa a semi-reta determinada por  $-v$ .

**Propriedades do Ângulo Orientado:**

As proposições a seguir nos dão as principais propriedades do ângulo orientado  $\mathfrak{A}(v, w)$ .

**Proposição 2.1** *Se  $\mathfrak{A}(v, w) \neq \pi$ , então*

$$\mathfrak{A}(v, w) = -\mathfrak{A}(w, v).$$

*Porém, se  $\mathfrak{A}(v, w) = \pi$ , obtemos que  $\mathfrak{A}(v, w) = \mathfrak{A}(w, v) = \pi$ .*

**Prova.** Decorre diretamente da definição de  $\mathfrak{A}(v, w)$ . □

**Proposição 2.2** *Temos as seguintes equações:*

$$\cos \mathfrak{A}(v, w) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}, \quad \text{sen } \mathfrak{A}(v, w) = \frac{\langle v^\perp, w \rangle}{\|v\| \|w\|}.$$

**Prova.** A primeira equação decorre da definição de  $\mathfrak{A}(v, w)$ , observando que  $\cos(u) = \cos(-u)$ . Para a segunda relação, notemos que

$$\left( \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \right)^2 + \left( \frac{\langle v^\perp, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \right)^2 = 1.$$

Portanto  $\text{sen } \mathfrak{A}(v, w) = \pm \frac{\langle v^\perp, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$ . O sinal positivo é consequência da definição de  $\mathfrak{A}(v, w)$ . □

A próxima proposição tratará, de forma mais precisa, da “continuidade” de  $\mathfrak{A}(v, w)$ .

**Proposição 2.3** *Sejam  $v, w \in \mathbb{R}^2$ , tais que  $\mathfrak{A}(v, w) \neq \pi$ . Se  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma seqüência qualquer em  $\mathbb{R}^2$ , tal que  $w_n \neq (0, 0)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , e que satisfaz  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w \neq (0, 0)$ , então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{A}(v, w_n) = \mathfrak{A}(v, w).$$

**Prova.** Como  $\mathfrak{A}(v, w_n) \in (-\pi, \pi]$ , usando a continuidade das funções arccos e arcsen, temos que é suficiente provar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \mathfrak{A}(v, w_n) = \cos \mathfrak{A}(v, w)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{sen } \mathfrak{A}(v, w_n) = \text{sen } \mathfrak{A}(v, w).$$

Usando a Proposição 2.2, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \angle(v, w_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle v, w_n \rangle}{\|v\| \|w_n\|} = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} = \\ &= \cos \angle(v, w). \end{aligned}$$

De maneira análoga,

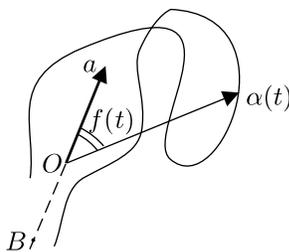
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sen} \angle(v, w_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle v^\perp, w_n \rangle}{\|v\| \|w_n\|} = \frac{\langle v^\perp, w \rangle}{\|v\| \|w\|} = \\ &= \operatorname{sen} \angle(v, w), \end{aligned}$$

o que conclui a prova. □

**Corolário 2.1** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva contínua, cujo traço não passa pela origem  $(0, 0)$ . Seja  $a \in \mathbb{R}^2$ , com  $a \neq (0, 0)$ , tal que  $\angle(a, \alpha(t)) \neq \pi$ , para todo  $t \in I$ . Então a função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por*

$$f(t) = \angle(a, \alpha(t)),$$

*é uma função contínua.*



*Como o traço de  $\alpha$  não intersecta a semi-reta  $\overrightarrow{OB}$ ,  $f(t) = \angle(a, \alpha(t))$  é uma função contínua.*

Para enunciar a propriedade aditiva de  $\angle(v, w)$ , vamos introduzir a seguinte notação: dizemos que  $x$  é congruente a  $y$  módulo  $2\pi$ , que escreveremos

$$x \equiv y \pmod{2\pi},$$

se a diferença  $x - y$  é um múltiplo inteiro de  $2\pi$ , isto é,  $\frac{x - y}{2\pi} \in \mathbb{Z}$ . Observe que as relações

$$\cos x = \cos y \quad \text{e} \quad \sin x = \sin y$$

se verificam, se e somente se  $x \equiv y \pmod{2\pi}$ . Podemos então enunciar a relação de aditividade de  $\angle(v, w)$ .

**Proposição 2.4** *Sejam  $u, v$  e  $w$  vetores não-nulos de  $\mathbb{R}^2$ . Então*

$$\angle(u, v) + \angle(v, w) \equiv \angle(u, w) \pmod{2\pi}. \quad (2.3)$$

**Prova.** É suficiente provarmos que

$$\cos(\angle(u, v) + \angle(v, w)) = \cos \angle(u, w), \quad (2.4)$$

e

$$\sin(\angle(u, v) + \angle(v, w)) = \sin \angle(u, w). \quad (2.5)$$

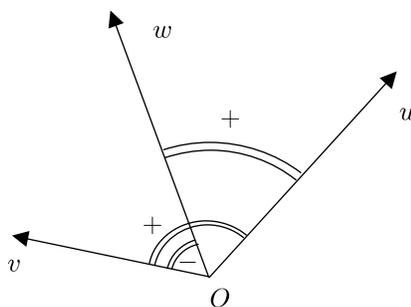
Usando a expressão do cosseno da soma de dois ângulos, temos que

$$\begin{aligned} & \cos(\angle(u, v) + \angle(v, w)) = \\ &= \cos \angle(u, v) \cos \angle(v, w) - \sin \angle(u, v) \sin \angle(v, w) \\ &= \left\langle \frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \left\langle \frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|} \right\rangle - \left\langle \frac{u^\perp}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \left\langle \frac{v^\perp}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|} \right\rangle \end{aligned}$$

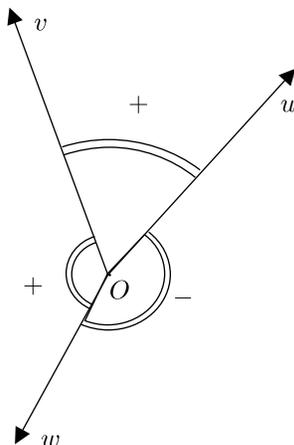
$$\begin{aligned}
 &= \left\langle \frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \left\langle \frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|} \right\rangle + \left\langle \frac{u}{\|u\|}, \frac{v^\perp}{\|v\|} \right\rangle \left\langle \frac{v^\perp}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|} \right\rangle \\
 &= \left\langle \frac{u}{\|u\|}, \frac{w}{\|w\|} \right\rangle = \cos \angle(u, w),
 \end{aligned}$$

em que usamos  $\langle u^\perp, v \rangle = -\langle u, v^\perp \rangle$ . A prova de (2.5) é análoga, utilizando-se a expressão do seno da soma de dois ângulos.

□



**Observação 2.1** *Observe que não é possível substituir em (2.3)  $\equiv \text{mod } 2\pi$  por igualdade, conforme mostra a próxima figura. Além disso, (2.3) não se verifica para medida de ângulo não-orientado.*



Usando o processo de indução finita, obtemos a seguinte consequência:

**Corolário 2.2** *Se  $u_1, \dots, u_n$  são vetores não-nulos de  $\mathbb{R}^2$ , então*

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(u_1, u_2) + \mathfrak{A}(u_2, u_3) + \dots + \mathfrak{A}(u_{n-1}, u_n) &\equiv \\ &\equiv \mathfrak{A}(u_1, u_n) \pmod{2\pi}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

## 2.2 Número de Rotação de uma Curva Fechada

**Teorema 2.1** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva contínua, e seja  $P_0$  um ponto não pertencente ao traço de  $\alpha$ . Então existe uma função contínua  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que*

$$\varphi(t) \equiv \mathfrak{A}(\alpha(a) - P_0, \alpha(t) - P_0) \pmod{2\pi},$$

para todo  $t \in [a, b]$ . Além disso, se  $\psi$  é uma outra função como acima, então  $\varphi$  e  $\psi$  diferem por um múltiplo de  $2\pi$ , isto é,

$$\varphi(t) = \psi(t) + 2k\pi,$$

para todo  $t \in [a, b]$  e para algum  $k \in \mathbb{Z}$  fixado. Em particular, existe uma única função  $\varphi$  como acima, tal que  $\varphi(a) = 0$ .

**Prova.** Vamos provar inicialmente a segunda parte do teorema. Temos que por hipótese,

$$\varphi(t) \equiv \psi(t) \pmod{2\pi},$$

isto é,  $\frac{\varphi(t) - \psi(t)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$ , para todo  $t \in [a, b]$ . Como  $\frac{\varphi - \psi}{2\pi}$  é uma função contínua, o fato de ela assumir valores em  $\mathbb{Z}$  implica que deve ser uma constante  $k$ . Portanto

$$\varphi(t) = \psi(t) + 2k\pi.$$

Decorre imediatamente que  $\varphi$  está univocamente determinada, se  $\varphi(a) = 0$ . Agora vamos provar a existência de uma função  $\varphi$  como no enunciado e tal que  $\varphi(a) = 0$ . Inicialmente, sejam

$$h(t) = \alpha(t) - P_0, \quad \text{e} \quad v_0 = \alpha(a) - P_0 = h(a).$$

Por hipótese,  $h(t) \neq 0$ , para todo  $t \in [a, b]$ . Portanto temos que está bem definido o ângulo orientado de  $v_0$  para  $h(t)$ ,  $\sphericalangle(v_0, h(t))$ , para todo  $t \in [a, b]$ . Vamos escolher uma subdivisão (ver observação (2.2))

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

do intervalo  $[a, b]$  de modo que

$$\varphi_k(t) = \sphericalangle(h(t_k), h(t)) < \pi,$$

para todo  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ . Pelo Corolário (2.1), temos que as funções  $\varphi_k$  são contínuas em  $[t_k, t_{k+1}]$ . Vamos definir a função  $\varphi$ , “colando” as funções  $\varphi_k$  do seguinte modo:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_0(t), & \text{se } t \in [t_0, t_1], \\ \varphi_k(t) + \sum_{i=0}^{k-1} \varphi_i(t_{i+1}), & \text{se } t \in [t_k, t_{k+1}], \quad 1 \leq k \leq n-1. \end{cases}$$

Visto que  $\varphi_k(t_k) = 0$ , temos que  $\varphi$  está bem definida e

$$\lim_{t \rightarrow t_k^-} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} \varphi(t) = \varphi(t_k).$$

Logo  $\varphi$  é uma função contínua. Pelo Corolário (2.2), obtemos

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\equiv \left( \sum_{i=0}^{k-1} \mathfrak{A}(h(t_i), h(t_{i+1})) \right) + \mathfrak{A}(h(t_k), h(t)) \equiv \\ &\equiv \mathfrak{A}(h(t_0), h(t)) \pmod{2\pi} \equiv \mathfrak{A}(v_0, h(t)) \pmod{2\pi}, \end{aligned}$$

o que conclui a prova do teorema. □

**Observação 2.2** *Para mostrar a existência da partição como na prova do teorema acima, observemos inicialmente que uma função contínua em um intervalo fechado  $[a, b]$  é de fato uniformemente contínua nesse intervalo. Considerando a função  $h$ , definida acima, temos que, como  $P_0$  não está no traço de  $\alpha$ , a função  $f$ , dada por  $f(t) = \frac{h(t)}{\|h(t)\|} = (u(t), v(t))$ , está bem definida, as funções  $u, v$  são uniformemente contínuas em  $[a, b]$  e satisfazem  $u^2(t) + v^2(t) = 1$ . Portanto, dado  $\varepsilon = 1$ , existe  $\delta > 0$ , tal que*

$$\begin{aligned} |u(t) - u(s)| &< 1, \\ |v(t) - v(s)| &< 1, \end{aligned}$$

se  $t, s \in [a, b]$ , com  $|t - s| < \delta$ . Isso implica agora que

$$\mathfrak{A}(h(s), h(t)) = \mathfrak{A}(f(s), f(t)) < \pi, \quad (2.7)$$

se  $0 < |s - t| < \delta$ . Caso contrário, teríamos

$$\frac{h(t)}{\|h(t)\|} = -\frac{h(s)}{\|h(s)\|},$$

ou equivalentemente,

$$u(t) = -u(s) \quad e \quad v(t) = -v(s),$$

o que implica

$$|u(t) - u(s)| = 2|u(t)| < 1 \quad e \quad |v(t) - v(s)| = 2|v(t)| < 1.$$

Portanto obtemos que

$$4 = 4u^2(t) + 4v^2(t) < 2,$$

que é uma contradição. Assim qualquer subdivisão do intervalo  $[a, b]$ ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ , tal que  $t_{i+1} - t_i < \delta$  irá satisfazer (2.7), o que conclui a prova.

**Definição 2.2** A função  $\varphi$ , dada pelo Teorema 2.1, tal que  $\varphi(a) = 0$ , depende do ponto  $P_0$ . Vamos denominá-la função angular de  $\alpha$  com respeito a  $P_0$ .

Observe que, se  $t, s \in [a, b]$ , então a função angular  $\varphi$  satisfaz

$$\varphi(s) - \varphi(t) \equiv \mathfrak{A}(\alpha(t) - P_0, \alpha(s) - P_0) \pmod{2\pi}.$$

Além disso, se  $t$  e  $s$  são suficientemente próximos (por exemplo,  $|t - s| < \delta$ , com  $\delta$  escolhido como na observação (2.2)), temos

$$\varphi(s) - \varphi(t) = \mathfrak{A}(\alpha(s) - P_0, \alpha(t) - P_0).$$

A última observação decorre do fato de que, fixado  $s$ , a função  $g$ , definida por  $g(t) = \frac{1}{2\pi}[\varphi(t) - \varphi(s) - \mathfrak{A}(\alpha(t) - P_0, \alpha(s) - P_0)]$ , é contínua se  $|t - s| < \delta$ ,  $g(t) \in \mathbb{Z}$  e  $g(s) = 0$ .

Seja  $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma reparametrização positiva de  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , isto é, existe uma bijeção crescente e contínua  $\sigma : [c, d] \rightarrow [a, b]$ , tal que  $\beta(t) = \alpha \circ \sigma(t)$ . Então, se  $\varphi$  é uma função angular para  $\alpha$  em relação a  $P_0$ , a função  $\tilde{\varphi} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi(\sigma(t)) - \varphi(\sigma(c)), \quad (2.8)$$

é uma função angular para  $\beta$ , com  $\tilde{\varphi}(c) = 0$ . De fato,

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma(s)) &= \mathfrak{A}(\alpha(a) - P_0, \alpha(\sigma(s)) - P_0) \\ &= \mathfrak{A}(\alpha(a) - P_0, \alpha(\sigma(c)) - P_0) + \\ &\quad + \mathfrak{A}(\alpha(\sigma(c)) - P_0, \alpha(\sigma(s)) - P_0) \\ &= \varphi(\sigma(c)) + \mathfrak{A}(\beta(c) - P_0, \beta(s) - P_0). \end{aligned}$$

Se  $\alpha$  é uma curva diferenciável, o próximo resultado nos dá uma expressão para uma função angular.

**Proposição 2.5** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva diferenciável, e seja  $P_0$  um ponto fora do traço de  $\alpha$ . Então a função  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por*

$$\varphi(t) = \int_a^t \frac{\langle (\alpha(\xi) - P_0)^\perp, \alpha'(\xi) \rangle}{\|\alpha(\xi) - P_0\|^2} d\xi, \quad (2.9)$$

*é uma função angular da curva  $\alpha$ , com relação a  $P_0$ .*

**Prova.** Observe que, se consideramos a curva  $\beta$  dada por  $\beta(t) = \alpha(t) - P_0$ , temos que uma função angular para  $\alpha$ , com relação a  $P_0$ , será uma função angular para  $\beta$ , com relação a  $(0,0)$ . Podemos então supor, sem perda de generalidade, que  $P_0 = (0,0)$ . Note que se consideramos a curva  $\gamma$ , definida por  $\gamma(t) = \frac{\alpha(t)}{\|\alpha(t)\|}$ , temos que  $\alpha$  e  $\gamma$  possuem a mesma função angular. Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\langle \alpha^\perp(t), \alpha'(t) \rangle}{\|\alpha(t)\|^2} &= \frac{\langle \gamma^\perp(t), \alpha'(t) \rangle}{\|\alpha(t)\|} \\ &= \frac{\langle \gamma^\perp(t), \|\alpha(t)\|' \gamma(t) + \|\alpha(t)\| \gamma'(t) \rangle}{\|\alpha(t)\|} = \langle \gamma^\perp(t), \gamma'(t) \rangle. \end{aligned}$$

Portanto precisamos provar (2.9) no caso em que  $P_0 = (0,0)$  e  $\|\alpha(t)\| = 1$ , isto é,

$$\varphi(t) = \int_a^t \langle \alpha^\perp(\xi), \alpha'(\xi) \rangle d\xi.$$

Inicialmente, vamos mostrar que a função angular  $\varphi$  é, nesse caso, de classe  $\mathcal{C}^1$ . Como  $\|\alpha(t)\| = 1$  e  $\varphi$  é função angular de  $\alpha$  em relação a origem, temos

$$\begin{aligned} \cos \varphi(t) &= \langle \alpha(a), \alpha(t) \rangle, \\ \text{sen } \varphi(t) &= \langle \alpha^\perp(a), \alpha(t) \rangle. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Visto que, para  $t$  suficientemente próximo de  $t_0 \in [a, b]$ , as funções seno e cosseno são estritamente monótonas e, portanto, possuem inversas diferenciáveis, concluímos que  $\varphi$  é de classe  $\mathcal{C}^1([a, b])$ . Podemos então derivar as equações (2.10) para obtermos

$$\begin{aligned} -\varphi'(t) \text{sen } \varphi(t) &= \langle \alpha(a), \alpha'(t) \rangle, \\ \varphi'(t) \cos \varphi(t) &= \langle \alpha^\perp(a), \alpha'(t) \rangle. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Combinando as equações (2.10) e (2.11), vemos que

$$\begin{aligned}\varphi'(t) \operatorname{sen}^2 \varphi(t) &= -\langle \alpha(a), \alpha'(t) \rangle \langle \alpha^\perp(a), \alpha(t) \rangle, \\ \varphi'(t) \operatorname{cos}^2 \varphi(t) &= \langle \alpha^\perp(a), \alpha'(t) \rangle \langle \alpha(a), \alpha(t) \rangle.\end{aligned}$$

Logo, como  $\alpha(t)$  e  $\alpha^\perp(t)$  são ortonormais,

$$\langle \alpha^\perp(a), \alpha(t) \rangle = -\langle \alpha(a), \alpha^\perp(t) \rangle$$

e

$$\langle \alpha^\perp(a), \alpha^\perp(t) \rangle = \langle \alpha(a), \alpha(t) \rangle.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= -\langle \alpha(a), \alpha'(t) \rangle \langle \alpha^\perp(a), \alpha(t) \rangle + \langle \alpha^\perp(a), \alpha'(t) \rangle \langle \alpha(a), \alpha(t) \rangle = \\ &\quad \langle \alpha'(t), \alpha^\perp(t) \rangle,\end{aligned}$$

que conclui a prova. □

Estamos prontos para definir o *número de rotação* de uma curva fechada no plano em relação a um ponto  $P_0$ , não pertencente ao seu traço.

Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(a) = \alpha(b)$ , uma curva fechada e contínua e seja  $P_0$  um ponto fora do traço de  $\alpha$ . Seja  $\varphi$  a função angular de  $\alpha$  com relação a  $P_0$ , com  $\varphi(a) = 0$ . Como  $\alpha(a) = \alpha(b)$ , temos que

$$\varphi(b) \equiv \mathfrak{A}(\alpha(a) - P_0, \alpha(b) - P_0) \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

**Definição 2.3** *O número*

$$W(\alpha, P_0) = \frac{1}{2\pi} \varphi(b) \in \mathbb{Z}$$

*é chamado de número de rotação de  $\alpha$  em relação a  $P_0$ .*

Intuitivamente, o número de rotação  $W(\alpha, P_0)$  mede o número algébrico de voltas que o vetor posição  $V$ , relativo ao ponto  $P_0$ , dado por  $V(t) = \alpha(t) - P_0$ , dá em torno de  $P_0$ , quando  $t$  varia de  $t = a$  a  $t = b$ . Toda a longa discussão deste capítulo, até agora, foi para tornar esta idéia precisa. Se  $\alpha$  é uma curva de classe  $\mathcal{C}^1$ , então, por (2.9),

$$W(\alpha, P_0) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{\langle (\alpha(\xi) - P_0)^\perp, \alpha'(\xi) \rangle}{\|\alpha(\xi) - P_0\|^2} d\xi. \quad (2.12)$$

Essa expressão tem uma conseqüência surpreendente: o membro direito da equação acima é sempre um número inteiro.

**Exemplo 2.1** Para  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq 0$ , consideremos a circunferência de centro  $P_0$  e raio  $R$  dada pela parametrização  $\alpha_n : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$\alpha_n(t) = P_0 + (R \cos nt, R \sin nt).$$

Pela equação (2.9),

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{\langle (-R \sin n\xi, R \cos n\xi), (-nR \sin n\xi, nR \cos n\xi) \rangle}{R^2} d\xi.$$

Logo  $\varphi(t) = nt$ . Portanto

$$W(\alpha_n, P_0) = n.$$

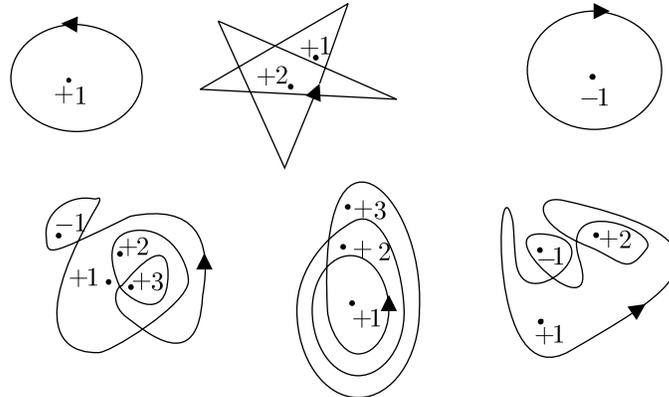
Observe que, quando  $n = 0$ , a curva definida por  $\alpha_0(t) = P_0$  é uma curva constante

$$W(\alpha_0, P_1) = 0,$$

se  $P_1 \neq P_0$ .

O exemplo acima mostra que qualquer  $n \in \mathbb{Z}$  pode ser realizado como número de rotação de uma curva no plano.

**Exemplo 2.2** A figura abaixo indica o número de rotação de cada uma das curvas em relação aos pontos destacados.



### 2.3 Propriedades do Número de Rotação

A primeira propriedade do número de rotação de uma curva que iremos provar diz que, em relação a pontos suficientemente distantes, o número de rotação de  $\alpha$  é nulo.

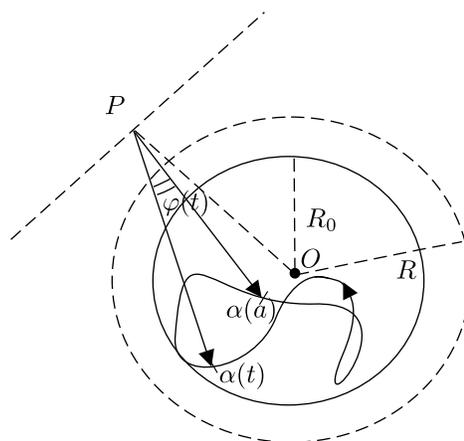
**Proposição 2.6** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada e contínua. Então existe  $R > 0$ , tal que, para todo  $P \in \mathbb{R}^2$  com  $\|P\| \geq R$ ,*

$$W(\alpha, P) = 0.$$

**Prova.** Como  $\|\alpha(t)\|$  é uma função contínua em  $[a, b]$ , assume um valor máximo  $R_0$  em  $[a, b]$ . Tome  $R > R_0$ . Agora observemos

que, se  $P \in \mathbb{R}^2$  com  $\|P\| \geq R$ , o traço de  $\alpha$  está inteiramente contido no semi-plano que contém a origem e é determinado pela reta perpendicular ao segmento  $\overline{OP}$ , passando por  $P$ . Portanto temos que a função angular de  $\alpha$  em relação a  $P$ ,  $\varphi(t)$ , com  $\varphi(a) = 0$ , satisfaz

$$\varphi(t) = \sphericalangle(\alpha(a) - P, \alpha(t) - P) < \pi, \forall t \in [a, b].$$



Logo

$$\varphi(b) = 0,$$

e, conseqüentemente,

$$W(\alpha, P) = 0,$$

o que conclui a prova. □

A próxima proposição vai tratar de como o número de rotação de uma curva  $\alpha$  varia ao considerarmos reparametrizações de  $\alpha$ .

**Proposição 2.7** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada e contínua, e seja  $P \in \mathbb{R}^2$  um ponto fora do traço de  $\alpha$ . Considere uma função contínua e injetiva  $\sigma : [c, d] \rightarrow [a, b]$ , com*

$\sigma(c) = a$  e  $\sigma(d) = b$ . Então a reparametrização de  $\alpha$  dada por  $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\beta(t) = \alpha \circ \sigma(t)$ , é uma curva fechada, contínua, e seu número de rotação coincide com o número de rotação de  $\alpha$ , isto é,

$$W(\beta, P) = W(\alpha \circ \sigma, P) = W(\alpha, P).$$

**Prova.** Usando a expressão da função angular de uma reparametrização, equação (2.8), temos que

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi(\sigma(t)) - \varphi(\sigma(c)) = \varphi(\sigma(t)).$$

Logo  $\tilde{\varphi}(c) = 0$  e, portanto,

$$W(\beta, P) = W(\alpha \circ \sigma, P) = \frac{1}{2\pi} \tilde{\varphi}(d) = \frac{1}{2\pi} \varphi(b) = W(\alpha, P).$$

□

**Observação 2.3** Se  $\sigma$  “reverte” a orientação de  $\alpha$ , isto é, se  $\sigma(c) = b$  e  $\sigma(d) = a$ , então

$$W(\beta, P) = W(\alpha \circ \sigma, P) = -W(\alpha, P).$$

De fato,

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi(\sigma(t)) - \varphi(\sigma(c)) = \varphi(\sigma(t)) - \varphi(b),$$

e  $\tilde{\varphi}(c) = 0$ . Portanto

$$\begin{aligned} W(\beta, P) &= \frac{1}{2\pi} [\tilde{\varphi}(d) - \tilde{\varphi}(c)] = \frac{1}{2\pi} [\varphi(\sigma(d)) - \varphi(b)] = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \varphi(b) = -W(\alpha, P). \end{aligned}$$

Observe que, como  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva fechada ( $\alpha(a) = \alpha(b)$ ), podemos considerar o número de rotação de  $\alpha$  em relação a outro ponto inicial/final. Para isso, vamos considerar a curva  $\bar{\alpha} : [a, 2b - a] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\bar{\alpha}(t) = \begin{cases} \alpha(t), & \text{se } a \leq t \leq b, \\ \alpha(t - (b - a)), & \text{se } b \leq t \leq 2b - a. \end{cases}$$

É claro que a curva  $\bar{\alpha}$  é contínua. Se  $\alpha$  for fechada e de classe  $\mathcal{C}^k$ , isto é, se, para todo  $1 \leq m \leq k$ ,

$$\frac{d^m \alpha}{dt^m}(a) = \frac{d^m \alpha}{dt^m}(b),$$

então  $\bar{\alpha}$  é de classe  $\mathcal{C}^k$ . Observe que, por definição, para todo  $s \in [a, b]$ , temos

$$\bar{\alpha}(s) = \bar{\alpha}(s + (b - a)).$$

Então defina a curva  $\alpha_s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  por

$$\alpha_s(t) = \bar{\alpha}(t + s - a).$$

A curva  $\alpha_s$  possui o mesmo traço que  $\alpha$ , porém seu ponto inicial/final é  $\alpha(s)$ . Temos que  $\alpha_a(t) = \alpha_b(t) = \alpha(t)$ , para todo  $t \in [a, b]$ , porém, se  $a < s < b$ ,  $\alpha_s$  não é uma reparametrização de  $\alpha$ .

Vamos agora estudar a dependência de  $W(\alpha, P)$  em relação ao ponto inicial/final de  $\alpha$ . Considerando a construção anterior, temos o seguinte resultado:

**Proposição 2.8** *Sejam  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada e  $P \in \mathbb{R}^2$  um ponto fora do traço de  $\alpha$ . Então, para todo  $s \in [a, b]$ ,*

$$W(\alpha, P) = W(\alpha_s, P).$$

*Em particular,  $W(\alpha, P)$  não depende do ponto inicial/final de  $\alpha$ .*

**Prova.** Com a notação acima, sejam  $\varphi$  e  $\bar{\varphi}$  funções angulares para  $\alpha$  e  $\bar{\alpha}$  em relação ao ponto  $P$ , com  $\varphi(a) = \bar{\varphi}(a) = 0$ . Então

$$\bar{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t), & a \leq t \leq b, \\ \varphi(b) + \varphi(t - (b - a)), & b \leq t \leq 2b - a. \end{cases}$$

Visto que  $\alpha_s$  é uma reparametrização de  $\bar{\alpha}|_{[s, b+s]}$ , temos que a função angular de  $\alpha_s$  em relação a  $P$ ,  $\varphi_s$ , satisfazendo  $\varphi_s(a) = 0$  é dada por

$$\varphi_s(t) = \bar{\varphi}(t + s - a) - \bar{\varphi}(s).$$

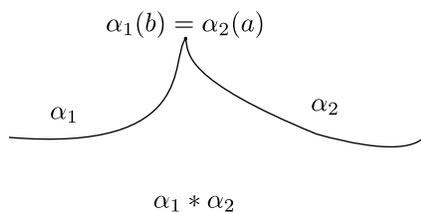
Logo, para os números de rotação, obtemos

$$\begin{aligned} W(\alpha_s, P) &= \frac{1}{2\pi} \varphi_s(b) = \frac{1}{2\pi} (\bar{\varphi}(s + (b - a)) - \bar{\varphi}(s)) \\ &= \frac{1}{2\pi} (\varphi(b) + \varphi(s) - \varphi(s)) = W(\alpha, P). \end{aligned}$$

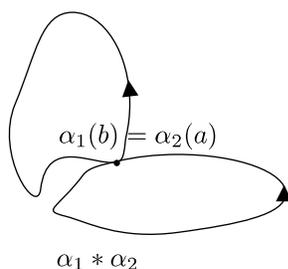
Portanto, visto que  $W(\alpha_s, P)$  não depende de  $s$ , concluímos a prova. □

Vamos considerar duas curvas contínuas  $\alpha_1, \alpha_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , com  $\alpha_1(b) = \alpha_2(a)$ . Podemos então definir uma nova curva contínua  $\alpha_1 * \alpha_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\alpha_1 * \alpha_2(t) = \begin{cases} \alpha_1(2t - a), & \text{se } a \leq t \leq \frac{a+b}{2}, \\ \alpha_2(2t - b), & \text{se } \frac{a+b}{2} \leq t \leq b. \end{cases}$$



Geometricamente, significa que usamos a primeira metade do intervalo  $[a, b]$  para parametrizar  $\alpha_1$  e a segunda metade para parametrizar  $\alpha_2$ . A condição  $\alpha_1(b) = \alpha_2(a)$  implica que  $\alpha_1 * \alpha_2$  é contínua em  $[a, b]$ . Observe que, em geral,  $\alpha_2 * \alpha_1$  não está definida. Suponha agora que as curvas  $\alpha_1, \alpha_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  sejam curvas fechadas e contínuas com  $\alpha_1(a) = \alpha_1(b) = \alpha_2(a) = \alpha_2(b)$ . Nesse caso,  $\alpha_1 * \alpha_2$  e  $\alpha_2 * \alpha_1$  estão bem definidas e são curvas fechadas e contínuas.



A próxima propriedade é a aditividade do número de rotação em relação à operação  $*$ .

**Proposição 2.9** *Sejam  $\alpha_1, \alpha_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  curvas fechadas e contínuas com  $\alpha_1(b) = \alpha_2(a)$ . Seja  $P$  um ponto fora do traço de  $\alpha_1 * \alpha_2$ . Então*

$$W(\alpha_1 * \alpha_2, P) = W(\alpha_1, P) + W(\alpha_2, P).$$

**Prova.** Sejam  $\varphi_1, \varphi_2$  e  $\varphi$  as funções angulares com respeito a  $P$  das curvas  $\alpha_1, \alpha_2$  e  $\alpha_1 * \alpha_2$ , respectivamente, e suponhamos que  $\varphi_1(a) = \varphi_2(b) = \varphi(a) = 0$ . Então temos que

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(2t - a), & \text{se } a \leq t \leq \frac{a+b}{2}, \\ \varphi_1(b) + \varphi_2(2t - b), & \text{se } \frac{a+b}{2} \leq t \leq b. \end{cases}$$

Portanto

$$W(\alpha_1 * \alpha_2, P) = \frac{1}{2\pi} \varphi(b) = \frac{1}{2\pi} (\varphi_1(b) + \varphi_2(b))$$

$$= W(\alpha_1, P) + W(\alpha_2, P).$$

□

Nas condições da proposição anterior,  $\alpha_1 * \alpha_2$  e  $\alpha_2 * \alpha_1$  estão bem definidas. Essas curvas são, em geral, distintas. Entretanto, visto que

$$W(\alpha_2 * \alpha_1, P) = W(\alpha_2, P) + W(\alpha_1, P) = W(\alpha_1 * \alpha_2, P),$$

os seus números de rotação  $\alpha_1 * \alpha_2$  e  $\alpha_2 * \alpha_1$  coincidem.

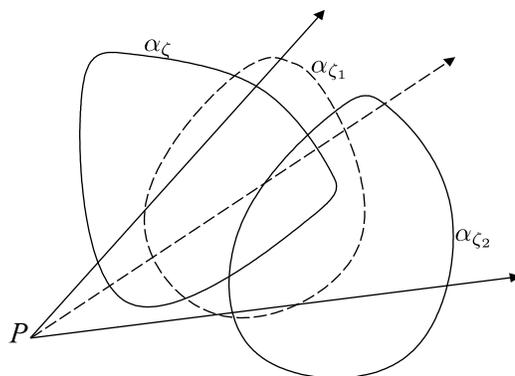
**Exemplo 2.3** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada e contínua, e seja  $P$  um ponto fora do traço de  $\alpha$ . Vamos considerar a curva  $\alpha^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por*

$$\alpha^-(t) = \alpha(b + a - t).$$

$\alpha^-$  percorre o traço de  $\alpha$  com a orientação contrária a de  $\alpha$ . Então

$$W(\alpha * \alpha^-, P) = W(\alpha, P) + W(\alpha^-, P) = W(\alpha, P) - W(\alpha, P) = 0.$$

Intuitivamente, é claro que o número de rotação  $W(\alpha, P)$  de uma curva fechada e contínua  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , em relação a um ponto  $P$  fora de seu traço, permanece inalterado se movemos “ligeiramente”  $\alpha$  ou  $P$ . Para tornar essa afirmação clara e precisa, vamos introduzir a noção de deformação contínua de uma curva em  $\mathbb{R}^2$ .



As curvas  $\alpha_\zeta$ ,  $\alpha_{\zeta_1}$  e  $\alpha_{\zeta_2}$  possuem o mesmo número de rotação em relação ao ponto  $P$ .

Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva em  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $J \subset \mathbb{R}$  um intervalo com  $0 \in J$ . Uma *deformação* (ou *família a uma parâmetro*) de  $\alpha$  é uma aplicação contínua  $H : J \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que

$$H(0, t) = \alpha(t), \quad \forall t \in I.$$

A continuidade de  $H$  significa que fixados  $\zeta_0 \in J$  e  $t_0 \in I$ , para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ , tal que

$$\|H(\zeta, t) - H(\zeta_0, t_0)\| < \varepsilon,$$

se  $|\zeta - \zeta_0| < \delta$  e  $|t - t_0| < \delta$ , isto é,

$$\lim_{(\zeta, t) \rightarrow (\zeta_0, t_0)} H(\zeta, t) = H(\zeta_0, t_0).$$

Logo, para cada  $\zeta \in J$ , a curva  $\alpha_\zeta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\alpha_\zeta(t) = H(\zeta, t),$$

é contínua em  $\mathbb{R}^2$ , chamada curva da deformação. Vamos usar indistintamente as funções  $H$  e  $\alpha_\zeta$  para denotar uma deformação da curva  $\alpha$ . Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 2.4** A aplicação  $H : \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$H(\zeta, t) = e^\zeta(\cos t, \operatorname{sen} t),$$

é uma deformação contínua do círculo unitário. As curvas da deformação são círculos concêntricos.

**Exemplo 2.5** A aplicação  $H : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por

$$H(\zeta, t) = \zeta(\cos t, \operatorname{sen} t),$$

é uma deformação da curva constante  $\alpha$ , dada por  $\alpha(t) = (0, 0)$ . As curvas da deformação são círculos concêntricos.

**Exemplo 2.6** A aplicação  $H : [0, 2\pi] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por

$$H(\zeta, t) = t(\cos \zeta, \operatorname{sen} \zeta),$$

é uma deformação contínua do segmento  $\{(t, 0), t \in [-1, 1]\}$ . As curvas da deformação são segmentos de reta passando pela origem  $(0, 0)$ .

**Exemplo 2.7** A aplicação  $H : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$H(\zeta, t) = ((1 + \zeta) \cos t, \operatorname{sen} t),$$

é uma deformação do círculo unitário  $x^2 + y^2 = 1$ . As curvas da deformação são elipses.

**Exemplo 2.8** Seja  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva contínua. A aplicação contínua  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por

$$H(\zeta, t) = \alpha((1 - \zeta)t),$$

é uma deformação de  $\alpha$  que contrai  $\alpha(t)$  para o ponto  $\alpha(0)$ , isto é,  $H(0, t) = \alpha(t)$  e  $H(1, t) = \alpha(0)$ .

Seja  $\alpha_\zeta$ ,  $\zeta \in J$ , uma deformação de uma curva fechada  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que, para todo  $\zeta \in J$ ,  $\alpha_\zeta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva fechada. Seja  $P$  um ponto que não está no traço de nenhuma curva da deformação. Nesse caso, estão bem definidas as funções angulares  $\varphi_\zeta$  de cada curva  $\alpha_\zeta$  em relação ao ponto  $P$ , com  $\varphi_\zeta(a) = 0$ . Uma pergunta natural: essas funções variam continuamente com  $\zeta$ ? A resposta a essa pergunta está no próximo resultado.

**Proposição 2.10** *Seja  $\alpha_\zeta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\zeta \in J$ , uma deformação contínua de curvas fechadas, e seja  $P(\zeta)$  uma curva contínua tal que, para cada  $\zeta \in J$ , o ponto  $P_\zeta = P(\zeta)$  não pertence ao traço de  $\alpha_\zeta$ . Denote por  $\varphi_\zeta$ , a qual depende do parâmetro  $t$ , a função angular da curva  $\alpha_\zeta$  em relação ao ponto  $P_\zeta$ , com  $\varphi_\zeta(a) = 0$ . Então  $\varphi_\zeta$  depende continuamente de  $\zeta$  e  $t$ . Em particular, para todo  $t \in [a, b]$  fixado, a função que a cada  $\zeta$  associa  $\varphi_\zeta(t)$  é uma função contínua em  $J$ .*

**Prova.** Fixe  $\zeta_0 \in J$ . Vamos provar inicialmente que existe  $\delta > 0$ , tal que

$$\sphericalangle(\alpha_\zeta(t) - P_\zeta, \alpha_\zeta(s) - P_\zeta) < \pi, \quad (2.13)$$

se  $|\zeta - \zeta_0| < \delta$  e  $|t - s| < \delta$ . Note que, se definimos  $v_\zeta(t) = \frac{\alpha_\zeta(t) - P_\zeta}{\|\alpha_\zeta(t) - P_\zeta\|}$ , a equação (2.13) é equivalente a

$$\langle v_\zeta(t), v_\zeta(s) \rangle \neq -1. \quad (2.14)$$

Vamos supor, por contradição, que (2.14) não é verdadeira. Nesse caso, existem seqüências  $\zeta_n$  em  $J$  e  $t_n, s_n$  em  $[a, b]$ , tais que

$$|\zeta_n - \zeta_0| < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$|t_n - s_n| < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

com

$$\langle v_{\zeta_n}(t_n), v_{\zeta_n}(s_n) \rangle = -1.$$

Então temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = \zeta_0$ . Além disso, como as seqüências  $t_n$  e  $s_n$  estão definidas em um intervalo fechado e limitado, passando a subsequências se necessário, podemos supor que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = t_0 \in [a, b].$$

Por hipótese,  $\alpha_\zeta(t)$  depende continuamente de  $\zeta$  e  $t$ . Logo  $v_\zeta(t)$  também depende continuamente de  $\zeta$  e  $t$ . Assim

$$-1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle v_{\zeta_n}(t_n), v_{\zeta_n}(s_n) \rangle = \langle v_{\zeta_0}(t_0), v_{\zeta_0}(t_0) \rangle = 1,$$

o que é uma contradição. Logo (2.13) é verdadeira.

Considere agora uma partição de  $[a, b]$ ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ , tal que  $t_{k+1} - t_k < \delta$  para todo  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Se  $|\zeta - \zeta_0| < \delta$ , então, por (2.13),

$$\varphi_\zeta(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \mathfrak{A}(v_\zeta(t_i), v_\zeta(t_{i+1})) + \mathfrak{A}(v_\zeta(t_k), v_\zeta(t)),$$

$t_k \leq t \leq t_{k+1}$ , é uma soma de funções contínuas, o que conclui a prova. □

A proposição anterior contribuirá na demonstração de próximo resultado, o qual, de certa forma, garantirá que o número de rotação das curvas de uma deformação é constante.

**Teorema 2.2** *Seja  $\alpha_\zeta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\zeta \in J$ , uma deformação contínua de curvas fechadas, e seja  $P : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva contínua, tal que, para cada  $\zeta \in J$ , o ponto  $P_\zeta = P(\zeta)$  não pertence ao traço de  $\alpha_\zeta$ . Então o número de rotação  $W(\alpha_\zeta, P_\zeta)$  não depende de  $\zeta$ , isto é,  $W$  é uma função constante em relação à  $\zeta$ .*

**Prova** Pela Proposição 2.10, a função  $W$ , dada por

$$W(\alpha_\zeta, P_\zeta) = \frac{1}{2\pi} \varphi_\zeta(b),$$

é contínua como função de  $\zeta$ . Visto que a função  $W$  assume valores inteiros e está definida em um intervalo, segue-se que  $W$  é uma função constante.  $\square$

## 2.4 Número de Rotação de Curvas Deformáveis

Nesta seção, vamos apresentar algumas aplicações das propriedades vistas na seção anterior.

Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada, e seja  $P$  um ponto fora do traço de  $\alpha$ . Vamos dar uma condição para que  $W(\alpha, P)$  seja nulo.

**Proposição 2.11** *Suponha que exista uma curva  $d : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ , contínua, com  $d(0) = P$  e  $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \|d(\zeta)\| = \infty$ . Se o traço de  $d$  não intersecta o traço de  $\alpha$ , então*

$$W(\alpha, P) = 0.$$

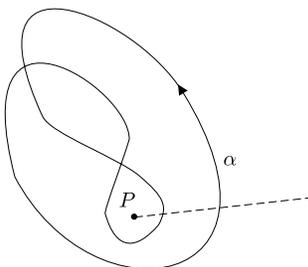
**Prova** Basta aplicar o Teorema 2.2 com  $P_\zeta = d(\zeta)$  e a deformação constante, dada por  $\alpha_\zeta(t) = \alpha(t)$ . Portanto temos

que  $W(\alpha, d(\zeta))$  é constante como função de  $\zeta$ . Além disso, pela Proposição 2.6, temos que para  $\zeta$  suficientemente grande,

$$W(\alpha, d\zeta) = 0.$$

□

A recíproca da proposição acima não é necessariamente verdadeira. A figura, a seguir, mostra o traço de uma curva  $\alpha$  e um ponto  $P$ , tais que  $W(\alpha, P) = 0$ . No entanto toda curva contínua que liga  $P$  a um ponto suficientemente longe intersecta o traço de  $\alpha$ .



Um subconjunto  $\mathcal{A}$  de  $\mathbb{R}^2$  é dito *conexo por caminhos* ou apenas *conexo*, se, para qualquer par de pontos  $P, Q \in \mathcal{A}$ , existe uma curva contínua contida em  $\mathcal{A}$ , ligando  $P$  a  $Q$ . Dado um conjunto  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  e dado  $P \in \mathcal{A}$ , a componente conexa  $\mathcal{A}_P$  de  $\mathcal{A}$  que contém  $P$  é definida por

$$\mathcal{A}_P = \{Q \in \mathcal{A} \mid \text{existe uma curva contínua contida em } \mathcal{A}, \\ \text{ligando } P \text{ a } Q\}.$$

$\mathcal{A}_P$  é o maior subconjunto conexo de  $\mathcal{A}$  que contém  $P$ . Qualquer conjunto  $\mathcal{A}$  é, portanto, a união disjunta de suas componentes conexas.

Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada. Considere  $\mathbb{C}^\alpha$  o complementar do traço de  $\alpha$  em  $\mathbb{R}^2$ . Para cada  $P \in \mathbb{C}^\alpha$ , está

bem definido o número de rotação  $W(\alpha, P)$  de  $\alpha$  em relação a  $P$ . Observe que dados dois pontos  $P$  e  $Q$  em uma componente conexa de  $\mathbb{C}^\alpha$ , eles podem ser ligados por uma curva contínua que não intersecta o traço de  $\alpha$ . Logo, pelo Teorema 2.2, temos que  $W(\alpha, P) = W(\alpha, Q)$ . Provamos então o seguinte resultado.

**Proposição 2.12** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada, e seja  $\mathbb{C}^\alpha$  o complementar do traço de  $\alpha$  em  $\mathbb{R}^2$ . Então  $W(\alpha, P)$  é constante em cada componente conexa de  $\mathbb{C}^\alpha$ .*

Para a próxima aplicação, vamos introduzir a noção de curvas *homotópicas* em um subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ . Dizemos que duas curvas  $\alpha : [a, b] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$  e  $\beta : [a, b] \rightarrow U$  são homotópicas em  $U$ , se a curva  $\alpha$  pode ser deformada na curva  $\beta$ , em que cada curva da deformação é uma curva fechada com o traço em  $U$ , isto é, se existe uma deformação contínua  $\alpha_\zeta : [a, b] \rightarrow U$ ,  $0 \leq \zeta \leq 1$ , com  $\alpha_0(t) = \alpha(t)$ ,  $\alpha_1(t) = \beta(t)$  e  $\alpha_\zeta(a) = \alpha_\zeta(b)$ , para todo  $\zeta \in [0, 1]$ . Vamos denotar então  $\alpha \sim \beta$  em  $U$ , se  $\alpha$  é homotópica a  $\beta$  em  $U$ . Nesse caso, a deformação que leva  $\alpha$  em  $\beta$  é chamada homotopia. Observe que *ser homotópica a* é uma relação de equivalência no conjunto de curvas fechadas definidas em  $[a, b]$ . Se uma curva fechada é homotópica a uma curva constante em  $U$ , dizemos que  $\alpha$  é homotópica a zero em  $U$ . Em relação a curvas homotópicas, temos o seguinte resultado:

**Proposição 2.13** *Seja  $U$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ , e seja  $P \notin U$ . Suponha que  $\alpha$  e  $\beta$  são curvas fechadas e homotópicas em  $U$ . Então*

$$W(\alpha, P) = W(\beta, P).$$

*Em particular, se  $\alpha$  é homotópica a zero em  $U$ , então  $W(\alpha, P) = 0$ .*

**Prova.** Observe que, como  $P \notin U$ , os números de rotação de  $\alpha$  e de  $\beta$  em relação a  $P$  estão bem definidos. Aplicando o Teo-

rema 2.2 para a homotopia que leva  $\alpha$  em  $\beta$ , obtemos o resultado.  $\square$

Note que duas curvas fechadas  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  são sempre homotópicas em  $U = \mathbb{R}^2$ . Para ver isso, basta considerar a deformação  $\alpha_\zeta$ , definida por

$$\alpha_\zeta(t) = (1 - \zeta)\alpha(t) + \zeta\beta(t), \quad 0 \leq \zeta \leq 1. \quad (2.15)$$

Um conjunto  $U \subset \mathbb{R}^2$  é dito *convexo*, se, para todo par de pontos  $P$  e  $Q$  em  $U$ , o segmento de reta que liga  $P$  a  $Q$  está inteiramente contido em  $U$ , isto é,  $((1 - \zeta)P + \zeta Q) \in U$ , para todo  $\zeta \in [0, 1]$ . Observe então que, se  $U$  é convexo e  $\alpha : [a, b] \rightarrow U$  e  $\beta : [a, b] \rightarrow U$  são curvas fechadas com traços contidos em  $U$ , a deformação dada pela equação (2.15) mostra que elas são homotópicas em  $U$ . Em particular, tomando-se  $\beta$  como uma curva constante, temos que toda curva fechada é homotópica a zero em um conjunto convexo. Como conseqüência direta da Proposição 2.13 e dessa observação, temos o seguinte resultado:

**Proposição 2.14** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto convexo, e seja  $P \notin U$ . Se  $\alpha : [a, b] \rightarrow U$  é uma curva fechada em  $U$ , então*

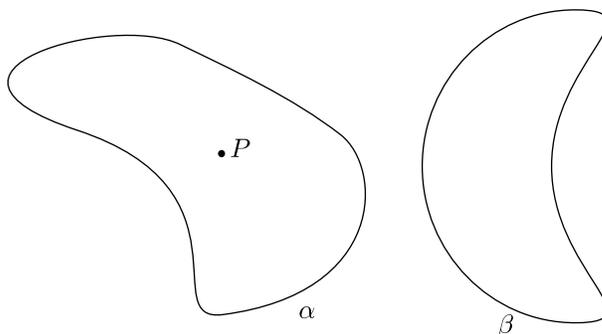
$$W(\alpha, P) = 0.$$

Fixe agora  $P \in \mathbb{R}^2$ , e seja  $U = \mathbb{R}^2 - \{P\}$ . Como vimos, se duas curvas fechadas  $\alpha$  e  $\beta$  são homotópicas em  $U$ , então

$$W(\alpha, P) = W(\beta, P).$$

Logo, se  $W(\alpha, P) \neq W(\beta, P)$ , a curva  $\alpha$  não pode ser deformada na curva  $\beta$  em  $U$ . Porém  $\alpha$  é sempre homotópica a  $\beta$  em  $\mathbb{R}^2$ . Portanto a remoção de um único ponto faz toda a diferença!

Intuitivamente, na figura abaixo, se pensamos no traço de  $\alpha$  como uma anel de borracha que pode se mover e deformar no plano (porém não pode ser cortado), ele não pode ser deformado até o traço de  $\beta$ , sem passar por  $P$ .



Em particular, quando  $W(\alpha, P) \neq 0$ , a curva fechada  $\alpha$  não pode ser contraída para um ponto em  $U = \mathbb{R}^2 - \{P\}$ .

Os conceitos de número de rotação e homotopia estão relacionados como veremos nos resultados a seguir.

**Teorema 2.3** (Poincaré-Bohl) *Sejam  $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{P\}$  duas curvas fechadas, tais que, para todo  $t \in [a, b]$ , o ponto  $P$  não pertence ao segmento de reta que liga  $\alpha(t)$  a  $\beta(t)$ . Então  $W(\alpha, P) = W(\beta, P)$ .*

**Prova.** A aplicação  $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$H(\zeta, t) = (1 - \zeta)\alpha(t) + \zeta\beta(t),$$

é uma homotopia entre  $\alpha$  e  $\beta$  em  $\mathbb{R}^2 - \{P\}$ . A Proposição 2.13 nos diz então que  $W(\alpha, P) = W(\beta, P)$ , o que conclui a prova.

□

**Corolário 2.3** (*Rouché*) *Sejam  $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{P\}$  duas curvas fechadas, tais que, para todo  $t \in [a, b]$ ,*

$$\|\alpha(t) - \beta(t)\| < \|\alpha(t) - P\|.$$

*Então  $W(\alpha, P) = W(\beta, P)$ .*

**Prova.** Vamos provar que  $P$  não pertence ao segmento  $T_t$  que liga  $\alpha(t)$  a  $\beta(t)$ . De fato, se  $P \in T_t$ , teríamos que  $\|\alpha(t) - \beta(t)\| \geq \|\alpha(t) - P\|$ , o que é uma contradição. O resultado agora é consequência direta do Teorema 2.3. □

Vamos concluir esta seção com o seguinte resultado, o qual caracteriza quando duas curvas são homotópicas em  $\mathbb{R}^2 - \{P\}$ . Esse resultado é um caso particular de um teorema de H. Hopf.

**Teorema 2.4** *Duas curvas fechadas e contínuas  $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{P\}$  são homotópicas em  $\mathbb{R}^2 - \{P\}$ , se e somente se*

$$W(\alpha, P) = W(\beta, P).$$

**Prova.** Pela Proposição (2.13), se  $\alpha$  e  $\beta$  são homotópicas em  $\mathbb{R}^2 - \{P\}$ , então seus números de rotação são iguais. Vamos supor agora que  $W(\alpha, P) = W(\beta, P)$  e construir uma homotopia em  $\mathbb{R}^2 - \{P\}$  entre  $\alpha$  e  $\beta$ . De fato, vamos provar que uma curva fechada com número de rotação  $n$  em relação a  $P$  é homotópica à curva  $\gamma_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\gamma_n(t) = P + \left( \cos \frac{2n\pi t}{b-a}, \sin \frac{2n\pi t}{b-a} \right)$$

em  $\mathbb{R}^2 - \{P\}$ . Como “*ser homotópica*” é uma relação de equivalência, concluímos que duas curvas com o mesmo número de rotação  $n$  são homotópicas em  $\mathbb{R}^2 - \{P\}$ . Seja  $\lambda : [a, b] \rightarrow$

$\mathbb{R}^2 - \{P\}$  uma curva com número de rotação  $n$ , e seja  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função angular para  $\lambda$  em relação a  $P$ , com  $\varphi(a) = \mathfrak{A}((1, 0), \lambda(a))$ . Considere a aplicação  $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por

$$H(\zeta, t) = P + \{\|\lambda(t) - P\|(1 - \zeta) + \zeta\}(\cos f(\zeta, t), \text{sen } f(\zeta, t)),$$

onde  $f(\zeta, t) = (1 - \zeta)\varphi(t) + \frac{2n\pi\zeta t}{b - a}$ . A aplicação  $H$  é contínua em  $[0, 1] \times [a, b]$  e satisfaz:

1.  $H(\zeta, t) \neq P, \quad \forall (\zeta, t) \in [0, 1] \times [a, b]$ ;
2.  $H(0, t) = P + \|\lambda(t) - P\|(\cos \varphi(t), \text{sen } \varphi(t)) = \lambda(t), \quad \forall t \in [a, b]$ ;
3.  $H(1, t) = P + (\cos \frac{2n\pi t}{b-a}, \text{sen } \frac{2n\pi t}{b-a}) = \gamma_n(t), \quad \forall t \in [a, b]$ ;
4.  $H(\zeta, a) = H(\zeta, b)$ .

De fato, as três primeiras afirmações são imediatas. O item (4) segue de

$$\begin{aligned} H(\zeta, a) &= P + \{\|\lambda(a) - P\|(1 - \zeta) + \zeta\}(\cos f(\zeta, a), \text{sen } f(\zeta, a)) \\ &= P + \{\|\lambda(b) - P\|(1 - \zeta) + \zeta\}(\cos f(\zeta, b), \text{sen } f(\zeta, b)) \\ &= H(\zeta, b), \end{aligned}$$

visto que  $W(\lambda, P) = n$  e  $f(\zeta, b) = f(\zeta, a) + 2n\pi$ .

As condições acima implicam que  $H$  é uma homotopia entre  $\lambda$  e  $\gamma_n$  em  $\mathbb{R}^2 - \{P\}$ , o que conclui a prova do teorema.

□

## 2.5 Cálculo do Número de Rotação - Número de Interseções

Nesta seção, vamos obter vários métodos para o cálculo do número de rotação de curvas fechadas no plano. Como consequência, vamos provar que o número de rotação é constante em cada componente conexa do complementar do traço de uma curva fechada. Vamos inicialmente verificar como o número de rotação  $W(\alpha, P)$  de uma curva fechada em relação a  $P$  varia, quando  $P$  percorre uma curva que intersecta o traço de  $\alpha$ . Neste estudo vamos nos restringir a raios partindo de  $P$ , isto é, uma semi-reta com origem  $P$ . Veremos que esse caso é suficiente para as principais aplicações geométricas e muito mais simples de provar.

Vamos introduzir a noção de “*número de interseções*” entre uma curva contínua  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  e um raio  $r$  com origem  $P$  e na direção de um vetor unitário  $v_0$ . Temos que  $r$  pode ser parametrizado por  $r : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $r(s) = P + sv_0$ . Suponha que  $\alpha$  intersecte o raio  $r$  para algum  $\bar{t} \in (a, b)$ . Nesse caso,  $\alpha(\bar{t}) = r(\bar{s})$  para algum  $\bar{s} \in (0, \infty)$ . Dizemos que essa interseção é *transversal*, se, para todo  $t$  suficientemente próximo de  $\bar{t}$ ,  $\alpha(t)$  está contida em um dos semi-planos abertos determinados pela reta que contém  $r$ , se  $t < \bar{t}$ , porém  $\alpha(t)$  está estritamente contida no outro semi-plano aberto. De forma mais precisa, existe  $\delta > 0$ , tal que, no intervalo  $[\bar{t} - \delta, \bar{t} + \delta]$ , a função contínua  $f$ , dada por

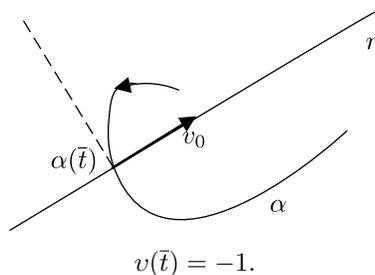
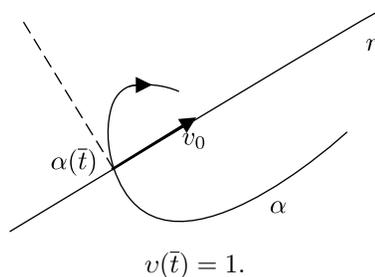
$$f(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(\bar{t}), v_0^\perp \rangle,$$

anula-se apenas em  $t = \bar{t}$  e troca de sinal nesse ponto. No caso de interseções transversais, vamos definir o *número de interseções*

$v(\bar{t})$  de  $\alpha$  e  $r$  em  $\bar{t}$  por

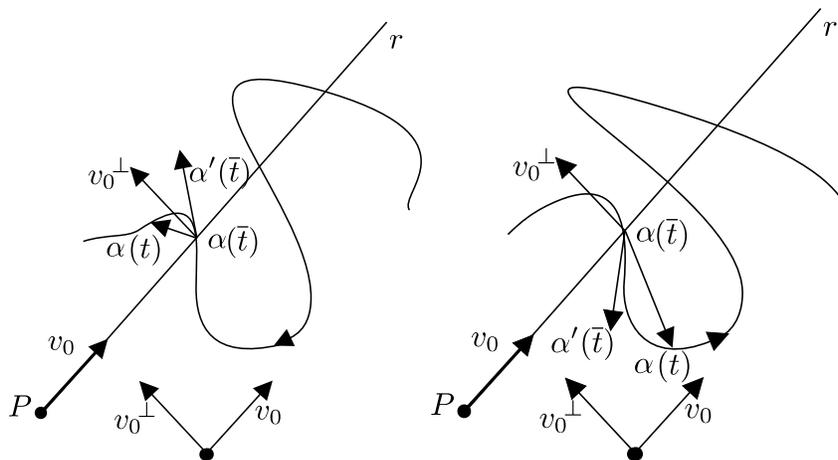
$$\begin{aligned} v(\bar{t}) &= \text{sinal}(\langle \alpha(t) - \alpha(\bar{t}), v_0^\perp \rangle) \\ &= \frac{\langle \alpha(t) - \alpha(\bar{t}), v_0^\perp \rangle}{|\langle \alpha(t) - \alpha(\bar{t}), v_0^\perp \rangle|}, \text{ se } 0 < t - \bar{t} \leq \delta. \end{aligned}$$

Se a curva  $\alpha(t)$  intersecta o raio  $r$  em  $\alpha(\bar{t})$  da direita para a esquerda, em relação à direção  $v_0$ , quanto  $t$  cresce, temos que  $v(\bar{t}) = 1$ . Se trocamos o sentido da interseção, então  $v(\bar{t}) = -1$ . Veja a figura abaixo. De forma mais precisa, escolha o sistema de coordenadas de  $\mathbb{R}^2$ , tal que a origem seja  $\alpha(\bar{t})$  e o eixo  $Ox$  tenha a direção e sentido do vetor  $v_0$ . Em relação a esse sistema de coordenadas, considere a curva  $\alpha$ , dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . Obtemos, por exemplo, que  $v(\bar{t}) = 1$ , se  $y(t) < 0$  para  $t < \bar{t}$  e  $y(t) > 0$  para  $t > \bar{t}$ , quando  $t$  suficientemente próximo de  $\bar{t}$ .



Usando a definição acima, segue-se imediatamente que

$$v(\bar{t}) = -\text{sinal}(\langle \alpha(t) - \alpha(\bar{t}), v_0^\perp \rangle), \text{ se } 0 < \bar{t} - t \leq \delta.$$



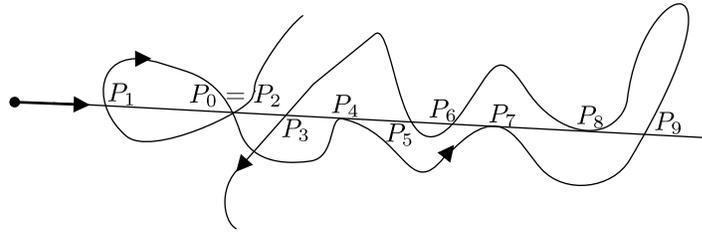
Se a curva  $\alpha$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  em uma vizinhança de  $\bar{t}$  e  $\langle \alpha'(\bar{t}), v_0^\perp \rangle \neq 0$ , então a curva  $\alpha$  intersecta o raio  $r$  transversalmente em  $\bar{t}$ , e temos que

$$v(\bar{t}) = \text{sinal}(\langle \alpha'(\bar{t}), v_0^\perp \rangle).$$

De fato, como  $f(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(\bar{t}), v_0^\perp \rangle$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  e, portanto,  $f'(t) = \langle \alpha'(t), v_0^\perp \rangle$  é contínua em uma vizinhança de  $\bar{t}$ , temos que a hipótese sobre  $\alpha'(\bar{t})$  implica que  $f'(t) \neq 0$  em algum intervalo  $[\bar{t} - \epsilon, \bar{t} + \epsilon]$ . Logo  $f$  é estritamente monótona nesse intervalo e

$$\text{sinal}(f(t)) = \text{sinal}(f'(t)) \quad \text{para } 0 < t - \bar{t} \leq \epsilon.$$

Observe que a transversalidade da interseção de  $\alpha$  e  $r$  em  $\bar{t}$  implica apenas que, para  $t$  suficientemente próximo de  $\bar{t}$ , a curva  $\alpha$  não intersecta o raio  $r$ . Para  $t$  fora de uma vizinhança de  $\bar{t}$ ,  $\alpha(t)$  pode pertencer a  $r$ . A figura a seguir ilustra várias situações, incluindo pontos de interseção múltipla ( $\alpha(t_1) = \alpha(t_2) \in r((0, \infty))$ , com  $t_1 \neq t_2$  e  $t_1, t_2 \in (a, b)$ ).



$P_4, P_7$  e  $P_8$  não são pontos de interseção transversal; o número de interseções em  $P_1, P_5$  e  $P_9$  é igual a 1, enquanto nos outros pontos este número é igual a -1.

Se a curva  $\alpha$  intersecta  $r$  em  $\bar{t}$ , porém não transversalmente, então  $\alpha$  pode intersectar  $r$  um número infinito de vezes em toda vizinhança de  $\bar{t}$ . Por exemplo, considere a curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, t^2 \operatorname{sen} \frac{1}{t}), & \text{se } t \neq 0, \\ (0, 0), & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Em relação ao raio  $r(s) = (-1 + s, 0)$ ,  $s \geq 0$ , temos que  $\alpha$  intersecta  $r$  em  $t = 0$ , porém tal interseção não é transversal. O número de interseção entre  $\alpha$  e  $r$  em  $(0, 0)$  não está definido.

Suponha agora que  $\alpha(t_0) \in r$ , para algum  $t_0 \in (a, b)$ , e que  $\alpha(t) \notin r$ , se  $t$  está suficientemente próximo de  $t_0$ ,  $t \neq t_0$ . Nesse caso, vamos dizer que a interseção de  $\alpha$  com  $r$  em  $t_0$  é isolada. Se  $\alpha(t_0)$  é uma interseção isolada de  $\alpha$  com  $r$ , porém não transversal, podemos definir o número de interseção  $v(t_0)$  de  $\alpha$  em relação a  $r$  por  $v(t_0) = 0$ . Observe que a interseção não ser transversal significa, nesse caso, que a traço de  $\alpha$  fica localmente de um lado do raio  $r$ . Essa interseção é, em certo sentido, não-essencial, visto que podemos fazê-la desaparecer após uma deformação pequena de  $\alpha$  ou de  $r$ . Note que isso não é possível, se  $v(t_0) = \pm 1$ . Vários dos resultados que iremos mostrar ainda serão válidos, se

a hipótese de interseção transversal for substituída por interseção isolada.

Iremos ver que o número de interseções, entre uma curva fechada  $\alpha$  e um raio  $r$  mede o salto de  $W(\alpha, P)$ , quando  $P$  move-se ao longo de  $r$ .

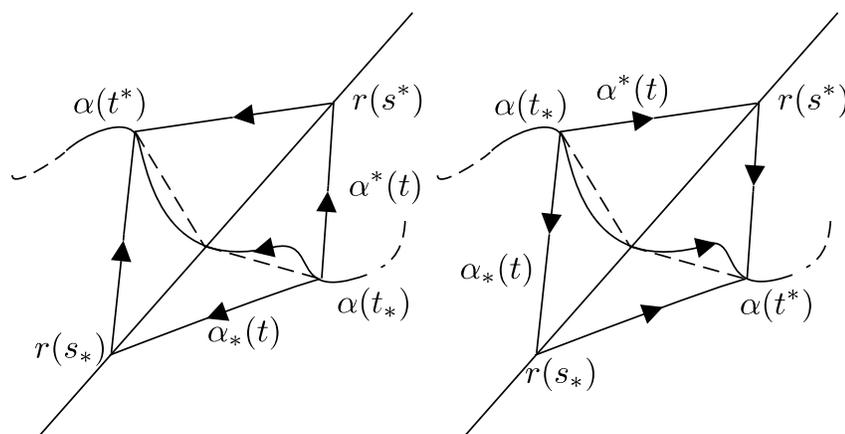
**Proposição 2.15** *Considere  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada e contínua, e seja  $r : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  um raio, dado por  $r(s) = P + sv_0$ . Suponha que  $\alpha$  intersecta  $r$  transversalmente em  $t_0 \in (a, b)$ , isto é,  $q = \alpha(t_0) = r(s_0)$  para algum  $s_0 > 0$  e  $\alpha(t) \neq q$  para todo  $t \neq t_0$ . Então, se  $0 \leq s_* < s_0 < s^*$  são tais que  $r(s)$  não pertence ao traço de  $\alpha$  para todo  $s \in [s_*, s^*]$ ,  $s \neq s_0$ , temos que*

$$W(\alpha, r(s_*)) - W(\alpha, r(s^*)) = v(t_0).$$

**Prova.** Como a interseção em  $t_0$  é transversal, podemos escolher  $a < t_* < t_0 < t^* < b$  de modo que  $\langle \alpha(t) - q, v_0^\perp \rangle \neq 0$ , para todo  $t \in [t_*, t^*]$ ,  $t \neq t_0$ , isto é,  $\alpha(t) \notin r([0, \infty))$ , para todo  $t \in [t_*, t^*]$ ,  $t \neq t_0$ . Vamos considerar duas curvas fechadas e contínuas  $\alpha_*, \alpha^* : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dadas por (veja figura a seguir)

$$\alpha_*(t) = \begin{cases} \frac{t_0-t}{t_0-t_*}\alpha(t_*) + \frac{t-t_*}{t_0-t_*}r(s_*), & \text{se } t_* \leq t \leq t_0, \\ \frac{t^*-t}{t^*-t_0}r(s^*) + \frac{t-t_0}{t^*-t_0}\alpha(t^*), & \text{se } t_0 \leq t \leq t^*, \\ \alpha(t), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} \frac{t_0-t}{t_0-t_*}\alpha(t_*) + \frac{t-t_*}{t_0-t_*}r(s^*), & \text{se } t_* \leq t \leq t_0, \\ \frac{t^*-t}{t^*-t_0}r(s^*) + \frac{t-t_0}{t^*-t_0}\alpha(t^*), & \text{se } t_0 \leq t \leq t^*, \\ \alpha(t), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



Observe que  $\alpha_*$  e  $\alpha^*$  diferem de  $\alpha$  apenas no intervalo  $[t_*, t^*]$ , onde  $\alpha$  é substituída por dois segmentos de reta com extremidades em  $r(s_*)$  e  $r(s^*)$ , respectivamente. Agora  $\alpha$  e  $\alpha_*$  são homotópicas em  $\mathbb{R}^2 - \{r(s^*)\}$ , com deformação dada, por exemplo, por  $\alpha_\zeta(t) = (1 - \zeta)\alpha(t) + \zeta\alpha_*(t)$ ,  $0 \leq \zeta \leq 1$ . Logo

$$W(\alpha, r(s^*)) = W(\alpha_*, r(s^*)).$$

Por outro lado, podemos deslocar continuamente  $r(s^*)$  até  $q$ , sem intersectar  $\alpha_*$ . Portanto, pelo Teorema 2.2,

$$W(\alpha_*, r(s^*)) = W(\alpha_*, q).$$

Usando o mesmo argumento para  $\alpha$ ,  $\alpha^*$  e  $r(s_*)$ , obtemos

$$W(\alpha, r(s_*)) = W(\alpha^*, q).$$

Então temos que

$$W(\alpha, r(s_*)) - W(\alpha, r(s^*)) = W(\alpha^*, q) - W(\alpha_*, q). \quad (2.16)$$

Vejamos que o membro direito de (2.16) não depende do comportamento global de  $\alpha_*$  e de  $\alpha^*$  e que é igual ao número de

interseção  $v(t_0)$  de  $\alpha$  e  $r$  em  $t_0$ , que é um invariante local. Para isso, seja  $a = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$  uma partição de  $[a, b]$ , com  $t_{\lambda-1} = t_*$ ,  $t_\lambda = t_0$  e  $t_{\lambda+1} = t^*$  e suficientemente fina de modo que

$$\mathfrak{A}(\alpha_*(t_i) - q, \alpha_*(t_{i+1}) - q) < \pi$$

e

$$\mathfrak{A}(\alpha^*(t_i) - q, \alpha^*(t_{i+1}) - q) < \pi.$$

Portanto temos que

$$W(\alpha_*, q) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \mathfrak{A}(\alpha_*(t_i) - q, \alpha_*(t_{i+1}) - q)$$

e

$$W(\alpha^*, q) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \mathfrak{A}(\alpha^*(t_i) - q, \alpha^*(t_{i+1}) - q).$$

Visto que  $\alpha_*$  e  $\alpha^*$  coincidem com  $\alpha$ , exceto, possivelmente, no intervalo  $[t_{\lambda-1}, t_{\lambda+1}]$ , temos que quase todas as parcelas da diferença  $W(\alpha^*, q) - W(\alpha_*, q)$  se cancelam e, por conseguinte,

$$\begin{aligned} W(\alpha^*, q) - W(\alpha_*, q) &= \frac{1}{2\pi} [\mathfrak{A}(\alpha^*(t_{\lambda-1}) - q, \alpha^*(t_\lambda) - q) \\ &+ \mathfrak{A}(\alpha^*(t_\lambda) - q, \alpha^*(t_{\lambda+1}) - q) - \mathfrak{A}(\alpha_*(t_{\lambda-1}) - q, \alpha_*(t_\lambda) - q) \\ &\quad - \mathfrak{A}(\alpha_*(t_\lambda) - q, \alpha_*(t_{\lambda+1}) - q)] \\ &= \frac{1}{2\pi} [\mathfrak{A}(\alpha(t_*) - q, r(s^*) - q) + \mathfrak{A}(r(s^*) - q, \alpha(t^*) - q) \\ &\quad - \mathfrak{A}(\alpha(t_*) - q, r(s_*) - q) - \mathfrak{A}(r(s_*) - q, \alpha(t^*) - q)]. \end{aligned}$$

Usando a Proposição 2.1, podemos reagrupar esses quatro ângulos para obtermos

$$W(\alpha^*, q) - W(\alpha_*, q) = \frac{1}{2\pi} [\mathfrak{A}(\alpha(t_*) - q, r(s^*) - q)$$

$$\begin{aligned}
& + \mathfrak{A}(r(s^*) - q, \alpha(t^*) - q) + \mathfrak{A}(\alpha(t^*) - q, r(s_*) - q) \\
& + \mathfrak{A}(r(s_*) - q, \alpha(t_*) - q)]. \tag{2.17}
\end{aligned}$$

Observe que, por (2.6), a soma dos quatro ângulos do lado direito da equação acima é igual a  $\mathfrak{A}(\alpha(t_*) - q, \alpha(t_*) - q) \bmod 2\pi = 0 \bmod 2\pi$ . Usando agora as definições de número de interseções e ângulo orientado, temos que os quatro ângulos que aparecem no lado direito da equação (2.17) pertencem ao intervalo  $(0, \pi)$ , se  $v(t_0) = 1$ . Tais ângulos pertencem ao intervalo  $(-\pi, 0)$ , se  $v(t_0) = -1$ . Com isso, temos que

$$\mathfrak{A}(\alpha(t_*) - q, r(s^*) - q) + \mathfrak{A}(r(s^*) - q, \alpha(t^*) - q)$$

$$+ \mathfrak{A}(\alpha(t^*) - q, r(s_*) - q) + \mathfrak{A}(r(s_*) - q, \alpha(t_*) - q) = 2\pi,$$

se  $v(t_0) = 1$  e

$$\mathfrak{A}(\alpha(t_*) - q, r(s^*) - q) + \mathfrak{A}(r(s^*) - q, \alpha(t^*) - q)$$

$$+ \mathfrak{A}(\alpha(t^*) - q, r(s_*) - q) + \mathfrak{A}(r(s_*) - q, \alpha(t_*) - q) = -2\pi,$$

se  $v(t_0) = -1$ . Concluimos que

$$W(\alpha^*, q) - W(\alpha_*, q) = v(t_0).$$

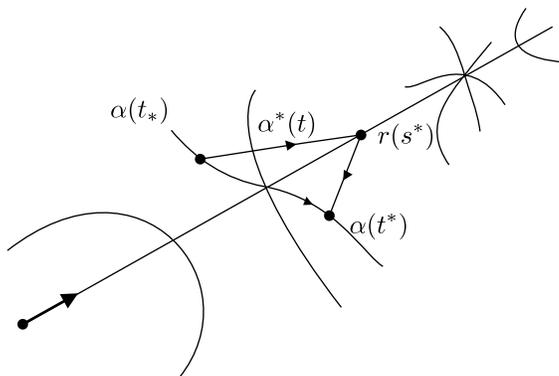
Assim, usando o resultado acima e a equação (2.16), completamos a prova.  $\square$

O próximo resultado, que é uma consequência direta da proposição anterior, nos dá um método para o cálculo do número de rotação  $W(\alpha, P)$  por um processo simples de contagem.

**Teorema 2.5** (*Fórmula do número de interseções*) Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada e contínua, e seja  $P$  um ponto fora do traço de  $\alpha$ . Seja  $r : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  um raio com origem em  $P$ ,  $r(s) = P + sv_0$ . Suponha que  $\alpha$  intersecta  $r$  apenas em um número finito de pontos  $t_1, \dots, t_k \in (a, b)$  e que todas essas interseções sejam transversais. Então

$$W(\alpha, P) = \sum_{i=1}^k v(t_i). \quad (2.18)$$

**Prova.** Para cada  $i = 1, \dots, k$ , seja  $s_i \in (0, \infty)$ , tal que  $\alpha(t_i) = r(s_i)$ . Note que a igualdade  $s_i = s_j$  para  $i \neq j$  significa que  $\alpha$  possui interseção múltipla com  $r$ . Vamos inicialmente “remover” todas as interseções múltiplas. Suponha que, por exemplo,  $s_1 = s_2$ . Escolha  $s^* > 0$ , com  $s^* \neq s_i$  para todo  $i$ . Construa uma curva fechada  $\alpha^* : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , exatamente como na prova da proposição anterior, que coincide com  $\alpha$  fora de um pequeno intervalo  $[t_*, t^*]$ , com centro  $t_1$  e que faz um desvio em uma vizinhança de  $\alpha(t_1)$ , usando dois segmentos de reta com vértices em  $r(s^*)$ .



Como antes,

$$W(\alpha, P) = W(\alpha^*, P),$$

visto que  $\alpha$  e  $\alpha^*$  são homotópicas em  $\mathbb{R}^2 - \{P\}$ . Além disso, os números de interseção  $v(t_1)$  de  $\alpha$  e  $v^*(t_1)$  de  $\alpha^*$  são iguais, por construção. Portanto, se o teorema for válido para  $\alpha^*$ , também será verdadeiro para  $\alpha$ . Temos que o número de interseções múltiplas de  $\alpha^*$  é igual ao número de interseções múltiplas de  $\alpha$  menos uma unidade. Logo, repetindo esse processo, após um número finito de passos, obtemos uma curva possuindo apenas interseções simples com o raio  $r$  nos pontos  $t_1, \dots, t_k$  com o mesmo número de rotação e os mesmos números de interseções que a curva  $\alpha$ . Portanto é suficiente provar a fórmula do número de interseção no caso em que os  $s_i$ 's são distintos.

Reordenando, se necessário, podemos supor que

$$0 < s_1 < s_2 < \dots < s_k.$$

Note que os  $t_i$ 's não estão necessariamente ordenados. Escolha  $\sigma_i \in [0, \infty)$  de modo que

$$0 = \sigma_0 < s_1 < \sigma_1 < s_2 < \dots < \sigma_{k-1} < s_k < \sigma_k.$$

Seja  $P_i = r(\sigma_i)$ . Pela proposição anterior, para todo  $i = 1, \dots, k$ , temos

$$W(\alpha, P_{i-1}) - W(\alpha, P_i) = v(t_i).$$

Portanto

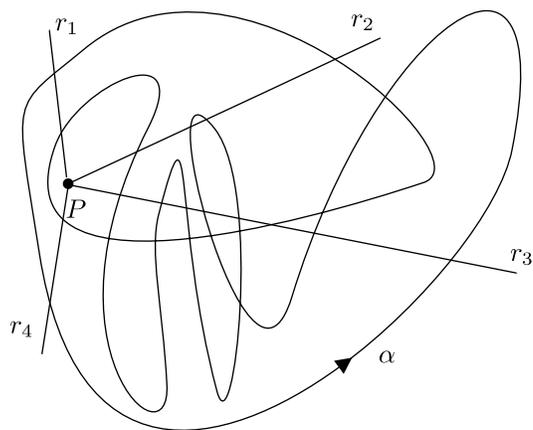
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k v(t_i) &= \sum_{i=1}^k [W(\alpha, P_{i-1}) - W(\alpha, P_i)] \\ &= W(\alpha, P_0) - W(\alpha, P_k). \end{aligned}$$

Visto que a curva  $\alpha$  não intersecta o raio  $r|_{[\sigma_k, \infty)}$ , temos que  $W(\alpha, P_k) = 0$ . Logo

$$W(\alpha, P) = W(\alpha, P_0) = \sum_{i=1}^k v(t_i),$$

o que conclui a prova do teorema. □

A fórmula do número de interseções tem uma bela e surpreendente consequência: o membro direito da equação (2.18) não depende da escolha do raio partindo do ponto  $P$ , apesar do número de pontos de interseção de  $\alpha$  com cada raio partindo de  $P$  poder variar consideravelmente, quando variamos a direção  $v_0$  de cada raio.



Suponha que a curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva fechada e de classe  $\mathcal{C}^1$ , e seja  $P$  um ponto fora do traço de  $\alpha$ . É possível mostrar, usando o Teorema de Sard, que, para cada vetor unitário  $v_0 \in \mathbb{R}^2$ , existe um vetor unitário  $v$ , suficientemente próximo de  $v_0$ , para o qual o raio  $r(s) = P + sv$  intersecta o traço de  $\alpha$  em apenas um número finito de pontos  $t_1, \dots, t_k$ . Nesse caso, usando a equação (2.12), a fórmula do número de interseção em relação ao raio  $r$  pode ser reescrita como

$$\sum_{i=1}^k v(t_i) = W(\alpha, P) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{\langle (\alpha(t) - P)^\perp, \alpha'(t) \rangle}{\|\alpha(t) - P\|^2} dt.$$

## 2.6 Aplicações

Vamos, nesta seção, dar algumas aplicações do conceito de número de rotação.

I - Funções contínuas do disco no plano.

O Teorema de Bolzano ou Teorema do Valor Intermediário para funções contínuas na reta diz, que se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua em  $[a, b]$ , com  $f(a)$  e  $f(b)$  de sinais opostos, então existe  $c \in [a, b]$ , tal que  $f(c) = 0$ . Em outras palavras, o Teorema de Bolzano garante que a equação

$$f(t) = 0$$

possui solução no intervalo  $[a, b]$ , sob certas condições na fronteira do domínio de  $f$ . Será que, em algum sentido, esse teorema pode ser generalizado para funções  $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ? Nossa primeira aplicação será uma tal generalização no caso de funções definidas num disco de  $\mathbb{R}^2$ .

Seja  $D_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| \leq r\}$  o disco de centro  $(0, 0)$  e raio  $r$ , e seja  $S_r = \partial D_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| = r\}$  sua fronteira. Considere a curva contínua  $\alpha_r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $\alpha_r(t) = (r \cos 2\pi t, r \sin 2\pi t)$ . Observe que a curva  $\alpha_r$  percorre  $S_r$  uma única vez no sentido anti-horário.

Considere agora uma função contínua  $F : D_r \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Gostaríamos de obter condições sobre o comportamento de  $F$  na fronteira de  $D_r$ , para que a equação

$$F(P) = (0, 0)$$

tenha solução em  $D_r$ . A função  $F$  está associada à curva  $\alpha_F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha_F(t) = F \circ \alpha_r(t)$ . A curva  $\alpha_F$  é uma curva fechada

e contínua e, na prática,  $\alpha_F$  é a restrição de  $F$  a  $S_r$ . Se  $(0, 0)$  está no traço de  $\alpha_F$ , é claro que a equação acima tem solução em  $D_r$ . Vamos supor então que  $(0, 0)$  não pertença ao traço de  $\alpha_F$ . Temos então o seguinte resultado, que generaliza o Teorema de Bolzano.

**Teorema 2.6** *Com a notação acima, se  $W(\alpha_F, (0, 0)) \neq 0$ , e existe  $(x_0, y_0) \in D_r$ , tal que*

$$F(x_0, y_0) = (0, 0).$$

**Prova.** Demonstraremos por contradição. Suponha que  $(0, 0) \notin F(D_r)$ . Então vamos construir uma homotopia  $H$  entre  $\alpha_F$  e a curva constante  $\beta$  dada por  $\beta(t) = F(0, 0)$ . Seja  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por

$$H(\zeta, t) = F(r\zeta \cos 2\pi t, r\zeta \sin 2\pi t).$$

É claro que

- 1)  $H$  é contínua;
- 2)  $H(1, t) = \alpha_F(t)$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ ;
- 3)  $H(0, t) = F(0, 0) = \beta(t)$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ ;
- 4)  $H(\zeta, 0) = F(r\zeta, 0) = H(\zeta, 1)$ .

Logo  $H$  é uma homotopia entre  $\alpha_F$  e  $\beta$  em  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ , visto que  $(0, 0) \notin F(D_r)$ . Temos também que estão bem definidos os números de rotação de  $\alpha_F$  e  $\beta$  em relação ao ponto  $(0, 0)$ . Portanto, como essas curvas são homotópicas, temos que

$$W(\alpha_F, (0, 0)) = W(\beta, (0, 0)).$$

Como  $\beta$  é uma curva constante,  $W(\beta, (0, 0)) = 0$  e, portanto,

$$W(\alpha_F, (0, 0)) = 0,$$

o que contradiz nossa hipótese. □

Como aplicação do teorema anterior, temos o seguinte resultado:

**Teorema 2.7** (*Teorema Fundamental da Álgebra*) *Todo polinômio de grau  $n \geq 1$  sobre o corpo de números complexos  $\mathbb{C}$  possui raiz em  $\mathbb{C}$ .*

**Prova.** Seja  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  um polinômio, dado por

$$F(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n, \quad n \geq 1.$$

Vamos considerar  $F|_{D_r}$ , a restrição de  $F$  ao disco  $D_r$ , onde  $r = 2 + \sum_{i=1}^n \|a_i\|$ . Seja  $\alpha_r$  dada por  $\alpha_r(t) = (r \cos(2\pi t), r \sin(2\pi t))$  uma parametrização do círculo de raio  $r$  centrado na origem. Mostraremos que a curva  $\alpha_F$ , dada por  $\alpha_F(t) = F \circ \alpha_r(t)$ , tem número de rotação não-nulo em relação ao ponto  $(0, 0)$ . Nesse caso, pelo teorema anterior, existe  $z_0 \in D_r$ , tal que  $F(z_0) = (0, 0)$  e, portanto, provamos o teorema. Para calcular o número de rotação de  $\alpha_F$  em relação a  $(0, 0)$ , vamos considerar a função auxiliar  $\zeta_n : D_r \rightarrow \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ , dada por  $\zeta_n(z) = z^n$ . Observe que  $\zeta_n \circ \alpha_r(t) = \zeta_n(r e^{2\pi i t}) = r^n e^{2\pi n i t}$ . Logo

$$W(\zeta_n \circ \alpha_r, (0, 0)) = n \quad (2.19)$$

Note agora que para todo  $t \in [0, 1]$ , se consideramos  $z = r e^{it}$ ,

$$\begin{aligned} \|\alpha_F(t) - \zeta_n \circ \alpha_r(t)\| &= \|F(r e^{it}) - \zeta_n(r e^{it})\| \\ &= \|a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n\| \\ &\leq \|a_1\| \|z^{n-1}\| + \dots + \|a_{n-1}\| \|z\| + \|a_n\| \\ &\leq \|a_1\| r^{n-1} + \dots + \|a_{n-1}\| r + \|a_n\| \\ &\leq r^{n-1} (\|a_1\| + \dots + \|a_{n-1}\| + \|a_n\|) \\ &< r^n = \|\zeta_n \circ \alpha_r(t)\|. \end{aligned}$$

Agora usando o Teorema de Rouché (Corolário 2.3), obtemos que

$$W(\alpha_F, (0, 0)) = W(\zeta_n \circ \alpha_r, (0, 0)) = n > 0.$$

Portanto a equação  $F(z) = (0, 0)$  possui raiz em  $D_r \subset \mathbb{C}$ .  $\square$

Para a próxima aplicação de Teorema 2.6, vamos introduzir a noção de função *ímpar* para funções definidas em subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $U \subset \mathbb{R}^n$  é *simétrico* em relação ao ponto  $(0, \dots, 0)$ , se e somente se para todo  $P \in U$ ,  $-P \in U$ .

**Definição 2.4** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto simétrico com relação a  $(0, \dots, 0)$ . Uma função contínua  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  é ímpar, se*

$$f(P) = -f(-P), \quad \forall P \in U.$$

Dada uma curva fechada  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , e dado  $P$  um ponto fora do traço de  $\alpha$ , podemos escolher um sistema de coordenadas de  $\mathbb{R}^2$  de modo que  $P = (0, 0)$  e  $\alpha(a) = (A, 0)$ ,  $A > 0$ . A curva  $\alpha$  está associada, de modo único, a uma aplicação contínua  $\bar{\alpha} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que

$$\alpha(t) = \bar{\alpha}(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), \quad t \in [0, 1].$$

**Definição 2.5** *Dizemos que  $\alpha$  é uma curva fechada e ímpar, se a curva  $\bar{\alpha}$  for ímpar.*

Para curvas fechadas e ímpares, temos o seguinte resultado:

**Lema 2.1** *Seja  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada e ímpar, com  $\alpha(t) \neq (0, 0)$ , para todo  $t \in [0, 1]$ . Então seu número de rotação em relação a  $(0, 0)$  é um número ímpar.*

**Prova.** Seja  $\varphi$  uma função angular para  $\alpha$  com  $\varphi(0) = 0$ . Por ser  $\alpha$  uma curva fechada e ímpar, temos que existe  $k \in \mathbb{Z}$ , tal que, para todo  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ ,

$$\varphi(t) = \varphi\left(t + \frac{1}{2}\right) - (2k + 1)\pi.$$

Logo

$$W(\alpha, (0, 0)) = \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{2\pi} = 2k + 1.$$

□

Considere a esfera unitária  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Observe que toda função contínua e ímpar  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  se anula em pelo menos um ponto de  $\mathbb{S}^2$ . De fato, como  $\mathbb{S}^2$  é conexo,  $f(\mathbb{S}^2)$  é um intervalo e, como  $f$  é ímpar, esse intervalo se reduz a  $\{0\}$  ou contém pontos positivos e negativos. Logo existe  $x_0 \in \mathbb{S}^2$ , tal que  $f(x_0) = 0$ . O próximo resultado é uma generalização desse fato.

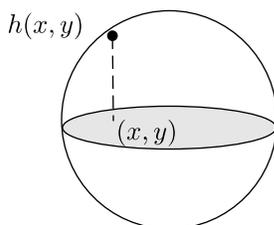
**Teorema 2.8** (Teorema de Borsuk) *Sejam  $F, G : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções contínuas e ímpares definidas na esfera unitária  $\mathbb{S}^2$ . Então existe  $P_0 \in \mathbb{S}^2$ , tal que*

$$F(P_0) = G(P_0) = 0.$$

**Prova.** Seja  $h : D_1 \rightarrow \mathbb{S}^2$ , dada por

$$h(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}).$$

A função  $h$  é um homeomorfismo de  $D_1$  sobre a semi-esfera  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \mid z \geq 0\}$ .



Defina  $f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  por

$$f(x, y) = (F(h(x, y)), G(h(x, y))).$$

Se  $(0, 0) \in f(D_1)$ , nada há que se mostrar. Vamos supor que  $(0, 0) \notin f(D_1)$ . Nesse caso, está bem definido o número de rotação da curva  $\alpha(t) = f \circ \alpha_1(t)$  em relação a  $(0, 0)$ , onde  $\alpha_1(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Como ambas as funções  $F$  e  $G$  são ímpares, a curva fechada  $\alpha$  é ímpar e, pelo Lema 2.1,  $W(\alpha, (0, 0))$  é ímpar. Portanto

$$W(\alpha, (0, 0)) \neq 0.$$

O Teorema 2.6 implica que existe  $q_0 \in D_1$ , tal que  $f(q_0) = (0, 0)$ . Agora, usando a definição de  $f$ , temos que  $F(h(q_0)) = 0 = G(h(q_0))$ , o que conclui a prova.  $\square$

**Corolário 2.4** *Não existe uma função contínua e injetiva definida na esfera  $\mathbb{S}^2$  e tomando valores em  $\mathbb{R}^2$ .*

**Prova.** Suponha que  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  seja uma função contínua em  $\mathbb{S}^2$ . Vamos provar que existe  $P \in \mathbb{S}^2$ , tal que  $f(P) = f(-P)$  e, portanto,  $f$  não é injetiva. Suponha que  $f(q) = (f_1(q), f_2(q))$ ,  $q \in \mathbb{S}^2$ . Nesse caso, as funções  $f_1, f_2 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas em  $\mathbb{S}^2$ . Considere as funções  $F_1, F_2 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas por

$$F_1(q) = f_1(q) - f_1(-q),$$

$$F_2(q) = f_2(q) - f_2(-q).$$

Sendo essas funções contínuas e ímpares, temos, pelo Teorema de Borsuk, que existe  $P \in \mathbb{S}^2$ , tal que  $F_1(P) = F_2(P) = (0, 0)$ . Logo, para esse  $P$ ,  $f(P) = (f_1(P), f_2(P)) = (f_1(-P), f_2(-P)) = f(-P)$ .  $\square$

## II - Teorema de Brower.

Sejam  $V$  e  $W$  dois espaços vetoriais de dimensão  $n$  e  $m$ , respectivamente. Um resultado bem conhecido da Álgebra Linear diz que  $V$  e  $W$  são isomorfos, se e somente se  $m = n$ . Esse fato é conhecido como *invariância algébrica da dimensão*. O equivalente topológico desse resultado é o Teorema de Brower.

**Teorema 2.9** (*Teorema de Brower*) *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e  $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$  dois conjuntos abertos e não-vazios. Se existe um homeomorfismo  $h : \Omega \rightarrow \Gamma$ , então  $n = m$ .*

Vamos demonstrar o resultado acima nos casos  $m = 1$  e  $m = 2$ , esse último, como aplicação da teoria do número de rotação de uma curva fechada.

**Prova do caso  $m = 1$ .** Seja  $P \in \Omega$ . Como  $\Omega$  é aberto em  $\mathbb{R}^n$ , existe  $r > 0$ , tal que a bola de centro  $P$  e raio  $r$ ,  $B_r(P)$ , está contida em  $\Omega$ . Como  $B_r(P)$  é conexo e  $h$ , homeomorfismo,  $h(B_r(P))$  é um conexo aberto de  $\mathbb{R}$ , e, portanto, um intervalo aberto, digamos  $(a, b)$ . Seja  $c \in (a, b)$ , e seja  $Q \in B_r(P)$ , tal que  $h(Q) = c$ . Portanto temos que  $(a, b) - \{c\}$  é um conjunto desconexo de  $\Gamma$  e, novamente, por  $h$  ser um homeomorfismo, temos que  $B_r(P) - \{Q\}$  é desconexo, o que apenas é possível quando  $n = 1$ .

□

**Prova do caso  $m = 2$ .** Pelo caso anterior, podemos supor que  $n \geq 2$ . Seja  $P \in \Omega$ , e seja  $r > 0$ , tal que o fecho da bola de centro  $P$  e raio  $r$ ,  $\overline{B_r(P)}$ , esteja contido em  $\Omega$ . Logo temos que a fronteira de  $\overline{B_r(P)}$ ,  $\partial B_r(P)$ , é uma esfera de dimensão  $n - 1$  em  $\mathbb{R}^n$ . Observe que a restrição de  $h$  a esta esfera é ainda uma aplicação

injetiva. Se  $n - 1 \geq 2$ , temos que  $\overline{\partial B_r(P)}$  contém uma esfera  $\Sigma$  bidimensional. Portanto a restrição de  $h$  a  $\Sigma$  é uma aplicação injetiva e contínua de  $\Sigma$  para  $\mathbb{R}^2$ , o que contradiz o Corolário 2.4.  $\square$

### III - Funções Holomorfas $\times$ Número de Rotação

O plano  $\mathbb{R}^2$  pode ser identificado de modo natural com o corpo de números complexos  $\mathbb{C}$  pela aplicação

$$(x, y) \longmapsto x + iy.$$

Seja  $\Omega \subset \mathbb{C}$  um conjunto aberto e não-vazio de  $\mathbb{C}$ . Uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  é *diferenciável* em  $z_0 \in \Omega$  no sentido complexo, se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Nesse caso, tal limite será chamado de derivada de  $f$  no ponto  $z_0$  e denotado por  $f'(z_0)$ . Se  $f'(z_0)$  existe para todo ponto  $z_0 \in \Omega$ , dizemos que  $f$  é *holomorfa* em  $\Omega$ .

Vamos obter um modo de calcular o número de rotação de uma curva fechada e de classe  $\mathcal{C}^1$ , usando integração complexa. Para isso, vamos lembrar que, se  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função contínua e  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é uma curva de classe  $\mathcal{C}^1$ , a integral de  $f$ , ao longo de  $\alpha$ , é dada por

$$\int_{\alpha} f(z) dz = \int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t) dt.$$

**Lema 2.2** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  uma curva fechada e de classe  $\mathcal{C}^1$ . Se  $z_0$  não pertence ao traço de  $\alpha$ , então o número de rotação de  $\alpha$  em relação a  $z_0$  é dado por*

$$W(\alpha, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{1}{z - z_0} dz.$$

**Prova.** Seja  $\varphi$  uma função angular para a curva  $\alpha$  em relação ao ponto  $z_0$ . Nesse caso, a curva  $\alpha$  é dada por

$$\alpha(t) = z_0 + \|\alpha(t) - z_0\|(\cos \varphi(t) + i \operatorname{sen} \varphi(t)).$$

Temos então que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{1}{z - z_0} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \left\{ \frac{\|\alpha(t) - z_0\|'}{\|\alpha(t) - z_0\|} + i\varphi'(t) \right\} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} [\varphi(b) - \varphi(a)]i = W(\alpha, z_0). \end{aligned}$$

□

Vamos considerar agora  $\Omega$  um conjunto aberto e convexo de  $\mathbb{C}$ . Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  uma função diferenciável em  $\Omega$ , e seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \Omega$  uma curva fechada, diferenciável e simples. A Fórmula Integral de Cauchy é um resultado bastante conhecido de funções complexas que permite calcular  $f(z)$ , em pontos do interior da região limitada pelo traço de  $\alpha$ , usando integração ao longo de  $\alpha$ .

**Teorema 2.10** (*Fórmula Integral de Cauchy*) *Se  $z_0$  está no interior da região limitada pelo traço de  $\alpha$ , então*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Usando as técnicas desenvolvidas no estudo de número de rotação de curvas fechadas, podemos flexibilizar a hipótese em que  $\alpha$  é uma curva simples e provar o seguinte resultado:

**Teorema 2.11** *Seja  $\Omega$  um conjunto aberto e convexo de  $\mathbb{C}$ . Considere uma função holomorfa  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  uma*

curva fechada e diferenciável, cujo traço está contido em  $\Omega$ . Seja  $z_0$  um ponto de  $\Omega$  que não pertence ao traço de  $\alpha$ . Então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0)W(\alpha, z_0).$$

**Prova.** Considere a função  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$h(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, & \text{se } z \neq z_0, \\ f'(z_0), & \text{se } z = z_0. \end{cases}$$

Logo  $h$  é contínua em  $\Omega$  e holomorfa em  $\Omega - \{z_0\}$ . Além disso, usando a regra de L'Hôpital, obtemos

$$\begin{aligned} h'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{(z - z_0)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z) - f'(z_0)}{2(z - z_0)} = \frac{1}{2} f''(z_0), \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, usamos que se  $f$  é holomorfa, então  $f'$  é holomorfa (ver [Rd], p.224). Agora, nas condições acima, é bem conhecido (ver [Rd], p.223, 10.14), que  $h$  admite uma primitiva  $H : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , isto é, a função  $H$  é tal que  $H'(z) = h(z)$ . Integrando a função  $H'$  ao longo de  $\alpha$  e usando o Lema 2.2, obtemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\alpha} H'(z) dz = \int_{\alpha} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \\ &= \int_{\alpha} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \int_{\alpha} \frac{1}{z - z_0} dz \\ &= \int_{\alpha} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0)W(\alpha, z_0), \end{aligned}$$

o que conclui a prova. □

Suponha que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função holomorfa em  $\Omega$  com apenas um número finito de zeros. O próximo resultado vai relacionar o número de zeros de  $f$  com o número de rotação de uma curva na imagem de  $f$ .

**Teorema 2.12** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{C}$  um conjunto não-vazio, aberto e conexo em  $\mathbb{C}$ , e seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \Omega$  uma curva fechada e diferenciável, tal que  $W(\alpha, P) = 0$  para todo ponto não pertencente ao conjunto  $\Omega$ . Além disso, suponhamos que  $W(\alpha, P) = 0$  ou  $W(\alpha, P) = 1$ , qualquer que seja  $P \in \Omega - \{\text{traço de } \alpha\}$ , e denotemos por  $\Omega_1$  o conjunto de  $Q \in \Omega$  com  $W(\alpha, Q) = 1$ .*

*Sejam  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  uma função holomorfa em  $\Omega$  e  $N_f$  o número de zeros de  $f$  em  $\Omega_1$ , contados com suas multiplicidades. Então, se  $f$  não possui zeros sobre o traço de  $\alpha$ ,*

$$N_f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = W(\Gamma, (0, 0)),$$

onde  $\Gamma = f \circ \alpha$ .

**Prova.** Ver [Rd], p 242.

Usando o resultado acima e o Corolário 2.3, temos o seguinte resultado.

**Corolário 2.5** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{C}$  um conjunto não-vazio, aberto e conexo em  $\mathbb{C}$ , e seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \Omega$  uma curva fechada e diferenciável, tal que  $W(\alpha, P) = 0$  para todo ponto não pertencente ao conjunto  $\Omega$ . Além disso, suponhamos que  $W(\alpha, P) = 0$  ou  $W(\alpha, P) = 1$ , qualquer que seja  $P \in \Omega - \{\text{traço de } \alpha\}$ , e denotemos por  $\Omega_1$  o conjunto de  $Q \in \Omega$  com  $W(\alpha, Q) = 1$ .*

*Sejam  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  funções holomorfas em  $\Omega$  e  $N_f, N_g$  os números de zeros em  $\Omega_1$  de  $f$  e  $g$ , respectivamente, contados com suas multiplicidades. Se*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|, \quad \text{para todo } z \in \text{traço de } \alpha,$$

então

$$N_f = N_g.$$

**Prova.** Observe que pelo Teorema 2.12, temos que

$$N_f = W(\Gamma, (0, 0)),$$

e

$$N_g = W(\Gamma_1, (0, 0)),$$

onde  $\Gamma = f \circ \alpha$  e  $\Gamma_1 = g \circ \alpha$ . As hipóteses sobre  $f$  e  $g$  implicam que

$$\|\Gamma(t) - \Gamma_1(t)\| < \|\Gamma(t)\|,$$

para todo  $t \in [a, b]$ . Logo, pelo Corolário 2.3,

$$W(\Gamma, (0, 0)) = W(\Gamma_1, (0, 0)),$$

o que conclui a prova. □

## 2.7 Exercícios

1. Quais dos conjuntos abaixo são conexos? Descreva as componentes conexas em cada caso.

$$(i) \mathbb{R}^2; \quad (ii) \{P \mid \|P\| \leq 1\}; \quad (iii) \{P \mid \|P\| \geq 1\};$$

$$(iv) \{P \mid \|P\| \neq 1\} \quad (v) \{P = (P_1, P_2) \mid P_1 \cdot P_2 \geq 0\};$$

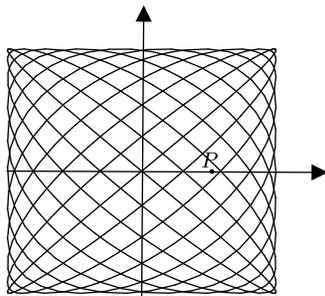
2. Considere a curva de *Lissajous*  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por  $\alpha(t) = (\sin 3t, \sin 4t)$ . Quantas componente conexas possui o complementar do traço de  $\alpha$ ,  $\mathbb{C}^\alpha$ ?

3. Mostre que a curva  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t = 0, \\ (t, t \operatorname{sen} \frac{\pi}{t}), & \text{se } 0 < t \leq \frac{1}{2}, \\ (1-t, 0), & \text{se } \frac{1}{2} < t \leq 1, \end{cases}$$

é uma curva fechada e contínua e, além disso,  $\mathcal{C}^\alpha$  possui infinitas componentes conexas.

4. Seja  $\alpha$  uma curva fechada e contínua em  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $P$  um ponto fora do traço de  $\alpha$ , tal que  $W(\alpha, P) \neq 0$ . Mostre que a componente conexa de  $\mathcal{C}^\alpha$ , que contém o ponto  $P$ , é limitada.
5. Seja  $\alpha$  uma curva fechada e contínua em  $\mathbb{R}^2$ . Mostre que  $\mathcal{C}^\alpha$  possui apenas uma componente conexa ilimitada.
6. Considere a curva de *Lissajous*  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $\alpha(t) = (\operatorname{sen} mt, \operatorname{sen} nt)$ . Mostre que para  $m = 10$  e  $n = 11$ , o ponto  $P = (\frac{1}{2}, 0)$  não pertence ao traço de  $\alpha$  e calcule o número de rotação  $W(\alpha, P)$ .



7. Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada e contínua, e seja  $P$  um ponto fora de traço de  $\alpha$ . Suponha que  $W(\alpha, P) = 0$ .

Se  $r$  é um raio com origem  $P$  que intersecta o traço de  $\alpha$  exatamente  $k$  vezes, com todas as interseções transversais, então  $k$  é um número inteiro par.

8. Sejam  $q_0, q_1, \dots, q_k = q_0$  ( $k + 1$ ) pontos de  $\mathbb{R}^2$ . Para cada  $i = 1, \dots, k-1$ , ligue cada ponto  $q_i$  ao ponto  $q_{i+1}$  por um segmento de reta, obtendo assim um polígono  $\mathcal{P}$ . O polígono  $\mathcal{P}$  pode ser parametrizado pela curva  $\alpha_{\mathcal{P}} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\alpha_{\mathcal{P}}(t) = q_i + (kt - i)(q_{i+1} - q_i), \quad \text{se } \frac{i}{k} \leq t \leq \frac{i+1}{k},$$

para cada  $i = 0, 1, \dots, k-1$ . Para cada  $P \notin \mathcal{P}$ , mostre que

$$W(\alpha_{\mathcal{P}}, P) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{k-1} \mathfrak{A}(q_i - P, q_{i+1} - P).$$

Conclua que o número de rotação de uma curva fechada e contínua  $\alpha$  pode ser calculado usando um polígono  $\mathcal{P}$  inscrito no traço de  $\alpha$ , para uma escolha conveniente dos vértices de  $\mathcal{P}$ .

## Capítulo 3

# Curvas Fechadas - Índice de Rotação

Neste capítulo vamos estudar o comportamento do campo tangente à curva regular e fechada. Para isso, vamos deixar mais claro o tipo de curvas em que esse estudo faz sentido. Uma curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva fechada, se  $\alpha(a) = \alpha(b)$ . Uma curva fechada  $\alpha$  é diferenciável, se existe um  $\varepsilon > 0$  e uma curva diferenciável  $\tilde{\alpha} : (a-\varepsilon, b+\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que  $\alpha(t) = \tilde{\alpha}(t)$  para todo  $t \in [a, b]$  e  $\tilde{\alpha}'(a)$  e  $\tilde{\alpha}'(b)$  são vetores não-nulos com mesma direção e sentido. Uma curva fechada e diferenciável  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é de classe  $\mathcal{C}^n$ , se  $\alpha(a) = \alpha(b)$ ,  $\frac{d^k \alpha}{dt^k}(a) = \frac{d^k \alpha}{dt^k}(b)$  para todo  $k = 1, \dots, n$  e  $\frac{d^n \alpha}{dt^n}(t)$  é um campo contínuo ao longo de  $\alpha$ . Desse modo, podemos falar em curvas fechadas e regulares, isto é, uma curva fechada e diferenciável tal que seu vetor tangente é não-nulo para todo  $t \in [a, b]$ . Uma curva fechada  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita simples, se, restrita ao intervalo  $(a, b]$ , ela for uma aplicação injetiva.

Se  $\alpha$  é uma curva fechada e regular de classe  $\mathcal{C}^1$ , podemos considerar a curva  $\alpha' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Essa curva é fechada, contínua

e, por  $\alpha$  ser regular,  $(0, 0)$  não está no traço de  $\alpha'$ . Então temos que o número de rotação de  $\alpha'$  em relação ao ponto  $(0, 0)$  está bem definido.

**Definição 3.1** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada e regular e de classe  $\mathcal{C}^2$ . O índice de rotação de  $\alpha$ ,  $R_\alpha$ , é definido por*

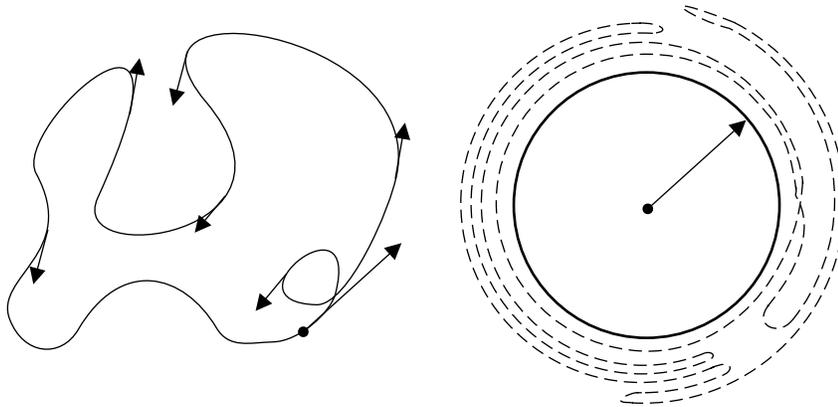
$$R_\alpha = W(\alpha', (0, 0)).$$

Observe que, a priori,  $R_\alpha$  não tem nenhuma relação com os números de rotação de  $\alpha$  em relação a pontos fora de seu traço. O índice de rotação mede o número de voltas (orientadas) que o vetor tangente de  $\alpha$  dá em torno da origem, quando percorremos o traço de  $\alpha$ .

Se  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva regular, podemos definir a indicatriz tangente  $T : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ , dada por  $T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$  e a indicatriz normal  $N : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ , dada por  $N(t) = T^\perp(t)$ . É claro que se  $\alpha$  é uma curva fechada e de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $T$  e  $N$  são curvas fechadas e contínuas em  $[a, b]$  e assumem valores no círculo unitário  $\mathbb{S}^1$ . Como consequência da definição dessas curvas, temos que  $\alpha'$ ,  $T$  e  $N$  possuem a mesma função angular  $\varphi(t)$  em relação a origem, com  $\varphi(a) = 0$ . Portanto

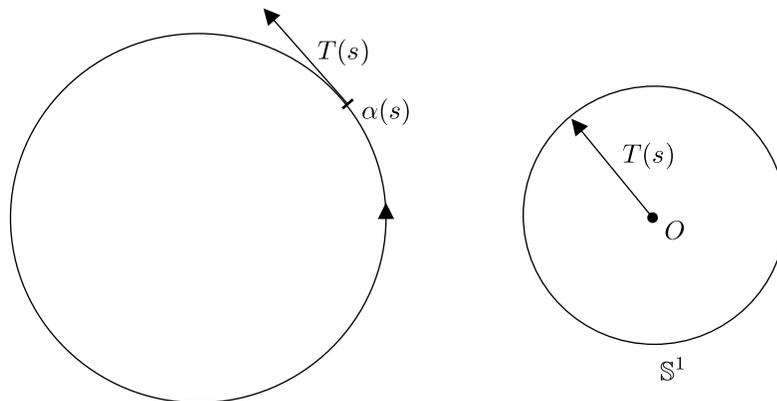
$$R_\alpha = W(\alpha', (0, 0)) = W(T, (0, 0)) = W(N, (0, 0)) = \frac{1}{2\pi}\varphi(b).$$

A idéia de associar uma curva regular  $\alpha$  ao movimento circular do vetor tangente unitário  $T$  ou, equivalentemente, do vetor unitário normal  $N$  é devido a C.F. Gauss, no início da Geometria Diferencial, e essa idéia tem um papel fundamental na teoria das curvas planas diferenciáveis. Observe que  $T$  e  $N$  diferem apenas por uma rotação constante de um ângulo  $\frac{\pi}{2}$  ao redor da origem.  $T$  e/ou  $N$  são freqüentemente chamadas de *imagem tangente (de Gauss)* e/ou *imagem normal (de Gauss)* de  $\alpha$  no círculo  $\mathbb{S}^1$ .



**Exemplo 3.1** Seja  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva, dada por  $\alpha(t) = (R \cos nt, R \sin nt)$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq 0$ . A curva  $\alpha$  parametriza o círculo de raio  $R$  que dá  $|n|$  voltas em torno da origem, no sentido anti-horário, se  $n > 0$  e, no sentido horário, se  $n < 0$ . Um cálculo simples mostra que

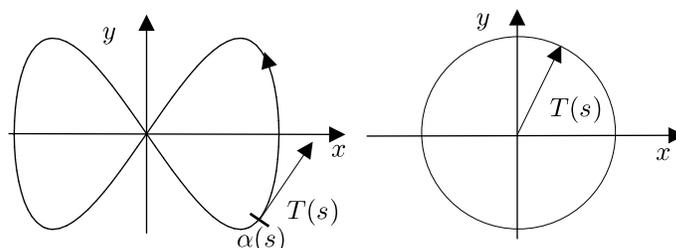
$$R_\alpha = n.$$



A curva  $\alpha$  descreve o círculo que dá  $n$  voltas em torno do seu centro e seu índice de rotação é igual a  $n$ .

**Exemplo 3.2** Considere a lemniscata, dada pelo traço da curva  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por  $\alpha(t) = (\cos t, \cos 2t)$ . A curva  $\alpha$  é uma curva regular, fechada e

$$R_\alpha = 0.$$



A lemniscata possui índice de rotação igual a zero.

Os dois exemplos acima nos mostram que qualquer  $n \in \mathbb{Z}$  pode ser índice de rotação de uma curva regular e fechada.

O índice de rotação de uma curva fechada e regular  $\alpha$  é invariante por reparametrizações próprias de  $\alpha$  e também se considerarmos outro ponto inicial/final para  $\alpha$ . Porém, se considerarmos  $\alpha^-$  a curva obtida percorrendo  $\alpha$  na orientação oposta, temos que  $R_{\alpha^-} = -R_\alpha$ .

Para entendermos o comportamento de  $R_\alpha$ , quando *deformamos*  $\alpha$ , vamos introduzir o conceito de *homotopia regular*:

**Definição 3.2** Duas curvas fechadas e regulares  $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  são ditas *regularmente homotópicas*, se existe uma aplicação  $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que

1.  $H(\zeta, t)$  é contínua em  $[0, 1] \times [a, b]$ ;  $H$  é de classe  $C^1$  em relação a variável  $t$ , isto é,  $\frac{\partial H}{\partial t}$  é uma função contínua;
2. Para cada  $\zeta \in [0, 1]$ , a curva  $\alpha_\zeta(t) = H(\zeta, t)$ ,  $t \in [a, b]$  é uma curva fechada regular;

3.  $H(0, t) = \alpha(t)$  e  $H(1, t) = \beta(t)$ .

A aplicação  $H$  é dita uma homotopia regular entre  $\alpha$  e  $\beta$ .

Para curvas regularmente homotópicas, temos o seguinte resultado:

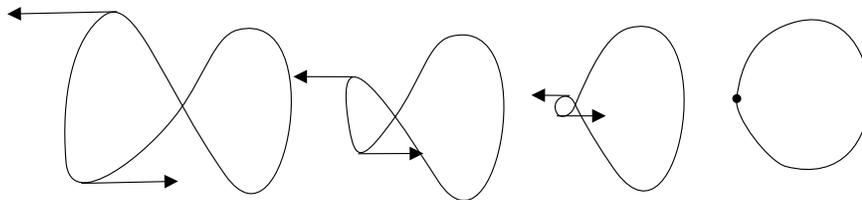
**Proposição 3.1** *Sejam  $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  duas curvas fechadas e regulares. Se  $\alpha$  é regularmente homotópica a  $\beta$ , então*

$$R_\alpha = R_\beta.$$

**Prova.** Basta observar que, se  $H(\zeta, t)$  é uma homotopia regular entre  $\alpha$  e  $\beta$ , então  $\frac{\partial H}{\partial t}(\zeta, t)$  é uma homotopia entre  $\alpha'$  e  $\beta'$  e, portanto,

$$R_\alpha = W(\alpha', (0, 0)) = W(\beta', (0, 0)) = R_\beta. \quad \square$$

Tendo em vista o resultado acima, temos que não é possível construir uma homotopia regular entre a lemniscata, dada por  $\alpha(t) = (\cos t, \sin 2t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , e o círculo unitário  $\beta(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Note que, como  $\mathbb{R}^2$  é convexo, essas curvas são homotópicas (como curvas contínuas) em  $\mathbb{R}^2$ . Vale observar que estamos pedindo regularidade em cada estágio da deformação que leva  $\alpha$  em  $\beta$ .



Não é possível eliminar o laço a esquerda da curva acima, usando a seqüência de deformações, uma vez que o vetor tangente ao

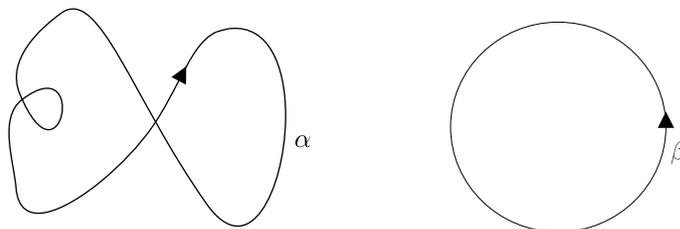
longo desse laço muda muito de direção, independente do tamanho do laço. A continuidade de  $\alpha'_\zeta$  implica que esse vetor deve anular-se no limite final.

Por outro lado, temos o seguinte teorema devido a Whitney e Graustein (veja [MR], Teorema 9.9 p.397) que nos dá a recíproca da proposição anterior.

**Teorema 3.1** *Duas curvas fechadas e regulares  $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  são regularmente homotópicas, se e somente se*

$$R_\alpha = R_\beta.$$

**Exemplo 3.3** *Seja  $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  um círculo que dá uma volta no sentido anti-horário em torno de seu centro, e seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  a curva que percorre uma vez a lemniscata com um laço, ver figura abaixo, na orientação indicada.*



*Temos que*

$$R_\alpha = R_\beta = 1.$$

*Logo, pelo Teorema de Whitney-Graustein,  $\alpha$  e  $\beta$  são regularmente homotópicas. Você consegue imaginar uma homotopia regular que leve  $\alpha$  em  $\beta$ ?*

### 3.1 Curvatura Total

Vamos supor agora que  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva fechada, regular e de classe  $\mathcal{C}^2$ . Nesse caso, os campos vetoriais  $\alpha'$ ,  $T$  e

$N$  são campos de classe  $\mathcal{C}^1$  ao longo de  $\alpha$ . Pelas Equações de Frenet, o vetor tangente da curva  $T$  é dado por

$$T'(t) = k(t)\|\alpha'(t)\|N(t),$$

onde  $k(t)$  é a curvatura de  $\alpha$  em  $t$ . Portanto a velocidade da curva  $T(t)$  é  $|k(t)| \|\alpha'(t)\|$ , ou simplesmente  $|k(t)|$ , se  $\alpha$  estiver parametrizada pelo comprimento de arco. Decorre da expressão acima que  $T$  percorre o círculo unitário no sentido anti-horário, se  $k(t) > 0$  e no sentido horário, se  $k(t) < 0$ .

Seja  $\varphi$  a função angular para a curva  $T$  em relação à origem  $(0, 0)$ , que satisfaz  $\varphi(a) = 0$ . Pela equação (2.9), temos que

$$\varphi(t) = \int_a^t \langle T^\perp, T' \rangle(\varepsilon) d\varepsilon = \int_a^t k(\varepsilon)\|\alpha'(\varepsilon)\| d\varepsilon.$$

Portanto

$$\varphi'(t) = k(t)\|\alpha'(t)\|. \quad (3.1)$$

No caso em que  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco, temos que a curvatura de  $\alpha$  é exatamente a taxa de variação do ângulo orientado, determinado pelos vetores tangente à curva  $\alpha$  e o vetor  $T(a)$ . Observe que o vetor  $T(a)$  pode ser substituído por qualquer outro vetor fixo, sem alterar o valor de  $\varphi$ .

**Definição 3.3** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva de classe  $\mathcal{C}^2$ . A curvatura total  $CT(\alpha)$  da curva  $\alpha$  é dada por*

$$CT(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b k(\varepsilon)\|\alpha'(\varepsilon)\| d\varepsilon.$$

Observe que o teorema de mudança de variáveis para integrais implica que  $CT(\alpha)$  é invariante por reparametrizações próprias de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $\alpha$ . A curvatura total representa, geometricamente, a menos de um fator constante, o “comprimento algébrico”

co" da imagem de  $T$  sobre o círculo unitário, isto é, os arcos que  $T$  percorre no sentido anti-horário são considerados com comprimento positivo, enquanto aqueles que  $T$  percorre no sentido horário são considerados com comprimento negativo. Em particular, temos que

$$CT(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b k(\varepsilon) \|\alpha'(\varepsilon)\| d\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \mathfrak{A}(T(a), T(b)).$$

No caso em que  $\alpha$  é uma curva fechada, regular e de classe  $\mathcal{C}^1$ , sua indicatriz tangente  $T$  é uma curva fechada, portanto o índice de rotação de  $\alpha$  é dado por

$$R_\alpha = W(T, (0, 0)) = \frac{1}{2\pi} \varphi(b) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b k(\varepsilon) \|\alpha'(\varepsilon)\| d\varepsilon = CT(\alpha).$$

Como consequência, chegamos a um resultado surpreendente: a curvatura total de uma curva fechada é sempre um número inteiro. Mesmo para curvas simples, tal resultado não é óbvio.

**Teorema 3.2** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada, regular e de classe  $\mathcal{C}^2$ . Então sua curvatura total  $CT(\alpha)$  é dada por*

$$CT(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b k(\varepsilon) \|\alpha'(\varepsilon)\| d\varepsilon = R_\alpha,$$

onde  $R_\alpha$  é o índice de rotação de  $\alpha$ . Em particular,  $CT(\alpha)$  é sempre igual a um número inteiro.

**Exemplo 3.4** *Considere a elipse  $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Temos que  $R_\alpha = 1$ , o que implica então que  $CT(\alpha) = 1$ . Calculando diretamente a curvatura total de  $\alpha$ , obtemos que*

$$k(t) \|\alpha'(t)\| = \frac{ab}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t},$$

e, portanto,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ab}{a^2 \sin^2 \varepsilon + b^2 \cos^2 \varepsilon} d\varepsilon = CT(\alpha) = 1.$$

O resultado não é de modo algum óbvio (tente calcular analiticamente. É possível!!!).

Visto que o índice de rotação de uma curva é invariante por homotopias regulares, a sua curvatura total também é invariante por homotopias regulares. Vamos usar a fórmula do número de interseções para calcular  $W(T, (0, 0))$  e, portanto, a curvatura total de  $\alpha$ . Seja  $v_0$  um vetor unitário fixado e considere o raio  $r_{v_0}$  com origem em  $(0, 0)$  e na direção de  $v_0$  parametrizado por  $r_{v_0}(s) = v_0 s$ ,  $s \in [0, \infty)$ . Como  $T(t)$  está sobre o círculo unitário, o raio  $r_{v_0}$  irá intersectar o traço de  $T$  no máximo quando  $s = 1$ . Essa interseção, em geral, se dá em um ponto múltiplo. Para obtenção de todas essas interseções, devemos saber para quais valores do parâmetro  $t$  temos que

$$T(t) = v_0.$$

Suponha que, apenas para um número finito de valores  $t_1, \dots, t_k$ , a equação acima seja satisfeita. Observe que a condição para que cada interseção seja transversal é dada por

$$0 \neq \langle T'(t_i), v_0^\perp \rangle = \langle k(t_i) \|\alpha'(t_i)\| N(t_i), N(t_i) \rangle = k(t_i) \|\alpha'(t_i)\|,$$

para todo  $i = 1, \dots, k$ , isto é, se  $k(t_i) \neq 0$ , para todo  $i = 1, \dots, k$ , o número de interseções em cada  $t_i$  é

$$v(t_i) = \text{sinal} \langle T'(t_i), v_0^\perp \rangle = \text{sinal} k(t_i).$$

Portanto, nesse caso, verifica-se a seguinte relação:

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^b k(\varepsilon) \|\alpha'(\varepsilon)\| d\varepsilon = R_\alpha = W(T, (0, 0)) = \sum_{i=1}^k \text{sinal} k(t_i).$$

Novamente, é surpreendente que o último membro da equação anterior não dependa da escolha particular do vetor  $v_0$  nas condições acima.

## 3.2 Índice de Rotação de Curvas Fechadas Simples

O índice de rotação  $R_\alpha$  de uma curva regular fechada  $\alpha$  é, por definição, o número de rotação da curva  $\alpha'$ . Portanto o índice de rotação fornece uma informação sobre o comportamento global de  $\alpha'$ , que, a princípio, não tem por que ser parecido com o comportamento global de  $\alpha$ . Por outro lado,  $\alpha'$  determina, a menos de uma translação, a curva original  $\alpha$  e reciprocamente. Logo não seria de todo surpreendente que o índice de rotação  $R_\alpha$  nos desse alguma informação sobre a geometria de  $\alpha$ . Vamos discutir um importante resultado nessa direção. Para curvas fechadas, regulares e simples, temos o seguinte resultado:

**Teorema 3.3** (*Teorema da Rotação das Tangentes*) *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular, fechada, simples e de classe  $\mathcal{C}^1$ . Então*

$$R_\alpha = \pm 1.$$

*Além disso, se  $\alpha$  é de classe  $\mathcal{C}^2$ , então sua curvatura total  $CT(\alpha)$  satisfaz*

$$CT(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b k(\varepsilon) \|\alpha'(\varepsilon)\| d\varepsilon = \pm 1.$$

Decorre diretamente desse resultado a seguinte consequência:

**Corolário 3.1** *Toda curva  $\alpha$  fechada, regular e de classe  $\mathcal{C}^1$  com  $R_\alpha = 0$  ou  $|R_\alpha| \geq 2$  possui auto-interseção. Se  $\alpha$  é uma curva*

fechada e de classe  $\mathcal{C}^2$ , com curvatura total satisfazendo  $CT(\alpha) = 0$  ou  $|CT(\alpha)| \geq 2$ , então  $\alpha$  possui pontos de auto-interseção.

Observe que a recíproca desse resultado não é verdadeira, isto é, não é verdade, em geral, que se o índice de rotação de uma curva for igual a  $\pm 1$ , a curva seja simples. Como exemplo, considere a lemniscata com laço (veja exemplo 3.3). Ela tem índice de rotação igual a um e não é simples.

**Prova do Teorema.** Vamos apresentar a prova devida a H. Hopf, 1935. Suponha que  $\alpha$  esteja parametrizada pelo comprimento de arco e que seja dada por  $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ . Visto que o índice de rotação independe da escolha do ponto inicial/final, podemos supor que  $v(0)$  é o mínimo absoluto da função  $v$ . Após uma translação, podemos supor ainda que  $\alpha(0) = \alpha(L) = 0$ . Em particular,  $v(t) \geq 0$  e, portanto, o traço de  $\alpha$  fica inteiramente contido no semi-plano  $\{(x, y) \mid y \geq 0\}$ . Nesse caso, a reta  $y = 0$  é a reta tangente à curva  $\alpha$  em  $\alpha(0) = \alpha(L)$ . Logo

$$\alpha'(0) = T(0) = \pm(1, 0).$$

**Afirmção.**  $R_\alpha = 1$ , se  $T(0) = (1, 0)$  e  $R_\alpha = -1$ , se  $T(0) = (-1, 0)$ .

De fato, vamos provar apenas o primeiro caso, pois o segundo decorre dele, considerando a curva  $\alpha^-$ , isto é, a curva  $\alpha$  com orientação oposta a de  $\alpha$ . Vamos, portanto, supor que  $\alpha'(0) = (1, 0)$ . A idéia da prova agora é deformar continuamente a curva  $T$ , que, a priori, é complicada, até uma curva  $T_1$ , cujo número de rotação  $W(T_1, (0, 0))$  seja fácil de determinar. Considere o triângulo  $\Delta = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq s \leq t \leq L\}$ . Como a curva  $\alpha$  é simples, temos  $\alpha(t) \neq \alpha(s)$ , para todo ponto de  $\Delta$ , exceto para os pontos da hipotenusa de  $\Delta$ , ou seja, para pontos da forma

$(t, t)$  e para o vértice  $(L, 0)$ . Considere a função  $F : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$F(t, s) = \begin{cases} \frac{\alpha(t) - \alpha(s)}{\|\alpha(t) - \alpha(s)\|}, & \text{se } s < t \text{ e } (t, s) \neq (L, 0), \\ T(t), & \text{se } s = t, \\ -T(0), & \text{se } (t, s) = (L, 0). \end{cases}$$

Visto que  $\alpha$  é uma curva simples, a função  $F$  está bem definida. Vamos provar que  $F$  é contínua em  $\Delta$ . Com efeito, para todo ponto  $(t, s) \in \Delta$  com  $s < t$ ,  $F$  é claramente contínua em  $(s, t)$ . Seja agora um ponto  $(a, a)$  da hipotenusa de  $\Delta$ , e seja  $(t_k, s_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $t_k > s_k$ , uma seqüência de pontos em  $\Delta$ , que converge para  $(a, a)$ . Vamos mostrar que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(t_k, s_k) = T(a) = F(a, a).$$

Observe que podemos escrever

$$F(t_k, s_k) = \frac{\alpha(t_k) - \alpha(s_k)}{t_k - s_k} \left\| \frac{\alpha(t_k) - \alpha(s_k)}{t_k - s_k} \right\|^{-1}.$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio a cada uma das funções coordenadas  $u, v$  de  $\alpha$ , temos que existem  $s_k < \zeta_k < t_k$  e  $s_k < \eta_k < t_k$ , tais que

$$\frac{\alpha(t_k) - \alpha(s_k)}{t_k - s_k} = (u(\zeta_k), v(\eta_k)).$$

Visto que  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = a$ , temos que, necessariamente,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \zeta_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k = a.$$

A curva  $\alpha$  é, por hipótese, de classe  $\mathcal{C}^1$  e, portanto, as funções  $u'$  e  $v'$  são contínuas. Logo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (u'(\zeta_k), v'(\eta_k)) = (u'(a), v'(a)) = T(a).$$

Concluimos, então, que  $F$  é contínua em  $(a, a)$ . Para provarmos a continuidade de  $F$  no ponto  $(L, 0)$ , vamos considerar a curva de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $\bar{\alpha} : [0, 2L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , obtida percorrendo a curva  $\alpha$  duas vezes, isto é,  $\bar{\alpha}(t) = \alpha(t - L)$ , se  $L \leq t \leq 2L$  e  $\bar{\alpha}(t) = \alpha(t)$ , se  $0 \leq t \leq L$ . Seja  $(t_k, s_k) \in \Delta$ , com  $(t_k, s_k) \neq (L, 0)$  e  $\lim_{k \rightarrow \infty} (t_k, s_k) = (L, 0)$ . Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , defina  $\zeta_k = s_k$  e  $\eta_k = L + t_k$ . Temos que  $\zeta_k < \eta_k$  e  $\lim_{k \rightarrow \infty} \zeta_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k = L$ . Por construção, obtemos que

$$\bar{\alpha}(\zeta_k) = \alpha(s_k) \quad \text{e} \quad \bar{\alpha}(\eta_k) = \alpha(t_k).$$

Portanto

$$\begin{aligned} F(t_k, s_k) &= \frac{\alpha(t_k) - \alpha(s_k)}{\|\alpha(t_k) - \alpha(s_k)\|} \\ &= -\frac{\bar{\alpha}(\eta_k) - \bar{\alpha}(\zeta_k)}{\eta_k - \zeta_k} \left\| \frac{\bar{\alpha}(\eta_k) - \bar{\alpha}(\zeta_k)}{\eta_k - \zeta_k} \right\|^{-1}. \end{aligned}$$

Repetindo o argumento do caso interior, vemos que

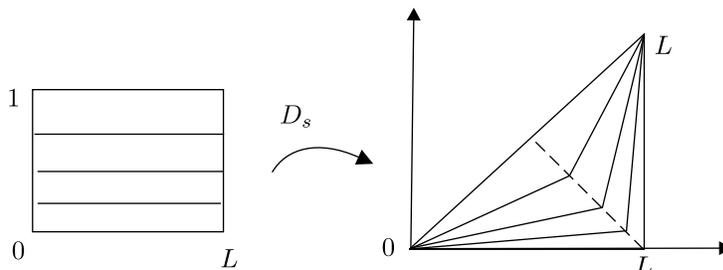
$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} F(t_k, s_k) &= -(\bar{u}'(L), \bar{v}'(L)) = -(u'(L), v'(L)) \\ &= -T(L) = -T(0) = F(L, 0). \end{aligned}$$

Com isso, temos que  $F$  é contínua em  $\Delta$ . Vamos utilizar a função  $F$  para obter uma deformação de  $T$  para uma curva  $T_1$ , para a qual o número de rotação em relação à origem seja mais fácil de calcular. Considere as curvas  $D_0$  e  $D_1$ , respectivamente, a hipotenusa e os catetos de  $\Delta$ . Podemos parametrizar essas curvas por  $D_0 : [0, L] \rightarrow \Delta \subset \mathbb{R}^2$ ,  $D_0(t) = (t, t)$ , e  $D_1 : [0, L] \rightarrow \Delta \subset \mathbb{R}^2$ ,

$$D_1(t) = \begin{cases} (2t, 0), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{L}{2}, \\ (L, 2t - L), & \text{se } \frac{L}{2} \leq t \leq L. \end{cases}$$

Defina a curva  $D_s : [0, L] \rightarrow \Delta \subset \mathbb{R}^2$ ,  $0 \leq s \leq 1$ , por

$$D_s(t) = (1 - s)D_0(t) + sD_1(t).$$



Considere a aplicação  $H : [0, 1] \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$H(s, t) = F \circ D_s(t).$$

Afirmamos que  $H$  é uma homotopia regular entre  $T$  e  $T_1$ , com  $T_1(t) = H(1, t)$ , em  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ . De fato,

1.  $H$  é contínua, pois é a composta de funções contínuas;
2.  $H(0, t) = F(t, t) = T(t)$ ;
3.  $H(s, 0) = F(0, 0) = T(0) = T(L) = F(L, L) = H(s, L)$ , visto que cada curva  $D_s$  liga o ponto  $(0, 0)$  ao ponto  $(L, L)$ ;
4.  $H(s, t) \neq (0, 0)$ , para todo  $(s, t) \in [0, 1] \times [0, L]$ .

Como  $T$  e  $T_1$  são homotópicas em  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ , temos que

$$R_\alpha = W(T, (0, 0)) = W(T_1, (0, 0)).$$

Para concluirmos a prova, vamos mostrar que  $W(T_1, (0, 0)) = 1$ . Seja  $\varphi(t)$  a função angular de  $T_1$  em relação ao ponto  $(0, 0)$ , com  $\varphi(0) = 0$ . Para todo  $0 \leq t \leq \frac{L}{2}$ ,

$$T_1(t) = -\frac{\alpha(2t)}{\|\alpha(2t)\|}$$

aponta para o semi-plano superior,  $T_1(0) = (1, 0)$ ,  $T_1(\frac{L}{2}) = (-1, 0)$ . Portanto

$$\varphi(\frac{L}{2}) = \pi.$$

Por outro lado, no intervalo  $[\frac{L}{2}, L]$ ,  $T_1$  aponta para o semi-plano inferior,  $T_1(\frac{L}{2}) = (-1, 0)$  e  $T_1(L) = (1, 0)$ . Logo

$$\varphi(L) - \varphi(\frac{L}{2}) = \pi.$$

Portanto  $\varphi(L) = 2\pi$  e, conseqüentemente,

$$R_\alpha = W(T_1, (0, 0)) = \frac{1}{2\pi}\varphi(L) = 1. \quad \square$$

### 3.3 Curvatura Absoluta Total

Vimos que a curvatura total de uma curva fechada e regular mede o número algébrico de voltas que sua indicatriz tangente dá em torno da origem. Vamos considerar uma outra integral definida a partir da curva, tendo relação com a curvatura total.

**Definição 3.4** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada, de classe  $\mathcal{C}^2$  e regular. A curvatura absoluta total de  $\alpha$  é dada por*

$$CA(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b |k(t)| \|\alpha'(t)\| dt,$$

onde  $k$  é a função curvatura de  $\alpha$ .

Observe que, se  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco,

$$\|T'(s)\| = \|\alpha''(s)\| = |k(s)|.$$

Logo

$$2\pi CA(\alpha) = \int_a^b |k(s)| ds = \int_a^b \|\alpha''(s)\| ds = \mathcal{L}_{\alpha'},$$

onde  $\mathcal{L}_{\alpha'}$  denota o comprimento da curva  $\alpha'$  entre  $a$  e  $b$ .

O Teorema 3.2 nos diz que  $CT(\alpha)$  é sempre um número inteiro. No entanto, no caso da curvatura absoluta total, temos o seguinte resultado:

**Teorema 3.4** *A curvatura absoluta total de uma curva fechada e regular  $\alpha$  é maior ou igual a 1.*

**Prova.** Visto que a curvatura absoluta total não depende da parametrização, e  $\alpha$  é uma curva regular, podemos supor que a curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  está parametrizada pelo comprimento de arco. Agora, como já vimos antes, se  $\varphi$  é uma função angular para a curva  $\alpha'$  em relação a origem, então

$$\alpha'(s) = (\cos \varphi(s), \text{sen } \varphi(s)).$$

Sejam  $d_1 = \min\{\varphi(s), s \in [a, b]\}$  e  $d_2 = \max\{\varphi(s), s \in [a, b]\}$  os valores de mínimo e máximo de  $\varphi$ . É claro que tais valores existem, pois  $\varphi$  é uma função diferenciável definida num intervalo fechado.

Antes de prosseguirmos a demonstração do teorema, necessitaremos do seguinte resultado:

**Lema 3.1** *Se  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva fechada e regular, então existem  $s_1, s_2 \in [a, b]$ , tais que*

$$\alpha'(s_1) = -\alpha'(s_2).$$

**Prova do lema.** Suponha que não existam  $s_1, s_2 \in [a, b]$ , tais que  $\alpha'(s_1) = -\alpha'(s_2)$ . Logo

$$d_2 - d_1 < \pi.$$

Agora vamos mostrar que a desigualdade acima nos levará a uma contradição. Com efeito, seja

$$u = \left( \cos \frac{d_1 + d_2}{2}, \operatorname{sen} \frac{d_1 + d_2}{2} \right).$$

Portanto

$$\langle u, \alpha'(s) \rangle = \langle u, (\cos \varphi(s), \operatorname{sen} \varphi(s)) \rangle = \cos\left(\frac{d_1 + d_2}{2} - \varphi(s)\right).$$

Assim, visto que

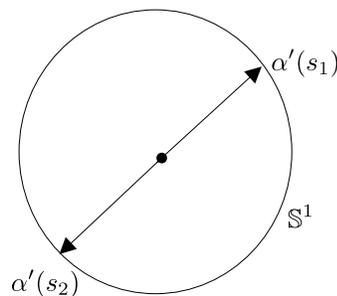
$$\frac{d_1 + d_2}{2} - \varphi(s) = \frac{d_2 - d_1}{2} + d_1 - \varphi(s) < \frac{\pi}{2},$$

temos

$$\langle u, \alpha'(s) \rangle > 0,$$

ou seja, a função altura  $h$ , dada por  $h(s) = \langle u, \alpha(s) \rangle$ , é estritamente crescente. Tal fato é uma contradição, pois  $h(a) = h(b)$ . Logo concluímos a demonstração do lema.  $\square$

Agora usaremos o lema anterior para concluirmos a prova do teorema. De fato, visto que existem  $s_1 < s_2 \in [a, b]$ , tais que  $\alpha'(s_1) = -\alpha'(s_2)$ , temos  $\alpha'(s_1)$  e  $\alpha'(s_2)$  são pontos diametralmente opostos no círculo  $\mathbb{S}^1$  (veja figura abaixo).



Logo

$$\mathcal{L}_{s_1}^{s_2}(\alpha') \geq \pi.$$

Analogamente, obtemos que

$$\mathcal{L}_a^{s_1}(\alpha') + \mathcal{L}_{s_2}^b(\alpha') \geq \pi.$$

Assim concluímos

$$\mathcal{L}_a^b(\alpha') \geq 2\pi.$$

Isso prova o teorema, pois

$$CA(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{L}_a^b(\alpha'). \quad \square$$

No Teorema 3.4 exigimos que a curva  $\alpha$  fosse fechada e regular, ou seja,  $\alpha'(a) = \alpha'(b)$ . O resultado seguinte, no entanto, nos dá uma estimativa da curvatura absoluta total para curvas fechadas, sem exigir, todavia, a condição  $\alpha'(a) = \alpha'(b)$ .

**Proposição 3.2** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular com  $\alpha(a) = \alpha(b)$ . Então*

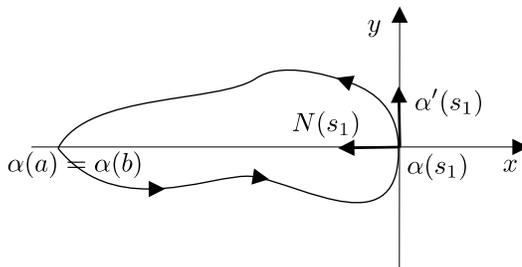
$$CA(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b |k(s)| \|\alpha'(s)\| ds > \frac{1}{2}.$$

**Prova.** Seja  $s_1 \in (a, b)$ , tal que o ponto  $\alpha(s_1)$  é o ponto do traço de  $\alpha$  mais distante do ponto inicial/final  $\alpha(a) = \alpha(b)$ . Nesse caso, a função  $f$ , dada por  $f(s) = \|\alpha(s) - \alpha(a)\|^2$ , possui um máximo em  $s = s_1$ . Como  $f$  é diferenciável nesse ponto, temos que

$$0 = f'(s_1) = \langle \alpha'(s_1), \alpha(s_1) - \alpha(a) \rangle. \quad (3.2)$$

Vamos provar que existem dois pontos  $s_0, s_2 \in [a, b]$ , com  $s_0 < s_2$ , tais que os vetores  $\alpha'(s_0)$  e  $\alpha'(s_2)$  sejam ortogonais ao

vetor  $\alpha'(s_1)$ . Para isso, vamos escolher um sistema positivo de coordenadas de  $\mathbb{R}^2$  de modo que a origem  $(0,0)$  seja o ponto  $\alpha(s_1)$ , o eixo  $Oy$  tenha a direção e sentido do vetor  $\alpha'(s_1)$ , conforme a figura abaixo. Temos que o eixo  $Ox$  tem a direção e sentido de  $-N(s_1)$ .



Suponha que a expressão de  $\alpha$  em relação a esse sistema de coordenadas seja  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ .

A equação (3.2) nos diz que o vetor  $\alpha(s_1) - \alpha(a) = -\alpha(a)$  é ortogonal ao vetor  $(0, 1)$ . Logo  $\alpha(a)$  está sobre o eixo  $Ox$ . Temos ainda que a coordenada  $y(s)$  troca de sinal em  $s = s_1$ . De fato, se  $y$  não trocasse de sinal, essa função teria um extremo nesse ponto. Logo  $y'(s_1) = 0$  e, portanto,  $\alpha'(s_1)$  seria paralelo ao vetor  $N(s_1)$ , o que é uma contradição. Assim, temos que  $y$  assume pelo menos dois valores extremos absolutos (máximo e mínimo) em  $(a, s_1) \cup (s_1, b)$ . Suponha que tais extremos sejam nos pontos  $s_0 \in (a, s_1)$  e  $s_2 \in (s_1, b)$ . Nesses pontos,  $y'(s_0) = y'(s_2) = 0$  e, portanto,  $\alpha'(s_0)$  e  $\alpha'(s_2)$  são ortogonais a  $\alpha'(s_1)$ . Esse fato, nos diz que a indicatriz tangente de  $\alpha$ , quanto  $t$  varia no intervalo  $[s_0, s_2]$ , percorre pelo menos dois arcos de círculo e cada arco tem comprimento  $\pi/2$ . Logo

$$\int_{s_0}^{s_2} |k(s)| \|\alpha'(s)\| ds = \int_{s_0}^{s_2} \|T'(s)\| ds \geq \pi.$$

Observe que, restrita ao intervalo  $(a, s_0)$ ,  $k$  não pode ser identicamente nula. De fato, se  $k(s) \equiv 0$  no intervalo  $(a, s_0)$ , o traço

da curva  $\alpha$  deve ser um segmento de reta nesse intervalo. Como  $\alpha(a)$  está sobre o eixo  $Ox$  e  $\alpha'(s_0)$  é paralelo a esse eixo, concluímos que  $y(s_0) = 0$ , o que contradiz a escolha de  $s_0$ . Portanto

$$\begin{aligned} \int_a^b |k(s)| \|\alpha'(s)\| ds &= \int_a^{s_0} |k(s)| \|\alpha'(s)\| ds \\ &+ \int_{s_0}^{s_2} |k(s)| \|\alpha'(s)\| ds + \int_{s_2}^b |k(s)| \|\alpha'(s)\| ds \\ &> \int_{s_0}^{s_2} |k(s)| \|\alpha'(s)\| ds \geq \pi, \end{aligned}$$

visto que  $\int_a^{s_0} |k(s)| ds > 0$ . Assim

$$CA(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b |k(s)| \|\alpha'(s)\| ds > \frac{1}{2},$$

o que conclui a prova.  $\square$

Como aplicação desse resultado, vamos apresentar uma condição para que uma curva fechada e regular seja simples.

**Corolário 3.2** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada e regular com curvatura absoluta total igual a um. Então  $\alpha$  é uma curva simples.*

**Prova.** Admitamos, por absurdo, que  $\alpha$  não seja simples. Portanto, trocando o ponto inicial/final, se necessário, podemos supor que  $\alpha(a) = \alpha(t_0)$ , para algum  $t_0 < b$ . Nesse caso, considerando  $\alpha_1 = \alpha|_{[a, s_0]}$  e  $\alpha_2 = \alpha|_{[s_0, b]}$ , temos, pela proposição anterior, que

$$CA(\alpha_1) > \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad CA(\alpha_2) > \frac{1}{2}.$$

Portanto

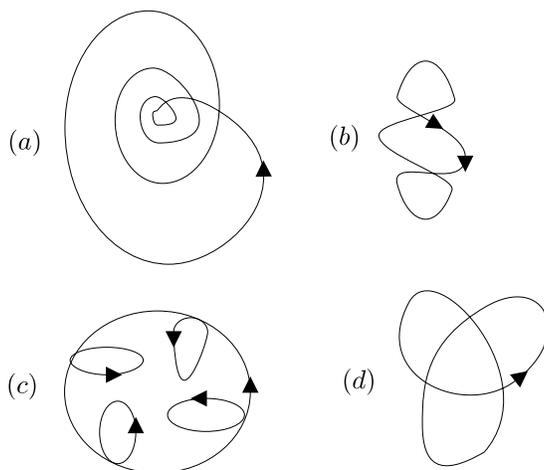
$$CA(\alpha) = CA(\alpha_1) + CA(\alpha_2) > 1,$$

o que é uma contradição.  $\square$

No capítulo 5, iremos caracterizar completamente as curvas com curvatura absoluta total igual a um.

### 3.4 Exercícios

1. Seja  $\alpha : (-\infty, \infty) \rightarrow R^2$ , definida por  $\alpha(t) = (t, t^2)$ . Calcule seu índice de rotação.
2. Determine os índices de rotação das curvas (a), (b), (c) e (d) nas figuras abaixo.



3. *Teorema de Stoker.* Seja  $\alpha : (-\infty, \infty) \rightarrow R^2$  uma curva regular e parametrizada pelo comprimento de arco. Suponha que  $\alpha$  satisfaz as seguintes condições:
  - (a) A curvatura de  $\alpha$  é estritamente positiva;
  - (b)  $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} |\alpha(s)| = \infty$ , ou seja, a curva se estende para o infinito em ambas as direções;

(c)  $\alpha$  não tem auto interseções.

Mostre que a curvatura total de  $\alpha$  é menor ou igual a  $\pi$ .

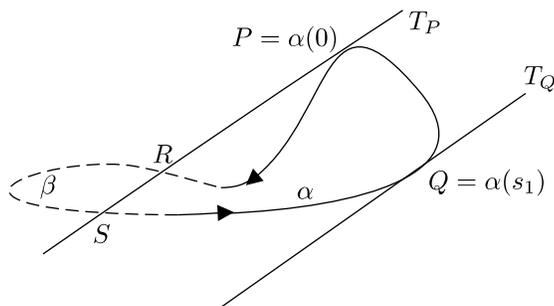
O seguinte esboço será útil. Suponha que a curvatura total é maior que  $\pi$  e  $\alpha$  não tem auto-interseções. Para obter uma contradição, proceda da seguinte maneira:

i) Prove que existem pontos, digamos,  $P = \alpha(0)$ ,  $Q = \alpha(s_1)$ ,  $s_1 > 0$ , tais que as retas tangentes  $T_P$  e  $T_Q$  nos pontos,  $P$  e  $Q$ , respectivamente, são paralelas e não existe reta tangente à curva  $\alpha$  paralela a  $T_P$  no arco  $\alpha([0, s_1])$ .

ii) Mostre que, quando  $s$  cresce,  $\alpha(s)$  encontra  $T_P$  num ponto, digamos,  $R$  (veja a figura abaixo).

iii) O arco  $\alpha((-\infty, 0))$  deve intersectar  $T_P$  num ponto  $S$ , tal que  $R$  está entre  $P$  e  $S$ .

iv) Complete o arco  $SQPR$  de  $\alpha$  com um arco  $\beta$  sem auto-interseção unindo  $R$  a  $S$ , obtendo, portanto, uma curva fechada  $C$ . Mostre que o índice de rotação de  $C$  é maior ou igual a 2. Mostre que isto implica que  $\alpha$  tem auto-interseções, logo uma contradição.



4. Determine a curvatura total da curva de Lissajous  $\alpha(t) = (\sin 3t, \cos 4t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

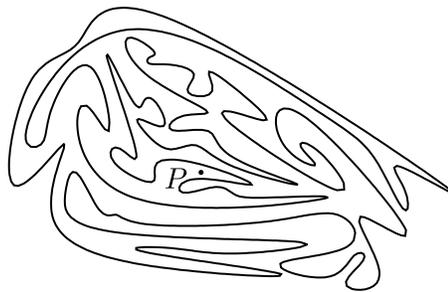
5. Dê um exemplo de uma curva fechada e regular  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que  $CA(\alpha)$  não é um número inteiro.
6. Mostre que se existe um vetor unitário  $a$  tal que a indicatriz tangente  $T$  de uma curva fechada e regular  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisfaz  $T(t) \neq a$ , para todo  $t \in [a, b]$ , então  $CT(\alpha) = 0$ . Dê um exemplo onde esta situação ocorre.
7. Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada, regular e de classe  $\mathcal{C}^2$ . Suponha que a curvatura de  $\alpha$  é estritamente positiva em todo ponto de  $[a, b]$ . Mostre que a aplicação  $T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ ,  $t \in [a, b]$ , é sobrejetiva em  $\mathbb{S}^1$ . Mostre que, nesse caso, para cada  $a \in \mathbb{S}^1$ , existe apenas um número finito  $k$  de valores  $t \in [a, b]$  tais que  $T(t) = a$ . Mostre ainda que  $k$  não depende de  $a$  e é igual ao índice de rotação de  $\alpha$ .



## Capítulo 4

### Teorema de Jordan

Neste capítulo, vamos discutir o número de componentes conexas do complementar do traço de uma curva de Jordan, isto é, uma curva fechada e simples em  $\mathbb{R}^2$ . Quando consideramos uma curva desse tipo, o fato de que ela não possui auto-interseções nos faz pensar, intuitivamente, que o seu traço divide o plano em duas componentes conexas: uma região limitada pelo traço da curva e uma outra ilimitada. De fato, todos os exemplos que conseguimos imaginar são assim, apesar de que, nem sempre, é fácil identificar se um ponto está ou não na região que consideramos limitada pelo traço da curva. Por exemplo, na figura abaixo, em qual componente conexa está o ponto  $P$ ?



A possível região limitada pelo traço de uma curva fechada e contínua pode ser bem estranha. Vimos no capítulo 1 que existem curvas fechadas e contínuas cujo traço “*enche*” um quadrado (curva de Hilbert). No exemplo de Moore, tal curva é o limite de curvas contínuas, fechadas e simples. Ao deixar a imaginação correr, aquela intuição inicial parece que vai ficando cada vez mais tênue e até podemos duvidar da veracidade de tal resultado. Ele, de fato, é verdadeiro e foi apresentado inicialmente por C. Jordan no livro *Cours d'Analyse*, [Jo].

Nesse capítulo, ainda incluímos uma discussão da Desigualdade Isoperimétrica para curvas fechadas no plano. Esse resultado fornece uma estimativa para a área da região limitada por uma curva fechada e simples em função de seu comprimento.

## 4.1 Teorema de Jordan

A complexidade da prova do Teorema de Jordan surpreendeu muitos matemáticos de sua época. Mesmo assim, a prova tinha ainda várias lacunas a serem preenchidas. Na literatura, temos muitas provas desse teorema e, no caso da curva ser apenas contínua, as demonstrações apresentam um certo grau de complexidade. O Teorema de Jordan talvez seja um dos resultados matemáticos em que mais facilmente podemos acreditar, sem percebermos a dificuldade de sua demonstração. Ele também é um belo exemplo de que desenhar é, de fato, diferente de provar.

Muitas vezes, ao colocar hipóteses adicionais sobre a curva, a prova é facilitada. Assim iremos provar o Teorema de Jordan, no caso em que a curva é regular e de classe  $\mathcal{C}^2$ .

Inicialmente vamos provar um fato útil na demonstração do Teorema de Jordan, que é a existência de uma vizinhança adequada do traço da curva considerada.

Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular, fechada e de classe

$\mathcal{C}^2$ . Temos que estão bem definidas as derivadas de primeira e segunda ordem de  $\alpha$  para todo  $t \in [a, b]$  e

$$\frac{d^i \alpha}{dt^i}(a) = \frac{d^i \alpha}{dt^i}(b), \quad i = 1, 2.$$

Portanto podemos estender a curva  $\alpha$  a uma curva periódica  $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , com

$$\tilde{\alpha}(t) = \alpha(t + a - k(b - a)), \quad \text{se } k(b - a) \leq t \leq (k + 1)(b - a), \quad (4.1)$$

onde  $k \in \mathbb{N}$ . A curva  $\tilde{\alpha}$ , assim definida, é regular, de classe  $\mathcal{C}^2$  e seu traço é o mesmo que o traço de  $\alpha$ . Se a curva  $\alpha$  for simples, então temos que  $\tilde{\alpha}(t) = \tilde{\alpha}(s)$ , se e somente se  $(t - s)$  é um múltiplo inteiro de  $(b - a)$ .

**Lema 4.1** (*Existência da vizinhança tubular*) *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada, simples, regular e de classe  $\mathcal{C}^2$ . Então existem um aberto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ , contendo o traço de  $\alpha$ , e um homeomorfismo  $h : A_\zeta \rightarrow \mathcal{U}$ , onde  $A_\zeta$  é o anel  $A_\zeta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (1 - \zeta)^2 < x^2 + y^2 < (1 + \zeta)^2\}$ ,  $\zeta > 0$ , tal que a imagem do círculo  $x^2 + y^2 = 1$  por  $h$  é o traço de  $\alpha$ .*

**Prova.** Podemos supor, sem perda de generalidade, que a curva  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco. Agora vamos considerar a extensão periódica  $\tilde{\alpha}$ , dada por (4.1). Defina  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  por

$$H(s, t) = \tilde{\alpha}(s) + tN(s),$$

onde  $N(s)$  é o vetor normal de  $\tilde{\alpha}$  em  $s$ . Se  $\tilde{\alpha}(s) = (x(s), y(s))$ , temos que  $N(s) = (-y'(s), x'(s))$  e, portanto,

$$H(s, t) = (x(s) - ty'(s), y(s) + tx'(s)).$$

**Afirmção 1.** Para cada  $s_0 \in \mathbb{R}$ , existem uma vizinhança  $W_{s_0}$  de  $(s_0, 0)$  e uma vizinhança  $V_{s_0}$  de  $\tilde{\alpha}(s_0)$  em  $\mathbb{R}^2$ , tais que

$H(W_{s_0}) = V_{s_0}$  e  $H|_{W_{s_0}} : W_{s_0} \rightarrow V_{s_0}$  é um difeomorfismo.

De fato, a matriz Jacobiana de  $H$  em  $(s, t)$  é

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} x'(s) - ty''(s) & y'(s) + tx''(s) \\ -y'(s) & x'(s) \end{pmatrix}.$$

Portanto o determinante de  $\mathcal{J}$ , calculado no ponto  $(s_0, 0)$ , é

$$\det \mathcal{J} = (x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1 \neq 0.$$

Logo a diferencial de  $H$  em  $(s_0, 0)$  é um isomorfismo e, portanto, a afirmação 1 decorre de uma aplicação direta do Teorema da Função Inversa (ver [L2], p.283) para funções de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Da afirmação 1 decorre que, para cada  $s_0 \in [a, b]$ , existem  $\varepsilon(s_0) > 0$  e  $\zeta(s_0) > 0$  tais que o retângulo  $R_{s_0} = (s_0 - \varepsilon(s_0), s_0 + \varepsilon(s_0)) \times (-\zeta(s_0), \zeta(s_0))$  está contido em  $W_{s_0}$  e  $H|_{R_{s_0}}$  é um difeomorfismo sobre sua imagem. Como  $[a, b]$  é um conjunto compacto, existe um número finito de retângulos  $R_{s_i}$ ,  $s_i \in [a, b]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , tais que

$$[a, b] \times \{0\} \subset \bigcup_{i=1}^n R_{s_i}.$$

Sejam  $\varepsilon = \min\{\varepsilon(s_i), i = 1, \dots, n\}$  e  $\zeta = \min\{\zeta(s_i), i = 1, \dots, n\}$  e considere  $\mathcal{R} = (a - \varepsilon, b + \varepsilon) \times (-\zeta, \zeta) \subset \bigcup_{i=1}^n R_{s_i}$ . A função  $H|_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  é localmente um homeomorfismo e  $H(s, 0) = \tilde{\alpha}(s)$ .

Um outro fato que será útil na prova, o qual decorre diretamente do Teorema do Número de Recobrimento de Lebesgue (olhar [L2], p.54), é que, para a coleção de retângulos  $R_{s_i}$ , existe um número real  $\lambda > 0$  tal que, se  $|x_1 - x_2| < \lambda$  e  $y_1, y_2 \in (-\zeta, \zeta)$ , então  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  estão no mesmo retângulo  $R_{s_i}$ . Essa constante  $\lambda$  é chamada número de Lebesgue da cobertura  $\{R_{s_i}\}$ . Este

fato é crucial para a prova da afirmação seguinte.

**Afirmação 2.** Existe  $\delta > 0$  tal que, se  $|t_1|, |t_2| < \delta$ ,  $s_1, s_2 \in [a, b]$  e  $H(s_1, t_1) = H(s_2, t_2)$ , então  $t_1 = t_2$  e  $s_1 = s_2$ .

Com efeito, suponha por contradição que tal  $\delta$  não exista. Nesse caso, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existem  $x_1^n, x_2^n, y_1^n$  e  $y_2^n$  com  $|y_i^n| < \frac{1}{n}$ ,  $i = 1, 2$ , tais que  $H(x_1^n, y_1^n) = H(x_2^n, y_2^n)$  e  $(x_1^n, y_1^n) \neq (x_2^n, y_2^n)$ .

Vamos provar que  $|x_2^n - x_1^n|$  não pode ficar uniformemente limitado inferiormente por uma constante positiva. Suponha que  $|x_2^n - x_1^n| \geq k_0 > 0$ . Observe inicialmente que a curva  $\tilde{\alpha}$  é injetiva em  $[a, b]$ , portanto, como  $H$  é um difeomorfismo local, temos que  $\tilde{\alpha}^{-1} : B \rightarrow [a, b]$ , onde  $B = \text{traço de } \alpha$ , é uma aplicação contínua. Visto que  $B$  é compacto, temos que  $\tilde{\alpha}^{-1}$  é uniformemente contínua. Logo, se  $|x_2^n - x_1^n| \geq k_0$ , existe  $k_1$  tal que

$$\|\tilde{\alpha}(x_2^n) - \tilde{\alpha}(x_1^n)\| \geq k_1. \quad (4.2)$$

Além disso, a desigualdade de Cauchy-Schwarz implica que, se  $|t_i| < \frac{1}{n}$ , então

$$\begin{aligned} \|t_2^n N(s_2) - t_1^n N(s_1)\|^2 &= \|t_2^n N(s_2)\|^2 + \|t_1^n N(s_1)\|^2 \\ &\quad - 2\langle t_2^n N(s_2), t_1^n N(s_1) \rangle \leq 2(\|t_2^n N(s_2)\|^2 + \|t_1^n N(s_1)\|^2) \\ &< \frac{4}{n^2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Portanto, usando (4.2) e (4.3), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \|H(x_2^n, y_2^n) - H(x_1^n, y_1^n)\| \\ &= \|\tilde{\alpha}(x_2^n) + y_2^n N(x_2^n) - \tilde{\alpha}(x_1^n) + y_1^n N(x_1^n)\| \\ &\geq \|\tilde{\alpha}(x_2^n) - \tilde{\alpha}(x_1^n)\| - \|y_2^n N(x_2^n) - y_1^n N(x_1^n)\| \\ &\geq k_1 - \frac{2}{n} > 0, \end{aligned}$$

se  $n$  é suficientemente grande. Temos, portanto, uma contradição. Logo existe  $n_0$ , tal que  $|x_2^{n_0} - x_1^{n_0}| < \lambda$ , onde  $\lambda$  é o número de

Lebesgue da cobertura  $\{R_{s_i}\}$ . Porém, nesse caso,  $(x_1^{n_0}, y_1^{n_0})$  e  $(x_2^{n_0}, y_2^{n_0})$  pertencem ao mesmo retângulo  $Q$  de  $\{R_{s_i}\}$  e chegamos a uma contradição, pois  $H$  é uma função injetiva em  $Q$ . Isso conclui a prova da Afirmação 2.

Seja  $\mathcal{U} = H([a, b] \times (-\zeta, \zeta))$  e considere agora as seguintes aplicações:

$$f : [a, b] \times (-\zeta, \zeta) \rightarrow A_\zeta,$$

$$f(s, t) = \left( (1+t) \cos\left(\frac{2\pi(s-a)}{b-a}\right), (1+t) \sin\left(\frac{2\pi(s-a)}{b-a}\right) \right)$$

e

$$H : [a, b] \times (-\zeta, \zeta) \rightarrow \mathcal{U},$$

$$H(s, t) = \alpha(s) + tN(s).$$

Observe que  $f$  e  $H$  deixam de ser injetivas apenas ao longo dos segmentos  $\{(a, t), t \in (-\zeta, \zeta)\}$  e  $\{(b, t), t \in (-\zeta, \zeta)\}$ , porém a hipótese de  $\alpha$  ser uma curva fechada e de classe  $\mathcal{C}^2$  nos diz que está bem definida a função  $h : A_\zeta \rightarrow \mathcal{U}$ , dada de modo que o diagrama abaixo comute.

$$\begin{array}{ccc}
 & [a, b] \times (-\zeta, \zeta) & \\
 f \swarrow & & \searrow H \\
 A_\zeta = \{(x, y) | (1-\zeta)^2 < x^2 + y^2 < (1+\zeta)^2\} & \xrightarrow{h} & \mathcal{U} = H([a, b] \times (-\zeta, \zeta))
 \end{array}$$

Assim, como  $f$  e  $H$  são localmente homeomorfismos,  $h$  é um homeomorfismo.

□

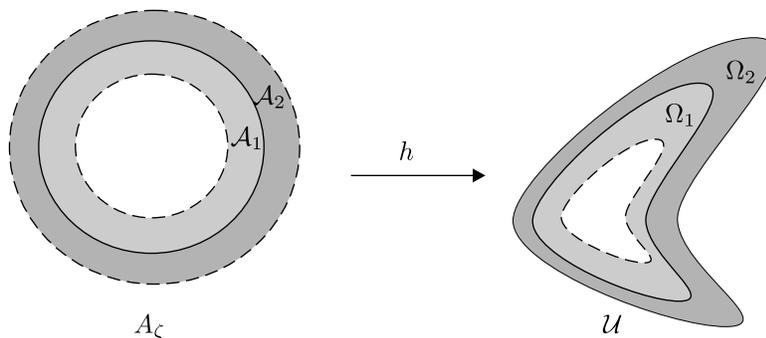
**Observação 4.1** O aberto  $\mathcal{U}$  é chamado *vizinhança tubular de  $\alpha$* .

Um fato simples de provar, mesmo para curvas contínuas, é que, se  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva fechada e simples, então o complementar de seu traço,  $\mathbb{C}^\alpha$ , possui apenas uma componente conexa ilimitada. Com efeito, suponha que  $\mathbb{C}^\alpha$  possua duas componentes conexas ilimitadas, digamos  $\mathcal{W}_1$  e  $\mathcal{W}_2$ . Então, dado  $R > 0$ , existem  $P_1 \in \mathcal{W}_1$  e  $P_2 \in \mathcal{W}_2$ , que estão fora da bola de raio  $R$ . Como  $P_1$  e  $P_2$  estão em componentes conexas diferentes de  $\mathbb{C}^\alpha$ , toda curva contínua que ligue  $P_1$  a  $P_2$  deve intersectar o traço de  $\alpha$ . Em particular, existem pontos do traço de  $\alpha$  fora da bola de raio  $R$ , para todo  $R > 0$ . Logo o traço de  $\alpha$  é um conjunto ilimitado de  $\mathbb{R}^2$ , o que é uma contradição.

Vamos então ver que, para curvas de classe  $\mathcal{C}^2$ , o complementar do traço de  $\alpha$  possui apenas uma componente conexa limitada.

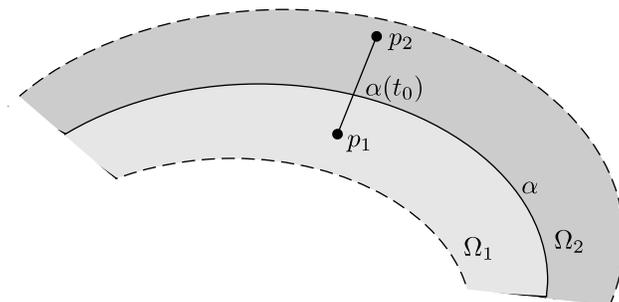
**Teorema 4.1** (*Teorema de Jordan regular*) *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva de Jordan, regular e de classe  $\mathcal{C}^2$ . Então o complementar do traço de  $\alpha$ ,  $\mathbb{C}^\alpha$ , é a união de dois conjuntos conexos, não-vazios e com a fronteira de cada um igual ao traço de  $\alpha$ .*

**Prova.** Seja  $A_\zeta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (1 - \zeta)^2 < x^2 + y^2 < (1 + \zeta)^2\}$  e seja  $h : A_\zeta \rightarrow \mathcal{U}$  um homeomorfismo, dado pelo Lema 4.1, onde  $\mathcal{U}$  é uma vizinhança tubular do traço de  $\alpha$ . Se  $\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ , temos que  $h(\mathcal{B}) = \text{traço de } \alpha$ . Sejam  $\mathcal{A}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - \zeta < x^2 + y^2 < 1\}$  e  $\mathcal{A}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 1 + \zeta\}$  e defina  $\Omega_1 = h(\mathcal{A}_1)$  e  $\Omega_2 = h(\mathcal{A}_2)$ . Como  $h$  é um homeomorfismo, temos que cada conjunto  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2$ , é um conjunto aberto e conexo. Além disso, o traço de  $\alpha$  é a fronteira comum de  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ .



Sejam  $p_1 \in \Omega_1$  e  $p_2 \in \Omega_2$  pontos sobre o mesmo segmento de reta passando por  $\alpha(t_0)$  e ortogonal ao traço de  $\alpha$ ,  $I_{t_0} = \{\alpha(t_0) + sN(t_0), s \in (-\zeta, \zeta)\} \subset \mathcal{U}$ . Pela fórmula do número de interseções, como  $I_{t_0}$  intersecta o traço de  $\alpha$  apenas no ponto  $\alpha(t_0)$ , temos que

$$W(\alpha, p_1) - W(\alpha, p_2) = \pm 1.$$



Para cada  $p \in \mathbb{R}^2 - \{\alpha([a, b])\}$ , seja  $W(p) = W(\alpha, p)$ . Temos que  $W(p)$  é constante em cada componente conexa de  $\mathbb{R}^2 - \{\alpha([a, b])\}$ . Visto que, na componente conexa ilimitada,  $W(p) = 0$ , obtemos que  $\mathbb{R}^2 - \{\alpha([a, b])\}$  possui pelo menos duas componentes conexas. Vamos provar agora que  $\mathbb{R}^2 - \{\alpha([a, b])\}$

possui, no máximo, duas componentes conexas. Inicialmente, demonstraremos que, se  $\mathcal{W}$  é uma componente conexa qualquer de  $\mathbb{R}^2 - \{\alpha([a, b])\}$ , então  $\partial\mathcal{W}$  é o traço de  $\alpha$ . Como  $\mathcal{W}$  é aberto e  $\mathcal{W} \neq \mathbb{R}^2$ , temos que  $\partial\mathcal{W} \neq \emptyset$ . Se  $p \in \partial\mathcal{W}$ ,  $p$  não pertence a nenhuma componente conexa de  $\mathbb{R}^2 - \{\alpha([a, b])\}$  e, portanto,  $p \in \alpha([a, b])$ . Temos então que  $\partial\mathcal{W}$  está contido no traço de  $\alpha$ . Observe que  $\mathcal{W} \cap \Omega \neq \emptyset$  e, logo,  $\mathcal{W}$  tem pontos em comum com  $\Omega_1$  ou  $\Omega_2$ . Como  $\mathcal{W}$  é uma componente conexa de  $\mathbb{R}^2 - \{\alpha([a, b])\}$  e cada  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2$ , é conexo, temos que

$$\Omega_1 \subset \mathcal{W} \quad \text{ou} \quad \Omega_2 \subset \mathcal{W}. \quad (4.4)$$

Agora considere  $p = \alpha(t_1) \in \alpha([a, b])$ , e seja  $r > 0$  suficientemente pequeno de modo que o disco  $\mathcal{D}$  de centro  $p$  e raio  $r$  esteja contido em  $\Omega$ , porém o traço de  $\alpha$  não esteja contido em  $\mathcal{D}$ . Considerando o segmento normal  $I_{t_1}$ , vemos claramente que  $\mathcal{D}$  possui pontos em  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ . Logo  $\mathcal{W} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$ . Além disso, quando restrito a cada um dos subconjuntos  $\Omega_i \cap I_{t_1}$ ,  $i = 1, 2$ , o número de rotação da curva  $\alpha$  em relação a um ponto de cada um desses conjuntos é diferente. Temos também que  $\mathcal{D} \cap (\mathbb{R}^2 - (\alpha([a, b]) \cup \mathcal{W})) \neq \emptyset$ . Portanto  $p \in \partial\mathcal{W}$ . Assim

$$\partial\mathcal{W} = \text{traço de } \alpha.$$

A equação (4.4) implica que  $\mathbb{R}^2 - \{\alpha([a, b])\}$  possui no máximo duas componentes conexas, o que conclui a prova do teorema.  $\square$

**Observação 4.2** *Decorre da prova acima que  $\mathbb{R}^2 - \{\alpha([a, b])\}$  se escreve como a união de dois conjuntos conexos, um ilimitado, digamos  $\mathcal{W}_1$ , e outro limitado, digamos  $\mathcal{W}_2$ . Temos ainda que a função  $W$ , definida por  $W(p) = W(\alpha, p)$ , satisfaz*

$$W(p) = \begin{cases} 0, & \text{se } p \in \mathcal{W}_1, \\ \pm 1, & \text{se } p \in \mathcal{W}_2, \end{cases}$$

onde o sinal, na última expressão, depende da orientação de  $\alpha$ .

Considere o campo normal  $N$  de uma curva de Jordan, regular e de classe  $\mathcal{C}^2$ . Como esse campo é contínuo, temos que ele sempre aponta para uma das componentes conexas, determinadas pelo traço dessa curva em  $\mathbb{R}^2$ . Vamos introduzir a noção de orientação positiva de uma tal curva.

**Definição 4.1** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva de Jordan, regular e de classe  $\mathcal{C}^2$ . Dizemos que  $\alpha$  está positivamente orientada, se seu campo normal aponta para a região limitada de  $\mathbb{R}^2$  determinada pelo traço de  $\alpha$ .*

O ponto fundamental na prova da versão regular do Teorema de Jordan foi a existência de um campo normal diferenciável, definido ao longo de  $\alpha$ , o que nos permitiu definirmos os dois conjuntos conexos  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ . Para o caso em que as curvas são apenas contínuas, essa construção não pode ser repetida de forma simples. É possível, no entanto, ainda ser provado o seguinte resultado:

**Teorema 4.2** *(Teorema de Jordan) Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva contínua e de Jordan. Então o complementar do traço de  $\alpha$ ,  $\mathbb{C}^\alpha$ , é a união de dois conjuntos conexos, não-vazios e com a fronteira de cada um igual ao traço de  $\alpha$ .*

**Prova.** Ver [Tv].

A componente conexa limitada de  $\mathbb{C}^\alpha$  é denominada interior de  $\alpha$  ou região determinada por  $\alpha$ , e a outra componente conexa ilimitada de  $\mathbb{C}^\alpha$  é chamada de exterior de  $\alpha$ .

Vamos comentar agora sobre a recíproca do Teorema de Jordan. Suponha que  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  seja um conjunto compacto, tal que

$\mathbb{R}^2 - \Gamma$  tenha exatamente duas componentes conexas  $\mathcal{W}_1$  e  $\mathcal{W}_2$ , cuja fronteira de cada uma dessas componentes seja  $\Gamma$ . Será que  $\Gamma$  é o traço de uma curva de Jordan? Esse fato é falso, como mostra o exemplo a seguir. Antes de apresentarmos este exemplo, vamos fazer algumas considerações de topologia de  $\mathbb{R}^2$ , úteis ao entendimento desse exemplo. Dizemos que um conjunto  $\mathcal{A}$  é localmente conexo, se, para todo ponto  $P \in \mathcal{A}$ , existe uma bola aberta  $B$  de centro  $P$ , tal que  $\mathcal{A} \cap B$  é um conjunto conexo. O resultado enunciado a seguir foi provado independentemente por Hahn e Mazurkiewicz e nos dá condições necessárias e suficientes para que um conjunto  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  seja o traço de uma curva contínua, definida em um intervalo fechado. Lembramos que um conjunto  $\mathcal{A}$  é fechado, se, para toda seqüência convergente de pontos de  $\mathcal{A}$ , o limite também é um ponto de  $\mathcal{A}$ .

**Teorema 4.3** *Um conjunto  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  é o traço de uma curva contínua definida em um intervalo fechado, se e somente se  $\mathcal{A}$  é fechado, limitado, conexo e localmente conexo em  $\mathbb{R}^2$ .*

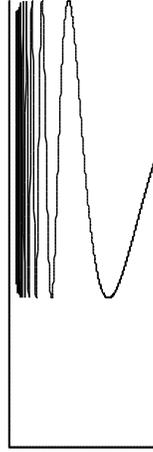
Agora podemos introduzir o exemplo de uma curva limitada, cujo traço separa  $\mathbb{R}^2$  em dois conjuntos conexos, mas não é uma curva de Jordan. Considere  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ , onde cada  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , é dado por

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \text{sen}(\pi/x), 0 < x \leq 1\},$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, -2 \leq y \leq 1\},$$

$$\Gamma_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2, 0 \leq x \leq 1\},$$

$$\Gamma_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1, -2 \leq y \leq 0\}.$$



Observe que  $\mathbb{R}^2 - \Gamma$  possui exatamente duas componentes conexas

$$\mathcal{W}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, -2 < y < \sin(\pi/x)\}$$

e

$$\mathcal{W}_2 = \mathbb{R}^2 - (\Gamma \cup \mathcal{W}_1),$$

com  $\partial\mathcal{W}_1 = \partial\mathcal{W}_2 = \Gamma$ . Visto que  $\Gamma$  não é localmente conexo, temos, usando o Teorema 4.3, que  $\Gamma$  não é o traço de uma curva de Jordan.

Vamos apresentar agora algumas aplicações do Teorema de Jordan. Dizemos que  $D \subset \mathbb{R}^2$  é uma região de  $\mathbb{R}^2$ , se  $D$  é uma região determinada por uma curva de Jordan.

**Teorema 4.4** *Seja  $D$  uma região de  $\mathbb{R}^2$ . Se  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma função contínua e injetiva, então  $F(D)$  é um subconjunto aberto e conexo de  $\mathbb{R}^2$ .*

**Prova.** Vamos provar que  $F(D)$  é um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $p \in D$ , e seja  $\varepsilon > 0$ , tal que a bola fechada de centro  $p$  e raio  $\varepsilon$  esteja contido em  $D$ . Seja  $\alpha_{p,\varepsilon}(t) = p + \varepsilon(\cos t, \sin t)$ ,  $t \in$

$[0, 2\pi]$ . Como  $F$  é contínua e injetiva, a curva  $\beta$ , dada por  $\beta(t) = f \circ \alpha_{p,\varepsilon}(t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , é uma curva de Jordan. Denote por  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  o traço de  $\beta$ , e seja  $\mathcal{B} = \{q = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|q - p\| < \varepsilon\}$ . Devido à continuidade de  $F$ , temos que  $F(\mathcal{B})$  é conexo e, pela injetividade de  $F$ , obtemos que  $F(\mathcal{B}) \cap \Gamma = \emptyset$ . Daí decorre que  $F(\mathcal{B})$  está contido em uma das duas componentes conexas determinada por  $\Gamma$ . Seja  $q$  um ponto da região limitada  $\Omega$ , determinada por  $\Gamma$ . Temos que  $W(\Gamma, q) = \pm 1$  e, portanto, pelo Teorema (2.6), existe  $p_0 \in \overline{\mathcal{B}}$ , tal que

$$F(p_0) = q.$$

Logo  $F(\mathcal{B}) \cap \Omega \neq \emptyset$  e, portanto,  $F(\mathcal{B}) \subset \Omega$ . Como  $q$  é arbitrário em  $\Omega$ , a equação acima implica que  $\Omega \subset F(\mathcal{B})$ , sendo, então,  $\Omega = F(\mathcal{B})$ . Assim  $F(\mathcal{B})$  é um aberto e conexo de  $\mathbb{R}^2$ . □

Após o conhecimento do resultado acima, temos a seguinte pergunta natural: uma função contínua e injetiva  $F$  leva os pontos de fronteira de um conjunto  $D$  em pontos de fronteira de  $F(D)$ ? Em geral, esse resultado é falso, como mostra o seguinte exemplo:

**Exemplo 4.1** *Seja  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação, dada por*

$$F(x, y) = (y \cos x, y \sin x),$$

*onde  $D = [0, 2\pi) \times [1/2, 2] \subset \mathbb{R}^2$ . Portanto temos que  $F$  é contínua e injetiva. O conjunto imagem  $F(D)$  é o anel  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1/4 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ . O ponto  $(0, 1) \in \partial D$  e  $F(0, 1) = (1, 0) \notin \partial F(D)$ .*

Porém, se a função  $F$  é um homeomorfismo, isto é, ela é contínua e possui inversa contínua, temos o seguinte resultado:

**Teorema 4.5** *Seja  $F : D \rightarrow F(D)$  um homeomorfismo, onde  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Se  $p \in \partial D$ , então  $F(p) \in \partial F(D)$ .*

**Prova.** Seja  $p \in D$ , tal que  $f(p) \in F(D) - \partial F(D)$ . O mesmo argumento da demonstração do Teorema 4.4, aplicado à função  $F^{-1}$  restrita a uma bola de centro  $F(p)$  e raio suficientemente pequeno para estar contido em  $F(D)$ , mostra que  $p = F^{-1}(F(p)) \notin \partial D$ . □

## 4.2 Desigualdade Isoperimétrica

Antes de iniciarmos a prova da desigualdade isoperimétrica, necessitaremos da seguinte aplicação do Teorema de Green, a qual pode ser encontrado em [CJ], p. 543.

**Lema 4.2** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada, simples, orientada positivamente e definida por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . Então*

$$\begin{aligned} A &= - \int_a^b y(t)x'(t) dt = \int_a^b x(t)y'(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt, \end{aligned} \quad (4.5)$$

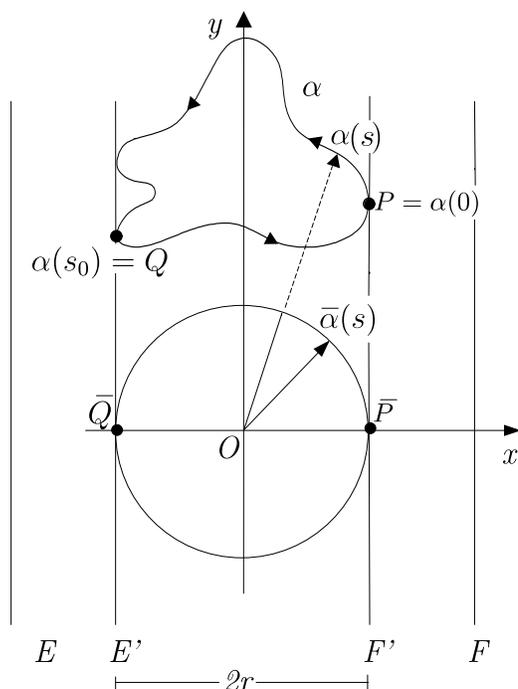
onde  $A$  é a área da região limitada pela curva  $\alpha$ .

**Teorema 4.6** *(Desigualdade Isoperimétrica) Dentre todas as curvas regulares e de Jordan com um mesmo comprimento fixado, o círculo delimita a maior área. Em outras palavras: se  $L$  é o comprimento de uma curva  $\alpha$  regular e de Jordan e  $A$  é a área da região que o traço de  $\alpha$  delimita, então*

$$L^2 - 4\pi A \geq 0. \quad (4.6)$$

Além disso, a igualdade ocorre em (4.6), se e somente se o traço de  $\alpha$  é um círculo.

**Prova.** Inicialmente, sejam  $E$  e  $F$  duas retas paralelas, tais que o traço de  $\alpha$  está contido na região entre elas. Em seguida, desloquemos essas retas “paralelamente” até interceptarem o traço de  $\alpha$ . Assim obtemos duas retas paralelas,  $E'$  e  $F'$ , tangentes à curva  $\alpha$  (veja figura) em  $P$  e  $Q$ .



Seja  $\bar{\alpha}$  uma curva cujo traço descreve um círculo tangente às retas  $E'$  e  $F'$  em  $\bar{P}$  e  $\bar{Q}$ , respectivamente, o qual não intercepta o traço de  $\alpha$ . Denotemos por  $r$  o raio desse círculo e tomemos seu centro como a origem do sistema de coordenadas. Podemos supor, sem perda de generalidade, que  $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  está parametrizada pelo comprimento de arco,  $\alpha(0) = P$ ,  $\alpha$  está orientada positivamente,  $\alpha(s_0) = Q$  e, em relação a esse sistema de

coordenadas,  $\alpha$  seja dada por

$$\alpha(s) = (x(s), y(s)), \quad s \in [0, L], \quad \text{com } \alpha(0) = \alpha(L).$$

Agora  $\bar{\alpha}$  pode ser parametrizado por  $\bar{\alpha} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$\bar{\alpha}(s) = (\bar{x}(s), \bar{y}(s)),$$

onde

$$\bar{x}(s) = x(s)$$

e

$$\bar{y}(s) = \begin{cases} -\sqrt{r^2 - (x(s))^2}, & 0 \leq s \leq s_0, \\ \sqrt{r^2 - (x(s))^2}, & s_0 \leq s \leq L. \end{cases}$$

Observe que  $\bar{\alpha}(0) = \bar{\alpha}(L) = \bar{P}$ .

Finalmente, vamos obter a estimativa (4.6). De fato, seja  $\bar{A}$  a área limitada pelo traço de  $\bar{\alpha}$ . Usando o Lema 4.2, temos que

$$A = \int_0^L x(s)y'(s) \, ds \quad \text{e} \quad \bar{A} = - \int_0^L \bar{y}(s)x'(s) \, ds = \pi r^2.$$

Portanto

$$\begin{aligned} A + \pi r^2 &= \int_0^L x(s)y'(s) - \bar{y}(s)x'(s) \, ds \\ &\leq \int_0^L \sqrt{(x(s)y'(s) - \bar{y}(s)x'(s))^2} \, ds \\ &= \int_0^L \sqrt{x^2(y')^2 - 2xy'\bar{y}x' + \bar{y}^2(x')^2} \, ds. \end{aligned}$$

Visto que

$$-2ab \leq a^2 + b^2, \quad \text{onde } a, b \in \mathbb{R}, \quad (4.7)$$

obtemos

$$\begin{aligned}
 A + \pi r^2 &\leq \int_0^L \sqrt{(x y'(s))^2 + (x x'(s))^2 + (\bar{y} y'(s))^2 + (\bar{y} x'(s))^2} ds \\
 &= \int_0^L \sqrt{((x(s))^2 + (\bar{y}(s))^2)((x'(s))^2 + (y'(s))^2)} ds \\
 &= \int_0^L \sqrt{((x(s))^2 + (\bar{y}(s))^2)} ds \\
 &= \int_0^L \sqrt{((\bar{x}(s))^2 + (\bar{y}(s))^2)} ds \\
 &= \int_0^L r ds = Lr.
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Usando o fato de que

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2),$$

com  $a \geq 0$  e  $b \geq 0$ , vemos que

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2} \leq \frac{1}{2}(A + \pi r^2) \leq \frac{1}{2}Lr. \tag{4.9}$$

Concluimos, portanto, que

$$L^2 - 4\pi A \geq 0.$$

Admitamos a ocorrência da igualdade em (4.6), ou seja,  $L^2 = 4\pi A$ . Logo, usando (4.9), temos que  $A\pi r^2 = \frac{1}{4}(A + \pi r^2)^2$ , isto é,  $(A - \pi r^2)^2 = 0$ . Portanto  $A = \pi r^2$ . Assim  $L = 2\pi r$  e, conseqüentemente, a distância  $2r$  entre  $E'$  e  $F'$  não depende da escolha da direção comum dessas retas. Além disso, a igualdade em (4.8) implica que vale a igualdade em (4.7), isto é,

$$x'(s)x(s) = a = -b = -\bar{y}(s)y'(s).$$

Segue-se que

$$(x'(s)x(s))^2 + (y'(s)x(s))^2 = (y'(s)x(s))^2 + (\bar{y}(s)y'(s))^2.$$

Logo

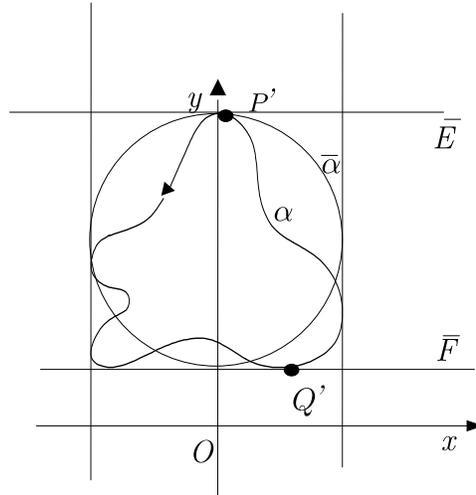
$$\begin{aligned} (x(s))^2 &= [(x'(s))^2 + (y'(s))^2](x(s))^2 \\ &= [(x(s))^2 + (\bar{y}(s))^2](y'(s))^2 = r^2(y'(s))^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$(x(s))^2 = r^2(y'(s))^2. \quad (4.10)$$

Sejam  $P'$  e  $Q'$  pontos sobre o traço de  $\alpha$  tais que suas coordenadas  $y$  sejam máxima e mínima, respectivamente. Como  $\alpha$  é diferenciável nesses pontos, as retas tangentes à curva  $\alpha$  em  $P'$  e  $Q'$  são paralelas ao eixo  $Ox$ . Considere  $\bar{E}$  e  $\bar{F}$  essas retas tangentes. Pelo que já provamos, a distância entre essas retas é  $2r$ . Transladando-se o círculo  $\bar{\alpha}$  por um vetor  $(0, a)$ , de modo a que ele fique tangente às retas  $\bar{E}$  e  $\bar{F}$  (ver figura abaixo), podemos repetir o argumento da prova de (4.10) e obter que

$$(y(s) + a)^2 = r^2(x'(s))^2. \quad (4.11)$$



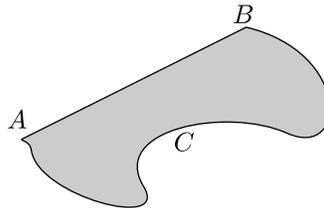
Portanto, somando-se (4.10) e (4.11), temos

$$(x(s))^2 + (y(s) + a)^2 = r^2[(x'(s))^2 + (y'(s))^2] = r^2.$$

Isso significa que o traço de  $\alpha$  é um círculo.  $\square$

### 4.3 Exercícios

1. Existe uma curva fechada e simples com comprimento de 6 metros que delimite uma região de 3 metros quadrados?
2. Seja  $\overline{AB}$  um segmento de reta de comprimento menor que  $l_0$ . Prove que o traço da curva  $C$ , que liga os pontos  $A$  e  $B$ , possui comprimento  $l_0$  e tem a propriedade que  $C \cup \overline{AB}$  delimita a região de maior área, é um arco de círculo de comprimento  $l_0$  passando por  $A$  e  $B$ .



3. Mostre que a curva de Hilbert (exemplo de Moore) não é simples.



# Capítulo 5

## Curvas Convexas

Neste capítulo, estudaremos as propriedades geométricas das curvas regulares cuja curvatura não troca de sinal. Inicialmente, introduziremos o conceito de curva localmente convexa.

**Definição 5.1** Dizemos que uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é convexa em  $t_0 \in I$ , se existe  $\delta > 0$ , tal que  $\alpha((t_0 - \delta, t_0 + \delta))$  esteja inteiramente contido num dos semi-planos determinados pela reta tangente à  $\alpha$  em  $t_0$ . A curva  $\alpha$  é dita estritamente convexa em  $t_0$ , se  $\alpha$  é convexa em  $t_0$  e existe  $\delta > 0$ , tal que  $\alpha(t_0)$  é o único ponto de  $\alpha((t_0 - \delta, t_0 + \delta))$  sobre a reta tangente de  $\alpha$  em  $t_0$ .

A definição de curva convexa em  $t_0$  implica que, para todo  $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ , a função definida por

$$h_{t_0}(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), N(t_0) \rangle,$$

onde  $N(t)$  é o campo normal de  $\alpha$ , não muda de sinal.

**Proposição 5.1** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular e de classe  $\mathcal{C}^2$ . Se a curvatura de  $\alpha$  em  $t_0 \in I$  é não-nula, então  $\alpha$  é estritamente convexa em  $t_0$ .

**Prova.** Suponha que  $k(t_0) > 0$ . Pela observação acima, devemos provar que existe  $\delta > 0$ , tal que a função  $h_{t_0}$  seja não-negativa em  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ , e  $h_{t_0}(t) = 0$  nesse intervalo, se e somente se  $t = t_0$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que a curva está parametrizada pelo comprimento de arco. Nesse caso,

$$h'_{t_0}(t_0) = \langle \alpha'(t_0), N(t_0) \rangle = 0$$

e

$$h''_{t_0}(t_0) = k(t_0) > 0.$$

Portanto  $t_0$  é um ponto de mínimo estrito local de  $h_{t_0}$ . Como  $h_{t_0}(t_0) = 0$ , existe  $\delta > 0$ , tal que  $h_{t_0}(t) > 0$ , para todo  $0 < |t - t_0| < \delta$ . Isso conclui a prova no caso em que  $k(t_0) > 0$ . A prova no caso em que  $k(t_0) < 0$  é análoga.

□

O próximo resultado nos permite considerar o caso em que a curvatura se anula, mas não muda de sinal.

**Proposição 5.2** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular com curvatura  $k$ . Suponha que existe  $\delta > 0$ , tal que, para todo  $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset I$ ,  $k(t) \geq 0$ . Então  $\alpha$  é convexa em  $t_0$ . Além disso, o traço de  $\alpha|_{(t_0 - \delta, t_0 + \delta)}$  está contido no semi-plano determinado pela reta tangente à curva  $\alpha$  em  $t_0$  para o qual aponta o vetor  $N(t_0)$ .*

**Prova.** Escolha o sistema de coordenadas de  $\mathbb{R}^2$  de modo que  $\alpha(t_0) = (0, 0)$ ,  $T(t_0) = (1, 0)$  e  $N(t_0) = (0, 1)$ . Suponha, sem perda de generalidade, que  $\alpha$  esteja parametrizada pelo comprimento de arco e, em relação ao sistema de coordenadas acima, seja dada por

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)).$$

A prova reduz-se, nesse caso, a mostrar que existe  $\delta_1 > 0$ , tal que  $y(t) \geq 0$ , para todo  $t \in (t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1)$ . Considere a função  $\theta$ , definida por

$$\theta(t) = \int_{t_0}^t k(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Pela equação (1.15),

$$(x'(t), y'(t)) = \alpha'(t) = (\cos \theta(t), \operatorname{sen} \theta(t)).$$

Como  $k(t) \geq 0$ ,  $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ , existe  $0 < \delta_1 \leq \delta$ , tal que

$$y'(t) = \operatorname{sen} \theta(t) \geq 0, \quad \text{se } t_0 \leq t \leq t_0 + \delta_1,$$

e

$$y'(t) = \operatorname{sen} \theta(t) \leq 0, \quad \text{se } t_0 - \delta_1 \leq t \leq t_0.$$

Logo a função  $y$  é não-crescente no intervalo  $[t_0 - \delta_1, t_0]$  e não-decrescente em  $[t_0, t_0 + \delta_1]$ . Como  $y(t_0) = 0$ , temos que  $y(t) \geq 0$ , para todo  $t \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]$ , o que conclui a prova.  $\square$

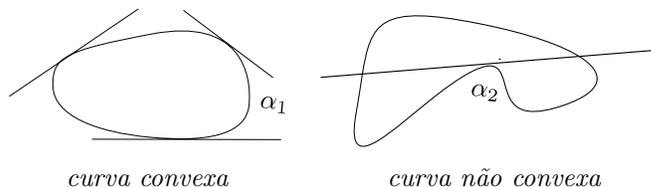
## 5.1 Curvas Fechadas e Convexas

Dizemos que uma curva regular  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é *convexa*, se, para cada  $t_0 \in [a, b]$ , o traço de  $\alpha$  está inteiramente contido em um dos semi-planos determinados pela reta tangente à  $\alpha$  em  $t_0$ . De modo mais preciso, ser convexa significa que, para todo  $t_0 \in [a, b]$ , a função  $h_{t_0}$ , definida por

$$h_{t_0}(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), N(t_0) \rangle,$$

não muda de sinal em  $[a, b]$ . Em particular,  $\alpha$  é convexa em todo  $t \in [a, b]$ . A curva  $\alpha$  é dita estritamente convexa em  $t_0$ , se o

traço de  $\alpha$ , exceto pelo ponto  $\alpha(t_0)$ , está inteiramente contido no semi-plano aberto determinado pela reta tangente à curva  $\alpha$  em  $\alpha(t_0)$ . Em termos da função  $h_{t_0}$ , definida acima, esta propriedade significa que  $h_{t_0}$  somente se anula em  $t = t_0$ .



Na seção anterior, vimos que a noção de convexidade está fortemente ligada com a curvatura de  $\alpha$ . De fato, para curvas fechadas e simples, obtemos o seguinte resultado:

**Teorema 5.1** *Uma curva regular, fechada e simples  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é convexa, se e somente se sua curvatura não muda de sinal.*

**Prova.** Como  $\alpha$  é uma curva de Jordan, pelo Teorema de Jordan, seu traço delimita uma região limitada e conexa  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Orientando  $\alpha$  de modo que em algum  $s_0 \in [a, b]$  o vetor normal no ponto  $\alpha(s_0)$  aponta para a região  $\Omega$ . Pela continuidade do vetor normal  $N$  de  $\alpha$ , temos que, para todo  $s \in [a, b]$ ,  $N(s)$  aponta para  $\Omega$ . Observe que em  $s_0$ ,  $k(s_0) \geq 0$ , uma vez que o traço de  $\alpha$  está contido no semi-plano determinado pela reta tangente a  $\alpha$  em  $s_0$ . Como  $k$  não muda de sinal,  $k(s) \geq 0$ , para todo  $s \in [a, b]$ . Vamos provar que  $\alpha$  é convexa. Fixe  $s_1 \in [a, b]$  e vamos mostrar que a função

$$h_{s_1}(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_1), N(s_1) \rangle,$$

não muda de sinal em  $[a, b]$ . Suponha, por contradição que isso não ocorre. Como  $h_{s_1}$  é contínua, ela assume um mínimo negativo e um máximo positivo em pontos  $s_2$  e  $s_3$ , distintos de  $s_1$ .

Como  $h'_{s_1}(s) = \langle \alpha'(s), N(s_1) \rangle$ , as retas tangentes à curva  $\alpha$  em  $s_1$ ,  $s_2$  e  $s_3$  são paralelas. Por hipótese,  $\alpha$  é uma curva simples. Logo, pelo Teorema 3.3, seu índice de rotação é  $R_\alpha = \pm 1$  e com a orientação que escolhermos,  $R_\alpha = 1$ . Seja  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função angular para indicatriz tangente de  $\alpha$  em relação a  $(0, 0)$ , com  $\phi(a) = 0$ . Observe que, pela equação (3.1), a derivada de  $\phi$  é dada por  $\phi'(t) = k(t)\|\alpha'(t)\| \geq 0$ . Logo  $\phi$  é não-decrescente. Como  $R_\alpha = 1$  e  $\phi$  é não-decrescente, a imagem de  $\phi$  é o intervalo  $[0, 2\pi]$ . Como temos pelo menos três pontos do traço de  $\alpha$  com retas tangentes paralelas, em pelo menos dois desses pontos, a função  $\phi$  possui o mesmo valor. Como  $\phi$  é não-decrescente, ela deve ser constante em algum intervalo da forma  $[s_i, s_j]$ ,  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . Isto significa que o traço de  $\alpha$  contém um segmento de reta ligando  $\alpha(s_i)$  a  $\alpha(s_j)$ . Portanto  $h_{s_1}(s_i) = h_{s_1}(s_j) = 0$ , o que contradiz a escolha dos pontos  $s_2$  e  $s_3$ . Logo  $h_{s_1}$  não muda de sinal. Como  $s_1$  é arbitrário em  $[a, b]$ ,  $\alpha$  é convexa.

Reciprocamente, vamos provar que, com essa orientação escolhida anteriormente,  $k(s) \geq 0$ . Suponha que para algum  $s_1 \in [a, b]$ ,  $k(s_1) < 0$ . Escolhemos um sistema de coordenadas de  $\mathbb{R}^2$  de modo que

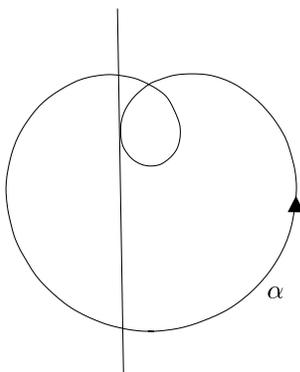
$$\begin{cases} \alpha(s_1) &= (s_1, 0), \\ \alpha'(s_1) &= (1, 0). \end{cases}$$

Nesse caso, podemos reparametrizar uma vizinhança do ponto  $\alpha(s_1)$  de modo que o traço de  $\alpha$  seja dado pelo gráfico de uma função  $f : (s_1 - \varepsilon, s_1 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ . Observe que, como  $k(s_1) < 0$ , pela equação (1.17), para  $s$  suficientemente próximo de  $s_1$ ,

$$\langle \alpha(s) - \alpha(s_1), N(s_1) \rangle = \frac{k(s_1)}{2}(s - s_1)^2 + R(s) < 0,$$

onde  $\lim_{s \rightarrow s_1} \frac{\|R(s)\|}{(s - s_1)^2} = 0$ . Isso implica que, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno,  $f(s) > 0$ , se  $0 < |s - s_1| < \varepsilon$ . Como  $k(s_1) < 0$ , temos  $N(s_1) = (0, -1)$  e, portanto, existem pontos do traço de  $\alpha$  com a coordenada  $y < 0$ . Por outro lado, a reta tangente à  $\alpha$  em  $\alpha(s_1)$  é a reta  $y = 0$ . Logo existem pontos do traço de  $\alpha$  de ambos os lados dessa reta, contradizendo a hipótese que  $\alpha$  é uma curva convexa.  $\square$

**Observação 5.1** *A condição que  $\alpha$  é uma curva simples é essencial no Teorema 5.1, como pode ser observado na figura abaixo.*



*A curva  $\alpha$  possui curvatura sempre positiva, mas não é convexa.*

Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva de Jordan. Pelo Teorema de Jordan, ela delimita uma região  $\Omega$  do plano. Uma pergunta natural: quais as propriedades devem ter o conjunto  $\Omega$ , se a curva  $\alpha$  for convexa? Veremos que, de fato,  $\Omega$  deve ser convexo como conjunto de  $\mathbb{R}^2$ . Para entender melhor esse fato, vamos lembrar o que significa um conjunto de  $\mathbb{R}^2$  ser convexo. Vamos inicialmente introduzir alguma notação. Dados dois pontos  $P$  e

$Q$ , vamos denotar por  $[PQ]$  o segmento de reta de extremos  $P$  e  $Q$ , isto é,

$$[PQ] = \{tQ + (1-t)P, 0 \leq t \leq 1\}.$$

De modo análogo, o segmento aberto de extremos  $P$  e  $Q$  é dado por

$$]PQ[ = \{tQ + (1-t)P, 0 < t < 1\}.$$

Com essa notação, lembramos que um conjunto  $A$  é convexo, se e somente se para todo par de pontos  $P, Q$  de  $A$ ,  $[PQ] \subset A$ .

Dado um ponto  $P \in A$ , se  $B_\varepsilon(P) = \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid \|P - Q\| < \varepsilon\}$ , então umas das três possibilidades abaixo podem ocorrer:

1. Existe  $\varepsilon > 0$ , tal que  $B_\varepsilon(P) \subset A$ . Nesse caso,  $P$  é dito ponto interior de  $A$ .
2. Existe  $\varepsilon > 0$ , tal que  $B_\varepsilon(P) \cap A = \emptyset$ . Nesse caso,  $P$  é dito ponto exterior de  $A$ .
3. Para todo  $\varepsilon > 0$ ,  $B_\varepsilon(P) \cap A \neq \emptyset$  e  $B_\varepsilon(P) \cap (\mathbb{R}^2 - A) \neq \emptyset$ . Nesse caso,  $P$  é dito ponto de fronteira de  $A$ .

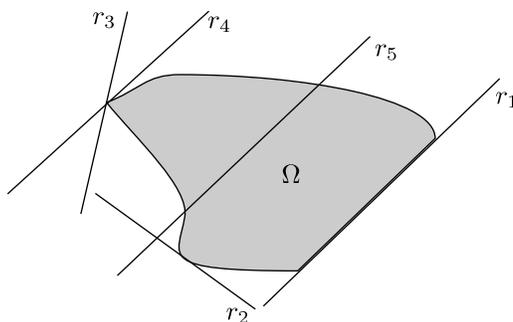
O conjunto de pontos interiores de  $A$  é chamado de interior de  $A$  e será denotado  $\overset{\circ}{A}$  ou  $\text{int}A$ . O conjunto de pontos de fronteira é chamado fronteira ou bordo de  $A$  e será denotado por  $\partial A$ . O fecho de  $A$  é dado por  $\overset{\circ}{A} \cup \partial A$  e será denotado por  $\bar{A}$ . A primeira propriedade que iremos provar é uma caracterização dos conjuntos convexos de  $\mathbb{R}^2$  com interior vazio.

**Proposição 5.3** *Seja  $\Omega$  um conjunto convexo de  $\mathbb{R}^2$  com interior vazio. Então  $\Omega$  está contido em uma reta.*

**Prova.** Se  $\Omega$  possui no máximo um ponto, nada há que se provar. Suponha que existam dois pontos distintos  $P$  e  $Q$  em  $\Omega$ . Como  $\Omega$  é convexo,  $[PQ] \subset \Omega$ . Vamos provar que  $\Omega$  está contido na reta  $r$  determinada por  $P$  e  $Q$ . Suponha por contradição que existe um ponto  $T \in \Omega$  com  $T \notin r$ . Sendo  $\Omega$  convexo, ele contém todos os segmentos de reta da forma  $[TX]$ , com  $X \in [PQ]$ . Portanto  $\Omega$  contém a região limitada pelo triângulo  $\triangle PQT$ . Como essa região possui pontos interiores, chegamos a uma contradição com o fato que o interior de  $\Omega$  é vazio. □

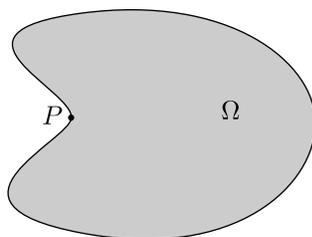
Uma noção útil para o estudo de conjuntos convexos é a reta suporte.

**Definição 5.2** *Sejam  $A \subset \mathbb{R}^2$  e seja  $P \in \bar{A}$ . Diremos que uma reta  $r$  passando por  $P$  é uma reta suporte para  $A$  em  $P$ , se  $A$  estiver totalmente contido em um dos semi-planos fechados determinados por  $r$ .*



$r_1, r_2, r_3$  e  $r_4$  são retas suporte para  $\Omega$ ;  $r_5$  não é reta suporte para  $\Omega$ .

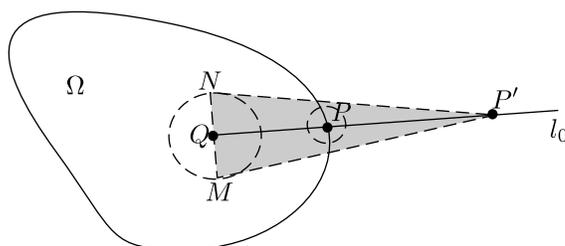
Observe que, se  $P \in \overset{\circ}{A}$ , então não existem retas suporte para  $A$  passando por  $P$ . Mesmo para pontos da fronteira de  $A$ , podem não existir reta suporte passando por esses pontos.



No entanto, conjuntos convexos possuem reta suporte passando por todo ponto de sua fronteira, como mostra o seguinte resultado:

**Proposição 5.4** *Se  $\Omega$  é convexo e  $P \in \partial\Omega$ , então existe uma reta suporte para  $\Omega$  passando por  $P$ .*

**Prova.** Se o interior de  $\Omega$  é vazio, o resultado segue da Proposição 5.3. Suponhamos que  $\overset{\circ}{\Omega} \neq \emptyset$  e seja  $Q \in \overset{\circ}{\Omega}$ . Seja  $\overrightarrow{QP}$  a semi-reta com origem em  $Q$  e passando por  $P$ . Considere  $l_0$  a semi-reta com origem em  $P$  e que está contida em  $\overrightarrow{QP}$ . Vamos provar inicialmente que  $l_0$  intersecta  $\overline{\Omega}$  apenas no ponto  $P$ . Por contradição, suponha que existe  $P' \neq P$ , com  $P' \in \overline{\Omega} \cap l_0$ . Como  $Q$  está no interior de  $\Omega$ , existe uma bola aberta  $B_\epsilon(Q)$  inteiramente contida em  $\Omega$  e, portanto, existe um segmento de reta  $]MN[$ , centrado em  $Q$ , de comprimento  $2\epsilon$ , perpendicular a  $\overrightarrow{QP}$  e que está inteiramente contido em  $\Omega$ . Sendo  $\Omega$  convexo, para todo  $X \in ]MN[$ , o segmento  $[XP']$  está contido em  $\Omega$ . Portanto  $\Omega$  contém a região limitada pelo triângulo  $\triangle MNP'$  e  $P$  é um ponto do interior dessa região, contradizendo o fato de  $P \in \partial\Omega$ .

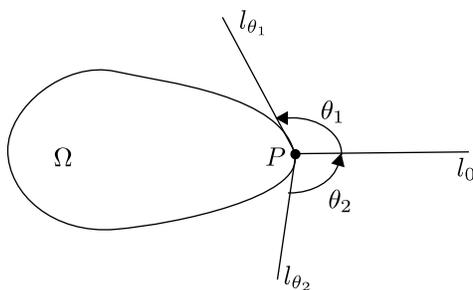


Seja  $u_0$  o vetor diretor unitário para a semi-reta  $l_0$ , isto é  $l_0 = \{P + tu_0, t \geq 0\}$ . Considere agora  $l_\theta$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , a semi-reta com origem em  $P$  e com vetor diretor  $u_\theta$ , onde  $\theta = \angle(u_0, u_\theta)$ . Sejam

$$\theta_1 = \sup\{\theta \mid \overline{\Omega} \cap l_\theta = \{P\}\}$$

e

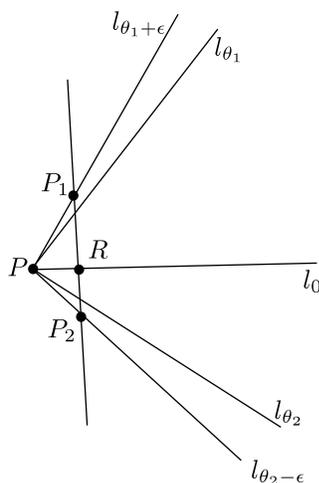
$$\theta_2 = \sup\{\theta \mid \overline{\Omega} \cap l_{2\pi-\theta} = \{P\}\}.$$



Observe que  $\theta_1 + \theta_2 \geq \pi$ . De fato, se  $\theta_1 + \theta_2 < \pi$ , temos que as semi-retas  $l_{\theta_1+\epsilon}$  e  $l_{\theta_2-\epsilon}$ , com  $0 < \epsilon < \frac{\pi-\theta_1-\theta_2}{2}$ , são tais que:

1. Existem  $P_1 \in l_{\theta_1+\epsilon} \cap \overline{\Omega}$  e  $P_2 \in l_{\theta_2-\epsilon} \cap \overline{\Omega}$ , com  $P_i \neq P$ ,  $i = 1, 2$ ;
2. O ângulo entre essas semi-retas é menor que  $\pi$ ;
3. A semi-reta  $l_0$  divide o ângulo determinado por  $l_{\theta_1+\epsilon}$  e  $l_{\theta_2-\epsilon}$ .

Como  $\Omega$  é convexo, o segmento  $[P_1P_2]$  está contido em  $\Omega$  e pelas propriedades 2 e 3 acima, segue-se que  $[P_1P_2] \cap l_0 = \{R\}$ , com  $R \neq P$ , o que contradiz o fato que  $l_0 \cap \Omega = \{P\}$ .



Uma vez que  $\theta_1 + \theta_2 > \pi$ , temos que qualquer reta  $r$  passando por  $P$  e contida na região limitada por  $l_{\theta_1+\epsilon}$  e  $l_{\theta_2-\epsilon}$ , que não contém  $\Omega$  é reta suporte para  $\Omega$  passando por  $P$ .

□

O próximo resultado será útil na prova da relação entre a convexidade de uma curva de Jordan e a convexidade da região que ela delimita.

**Lema 5.1** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva de Jordan, regular e de classe  $C^1$  e seja  $\Omega$  o fecho da região delimitada pelo traço de  $\alpha$ . Se  $\Omega$  é um conjunto convexo, então, para todo  $t \in [a, b]$ , a reta tangente à curva  $\alpha$  em  $t$  é a única reta suporte para  $\Omega$  passando por  $\alpha(t)$ .*

**Prova.** Como  $\partial\Omega = \text{traço de } \alpha$ , a existência da reta suporte em cada ponto  $\alpha(t)$  é garantida pela Proposição 5.4. Vamos provar a unicidade de tal reta. Fixe  $t_0 \in [a, b]$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco e vamos orientá-la de modo que  $N(t_0)$  aponte

para região  $\Omega$ . Vamos escolher o sistema de coordenadas de  $\mathbb{R}^2$  de modo que

$$P = \alpha(t_0) = (t_0, 0) \quad \text{e} \quad \alpha'(t_0) = (1, 0).$$

Com essa escolha,  $N(t_0) = (0, 1)$  e a reta tangente à curva  $\alpha$  em  $t_0$  é o eixo  $0x$ . Usando a Proposição 1.2, existe  $\epsilon > 0$  tal que a parte do traço de  $\alpha$  que está contida na bola  $B_\epsilon(P)$  de centro  $P$  e raio  $\epsilon$  é o gráfico de uma função diferenciável  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $I$  é um intervalo contendo  $t_0$ . Da escolha do sistema de coordenadas, temos que

$$f(t_0) = 0 \quad \text{e} \quad f'(t_0) = 0.$$

Diminuindo-se  $\epsilon$ , se necessário, podemos afirmar que

$$\text{int}\Omega \cap B_\epsilon(P) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - t_0)^2 + y^2 < \epsilon^2 \text{ e } y > f(x)\}.$$

Vamos provar que toda reta que passa por  $P$ , diferente do eixo  $0x$ , passa por pontos do interior de  $\Omega$  e, portanto, não pode ser reta suporte para  $\Omega$ . Seja  $r$  uma tal reta. A equação de  $r$  é da forma

$$y = m(x - t_0), \quad m \in \mathbb{R}, \quad m \neq 0.$$

Observe que,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow t_0} \frac{m(x - t_0) - f(x)}{x - t_0} &= m - \lim_{x \rightarrow t_0} \frac{f(x)}{x - t_0} \\ &= m - \lim_{x \rightarrow t_0} \frac{f(x) - f(t_0)}{x - t_0} = m - f'(t_0) = m. \end{aligned}$$

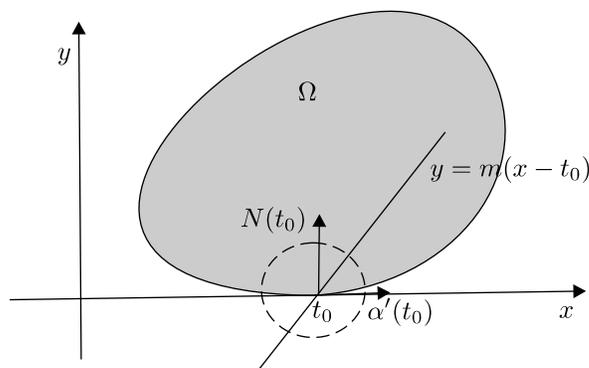
Suponha que  $m > 0$ . Pela definição de limite, dado  $\varepsilon > 0$ , com  $0 < \varepsilon < m$ , existe  $\delta > 0$ , tal que para todo  $x$ , com  $0 < x - t_0 < \delta$ , tem-se que  $(x, f(x)) \in B_\epsilon(P)$ ,  $(x, m(x - t_0)) \in B_\epsilon(P)$  e

$$m - \varepsilon < \frac{m(x - t_0) - f(x)}{x - t_0} < m + \varepsilon.$$

Logo, pela escolha de  $\varepsilon$ , temos que

$$m(x - t_0) - f(x) > 0,$$

ou seja,  $m(x - t_0) > f(x)$ .



Portanto  $(x, m(x - t_0)) \in \text{int}\Omega \cap B_\varepsilon(P)$  para todo  $x$ , com  $0 < x < \delta$ . Isso implica que existem pontos da reta  $r$  no interior de  $\Omega$ . A prova no caso em que  $m < 0$  é análoga.

□

Podemos finalmente provar a relação entre a convexidade de uma curva de Jordan e a convexidade da região que ela delimita.

**Teorema 5.2** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva de Jordan, regular e de classe  $\mathcal{C}^1$  e seja  $\Omega$  a região delimitada pelo traço de  $\alpha$ . Então  $\Omega$  é uma região convexa, se e somente se a curva  $\alpha$  é convexa.*

**Prova** Observe que, se  $\Omega$  é convexo, então  $\overline{\Omega}$  é convexo. Logo, para cada  $t \in [a, b]$ , o lema anterior nos diz que  $\overline{\Omega}$  está inteiramente contido em um dos semi-planos fechados determinados pela reta tangente à  $\alpha$  em  $\alpha(t)$ . Claramente, todo  $Q \in$

$\partial\bar{\Omega}$  = traço de  $\alpha$  também está nesse semi-plano, o que prova que  $\alpha$  é convexa.

Reciprocamente, suponha que  $\alpha$  é uma curva convexa. Para cada  $t \in [a, b]$ , seja  $\mathcal{H}_t$  o semi-plano fechado determinado pela reta tangente à  $\alpha$  em  $t$  que contém o traço de  $\alpha$ . Considere

$$\mathcal{H} = \bigcap_{t \in [a, b]} \mathcal{H}_t.$$

Como cada  $\mathcal{H}_t$  é um conjunto convexo, segue-se que  $\mathcal{H}$  também é convexo. Vamos provar inicialmente que

$$\bar{\Omega} = \mathcal{H},$$

e, portanto,  $\bar{\Omega}$  é um conjunto convexo. Seja  $P \in \mathbb{R}^2 - \mathcal{H}$ . Pela definição de  $\mathcal{H}$ , existe  $t_0 \in [a, b]$ , tal que  $P \in \mathbb{R}^2 - \mathcal{H}_{t_0}$ . Logo a reta  $r$  paralela à reta tangente a  $\alpha$  em  $t_0$ , que passa por  $P$ , não intersecta o traço de  $\alpha$ . Usando a fórmula do número de interseções, com uma das semi-retas de  $r$  com origem  $P$ , concluímos que  $W(\alpha, p) = 0$ . Portanto  $P \notin \bar{\Omega}$ . Provamos, então, que  $\bar{\Omega} \subset \mathcal{H}$ . Suponha agora que  $P \notin \bar{\Omega}$  e seja  $t_0 \in [a, b]$ , tal que  $\alpha(t_0)$  é o ponto do traço de  $\alpha$  mais próximo de  $P$ , isto é,  $t_0$  é o mínimo absoluto da função, dada por

$$p(t) = \|\alpha(t) - P\|^2 = \langle \alpha(t) - P, \alpha(t) - P \rangle.$$

Como  $p$  é diferenciável,  $p'(t_0) = 0$ , o que implica que

$$\langle \alpha'(t_0), \alpha(t_0) - P \rangle = 0.$$

Vamos provar que  $P \notin \mathcal{H}_{t_0}$ . Caso  $P \in \mathcal{H}_{t_0}$ , a semi-reta de origem  $P$  passando por  $\alpha(t_0)$  intersecta o traço de  $\alpha$  apenas em  $\alpha(t_0)$  (caso contrário,  $\alpha(t_0)$  não seria o ponto do traço de  $\alpha$  mais próximo de  $P$ ) e é perpendicular ao traço de  $\alpha$  nesse

ponto. Usando a fórmula do número de interseções, temos que  $W(\alpha, p) = \pm 1$ , o que contradiz o fato que  $P \notin \bar{\Omega}$ . Logo  $\mathcal{H} \subset \bar{\Omega}$ . Mostramos, portanto, que  $\mathcal{H} = \bar{\Omega}$ . Vamos provar agora que  $\Omega$  é convexo. Sejam  $P, Q \in \Omega$ . Visto que  $\bar{\Omega}$  é convexo,  $[PQ] \subset \bar{\Omega}$ . Suponha, por contradição, que existe  $t_1 \in [a, b]$ , tal que  $\alpha(t_1) \in [PQ]$ . A convexidade de  $\bar{\Omega}$ , pelo Lema 5.1, implica que  $[PQ]$  deve estar contido na reta tangente à curva  $\alpha$  em  $t_1$ , uma vez que essa é a reta suporte para  $\bar{\Omega}$  passando por  $\alpha(t_1)$ . Logo  $P$  e  $Q$  seriam pontos de  $\partial\Omega$ , o que é uma contradição.  $\square$

Segue-se da convexidade da região limitada por uma curva convexa, o seguinte resultado:

**Corolário 5.1** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva de Jordan, regular e de classe  $\mathcal{C}^1$ . Se  $r$  é uma reta transversal ao traço de  $\alpha$ , então  $r$  intersecta o traço de  $\alpha$  em exatamente dois pontos.*

Veremos a seguir que a indicatriz tangente de uma curva fechada e simples é sobrejetiva.

**Proposição 5.5** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada, regular e simples. Então existe uma orientação de  $\alpha$ , tal que*

$$T(A) = \mathbb{S}^1,$$

onde  $A = \{t \in [a, b] \mid k(t) \geq 0\}$ ,  $T$  é a indicatriz tangente de  $\alpha$  e  $\mathbb{S}^1$  é o círculo unitário.

**Prova.** Como  $\alpha$  é regular, podemos supor, sem perda de generalidade, que  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco. Inicialmente, pelo Teorema de Jordan, podemos supor que  $\alpha$  está orientada de modo que seu campo normal  $N$  aponta sempre para

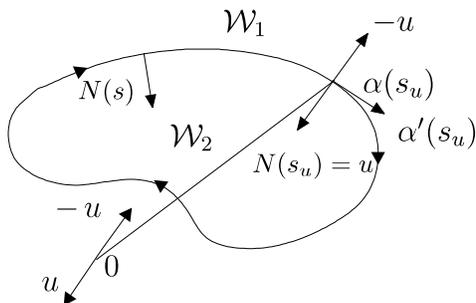
a região  $\mathcal{W}_2$ , limitada pelo traço de  $\alpha$ . Seja  $v \in \mathbb{S}^1$ . Considere a função altura  $p$ , definida por

$$p(s) = \langle u, \alpha(s) \rangle,$$

onde  $u = v^\perp$  é o vetor obtido de  $v$  pela rotação de  $\frac{\pi}{2}$ . Observe que, como  $p$  é uma função diferenciável em  $[a, b]$ ,  $p$  possui um mínimo global em  $s_u \in [a, b]$  e, portanto,

$$0 = p'(s_u) = \langle u, \alpha'(s_u) \rangle.$$

Assim, em  $s_u$ ,  $u = \pm N(s_u)$ .



Considere a função auxiliar  $f$  medindo a distância “orientada por  $u$ ” de  $\alpha(s)$  até a reta tangente à  $\alpha$  em  $s_u$ , mais precisamente,

$$f(s) = \langle u, \alpha(s) - \alpha(s_u) \rangle.$$

Temos que  $f(s_u) = 0$  e  $f$  possui um mínimo global em  $s_u$ , visto que  $f$  difere de  $p$  por uma constante. Com isso, concluímos que o traço de  $\alpha$  está inteiramente contido no semi-plano determinado pela reta tangente à  $\alpha$  em  $s_u$ , para o qual aponta o vetor  $u$ . Esse fato acarreta que

$$u = N(s_u).$$

Usando que  $s_u$  é ponto de mínimo de  $p$ , obtemos

$$k(s_u) = \langle \alpha''(s_u), N(s_u) \rangle = \langle \alpha''(s_u), u \rangle = p''(s_u) \geq 0$$

e, portanto,  $s_u \in A$ . Além disso, pela construção de  $u$ ,

$$T(s_u) = v.$$

Provamos assim, que, para todo  $v \in \mathbb{S}^1$ , existe  $s \in A$ , tal que  $T(s) = v$ , isto é,  $T(A) = \mathbb{S}^1$ . □

Desse último resultado decorre imediatamente o seguinte fato.

**Corolário 5.2** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada, regular e simples e seja  $T : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$  sua indicatriz tangente. Então  $T$  é sobrejetiva.*

O próximo resultado vai estimar a integral da curvatura de uma curva fechada, regular e simples, ao longo dos arcos em que a curvatura é não-negativa.

**Proposição 5.6** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada, regular e simples. Então existe uma orientação de  $\alpha$ , tal que, se  $k$  é integrável no conjunto  $A = \{t \in [a, b] \mid k(t) \geq 0\}$ , então*

$$\frac{1}{2\pi} \int_A k(t) \|\alpha'(t)\| dt \geq 1.$$

**Prova.** Pela Proposição 5.5, existe uma orientação de  $\alpha$ , tal que a imagem de  $A$  pela indicatriz tangente  $T$  é o círculo unitário  $\mathbb{S}^1$ . Nesse caso, o comprimento de  $T|_A$  é maior ou igual a  $2\pi$ . Logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_A k(s) ds &= \frac{1}{2\pi} \int_A |k(s)| ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_A \|\alpha''(s)\| ds = \frac{1}{2\pi} \mathcal{L}(T|_A) \geq 1. \end{aligned} \quad \square$$

**Observação 5.2** A hipótese de que  $\alpha$  é uma curva simples é essencial na Proposição 5.6. De fato, a curva  $\alpha : [-\pi/2, 3\pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\alpha(t) = (\cos t, \cos t \sin t),$$

é tal que

$$k(t) = \frac{\cos t(1 + 2 \sin^2 t)}{(1 - 3 \sin^2 t + 4 \sin^4 t)^{3/2}}.$$

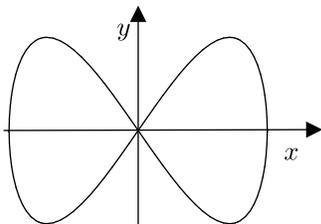
Logo  $A = [-\pi/2, \pi/2]$  e

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |k(t)| \|\alpha'(t)\| dt = \frac{3}{4} < 1.$$

Se trocamos a orientação de  $\alpha$ , o conjunto onde  $k(s) \geq 0$ , nesse caso, é  $[\pi/2, 3\pi/2]$  e

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} |k(t)| \|\alpha'(t)\| dt = \frac{3}{4} < 1.$$

Portanto, com qualquer orientação, a curvatura absoluta total dos arcos de  $\alpha$  com curvatura positiva é menor que um.



O Teorema 3.4 nos apresentou uma estimativa da curvatura total de uma curva fechada e regular  $\alpha$ , isto é,  $CA(\alpha) \geq 1$ . O próximo resultado nos dará informação no caso da igualdade.

**Teorema 5.3** *Seja  $\alpha$  uma curva de classe  $\mathcal{C}^2$ , fechada e regular. A curvatura total de  $\alpha$  é igual a 1, se e somente se  $\alpha$  é uma curva simples e convexa.*

**Prova.** Se  $CA(\alpha) = 1$ , então, pelo Corolário 3.2, a curva  $\alpha$  é simples. Vamos supor que  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco. Assim, usando a Proposição 5.6 com a notação adequada, obtemos

$$1 = CA(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b |k(s)| ds \geq \frac{1}{2\pi} \int_A k(s) ds \geq 1.$$

Logo  $k(s) \geq 0, \forall s \in [a, b]$ . Portanto, pelo Teorema 5.1, temos que  $\alpha$  é uma curva convexa.

Reciprocamente, se  $\alpha$  é uma curva convexa, temos, pelo Teorema 5.1 e uma escolha adequada da orientação de  $\alpha$ , que  $k(s) \geq 0$ . Assim, fazendo uso do Teorema 3.3, obtemos

$$CA(\alpha) = CT(\alpha) = 1. \quad \square$$

**Corolário 5.3** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva de classe  $\mathcal{C}^2$ , fechada, regular e com curvatura absoluta total igual a 1. Se  $|k(t)| \leq \frac{1}{R}$ , então*

$$\mathcal{L}_a^b(\alpha) \geq 2\pi R,$$

onde  $k$  é a curvatura de  $\alpha$  e  $R$  é uma constante positiva.

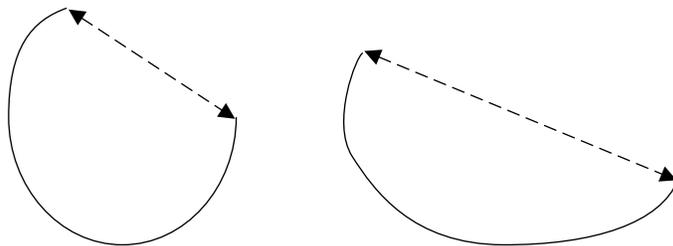
**Prova.** Usando o teorema anterior e o fato de que  $|k(t)| \leq \frac{1}{R}$ , obtemos

$$\begin{aligned} 1 = CA(\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_a^b |k(t)| \|\alpha'(t)\| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi R} \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \frac{\mathcal{L}_a^b(\alpha)}{2\pi R}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Logo temos o resultado desejado. □

## 5.2 Teorema de Schur

Considere dois arames de mesmo comprimento sobre um plano. Quando os curvamos, intuitivamente, os extremos do arame mais curvado ficam mais próximos do que os extremos do arame menos curvado.



Esse resultado intuitivo é, de fato, verdadeiro e foi demonstrado por A.Schur em [Sc]. A seguir, apresentaremos sua formulação precisa e sua prova, conforme consta em Chern, veja [Ch], p. 36 ou como exercício em do Carmo, [dC], p. 406.

**Teorema 5.4** (Schur) *Sejam  $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\tilde{\alpha} : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  duas curvas parametrizadas pelo comprimento de arco e convexas. Denotemos por  $k$  e  $\tilde{k}$  as curvaturas de  $\alpha$  e  $\tilde{\alpha}$ , respectivamente. Sejam  $d(s) = d(\alpha(0), \alpha(s))$  e  $\tilde{d}(s) = d(\tilde{\alpha}(0), \tilde{\alpha}(s))$ , onde  $d(\cdot, \cdot)$  é a distância Euclidiana de  $\mathbb{R}^2$ . Se  $k(s) \geq \tilde{k}(s)$ , então*

$$d(s) \leq \tilde{d}(s), \quad s \in [0, l].$$

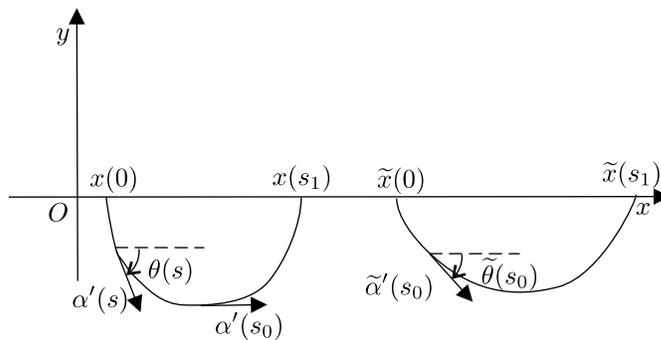
*Além disso,  $d(s) = \tilde{d}(s)$  para todo  $s \in [0, l]$ , se e somente se as curvas  $\alpha$  e  $\tilde{\alpha}$  são congruentes.*

**Prova.** Sejam  $T : [0, l] \rightarrow \mathbb{S}^1$  e  $\tilde{T} : [0, l] \rightarrow \mathbb{S}^1$  as indicatrizes tangentes de  $\alpha$  e  $\tilde{\alpha}$ , respectivamente, definidas por  $T(s) = \alpha'(s)$  e  $\tilde{T}(s) = \tilde{\alpha}'(s)$ . Fixemos  $s_1 \in [0, l]$ . Como  $\alpha$  e  $\tilde{\alpha}$  são curvas convexas, após um movimento rígido aplicado a uma delas, podemos

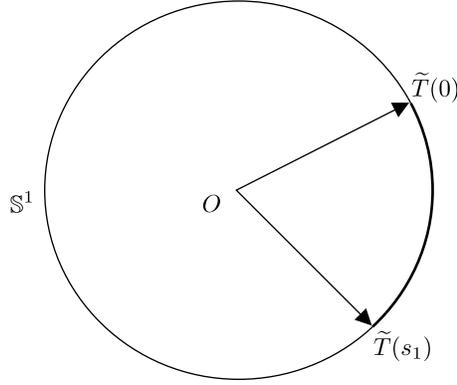
supor que os segmentos de reta ligando  $\alpha(0)$  a  $\alpha(s_1)$  e  $\tilde{\alpha}(0)$  a  $\tilde{\alpha}(s_1)$  estão sobre uma mesma reta  $r$ , têm o mesmo sentido e os traços de  $\alpha$  e  $\tilde{\alpha}$  estão contidos em um mesmo semi-plano determinado por  $r$ . Vamos escolher o sistema de coordenadas  $Oxy$  de  $\mathbb{R}^2$ , tal que as curvas  $\alpha$  e  $\tilde{\alpha}$  sejam parametrizadas por

$$\alpha(s) = (x(s), y(s)) \quad \text{e} \quad \tilde{\alpha}(s) = (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s)),$$

onde  $y(s) \leq 0, \tilde{y}(s) \leq 0, x(0) < x(s_1)$  e  $\tilde{x}(0) < \tilde{x}(s_1)$ .



Sejam  $\theta(s)$  e  $\tilde{\theta}(s)$  os ângulos que os vetores  $\alpha'(s)$  e  $\tilde{\alpha}'(s)$  fazem, respectivamente, com o eixo  $Ox$ . Como  $\alpha$  e  $\tilde{\alpha}$  são curvas convexas, temos, pelo Teorema 5.3, que  $-\pi \leq \theta(s) \leq \pi$  e  $-\pi \leq \tilde{\theta}(s) \leq \pi$ . Denotemos por  $\overline{\tilde{T}(0)\tilde{T}(s_1)}$  o comprimento de arco em  $\mathbb{S}^1$  entre  $\tilde{T}(0)$  e  $\tilde{T}(s_1)$  ou, equivalentemente, o ângulo entre  $\tilde{T}(0)$  e  $\tilde{T}(s_1)$ .



Logo, usando (1.11) e o fato de que  $\tilde{k}(s) \leq k(s)$ ,  $\forall s \in [0, l]$ , obtemos

$$\begin{aligned} \overline{\tilde{T}(0)\tilde{T}(s_1)} &= \tilde{\theta}(s_1) - \tilde{\theta}(0) = \int_0^{s_1} \tilde{\theta}'(s) ds = \int_0^{s_1} \tilde{k}(s) ds \\ &\leq \int_0^{s_1} k(s) ds = \int_0^{s_1} \theta'(s) ds = \theta(s_1) - \theta(0) = \overline{T(s_1)T(0)}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Agora considere  $s_0 \in [0, l]$ , tal que a reta tangente à curva  $\alpha$  nesse ponto seja paralela ao eixo  $Ox$ . Tal ponto sempre existe, basta considerar o ponto em que a função coordenada  $y$  atinge um mínimo absoluto. Então  $\theta(s_0) = 0$  e, portanto, usando o mesmo argumento de (5.2), temos

$$\overline{\tilde{T}(s_0)\tilde{T}(s)} \leq \overline{T(s_0)T(s)}, \quad (5.3)$$

$s \in [0, s_1]$ .

Note que o vetor  $\tilde{\alpha}(s_0)$  pode não ser paralelo ao eixo  $Ox$ . A função cosseno é uma função decrescente quando o seu argumento varia entre 0 e  $\pi$ . Assim, se  $0 \leq \overline{T(s_0)T(s)} \leq \pi$ , obtemos, usando (5.3), que

$$\cos(\overline{T(s_0)T(s)}) \leq \cos(\overline{\tilde{T}(s_0)\tilde{T}(s)}).$$

Logo, sendo a função cosseno uma função par, temos

$$\cos \theta(s) = \cos(\overline{T(s_0)T(s)}) \leq \cos(\overline{\tilde{T}(s_0)\tilde{T}(s)}) \leq \cos \tilde{\theta}(s). \quad (5.4)$$

Finalmente, se  $\{e_1, e_2\}$  denota a base canônica do sistema de coordenadas  $Oxy$  de  $\mathbb{R}^2$ , então

$$\alpha'(s) = \cos \theta(s)e_1 + \operatorname{sen} \theta(s)e_2 = x'(s)e_1 + y'(s)e_2.$$

Portanto, usando (5.4), vemos que

$$\begin{aligned} d(s_1) &= \|\alpha(s_1) - \alpha(0)\| = x(s_1) - x(0) = \int_0^{s_1} x'(s) ds \\ &= \int_0^{s_1} \cos \theta(s) ds = \int_0^{s_1} \cos(\overline{T(s_0)T(s)}) ds \\ &\leq \int_0^{s_1} \cos(\overline{\tilde{T}(s_0)\tilde{T}(s)}) ds \leq \int_0^{s_1} \cos \tilde{\theta}(s) ds \\ &= \int_0^{s_1} \tilde{x}'(s) ds = \tilde{x}(s_1) - \tilde{x}(0) = \|\tilde{\alpha}(s_1) - \tilde{\alpha}(0)\| \\ &= \tilde{d}(s_1). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Vamos provar o caso da igualdade no teorema. Suponha que  $d = \tilde{d}$ . Nesse caso, temos igualdade em (5.5), (5.4), (5.3) e (5.2). Logo as curvas  $\alpha$  e  $\tilde{\alpha}$  têm a mesma curvatura e, portanto, aplicando o Corolário 1.1, obtemos o resultado desejado.  $\square$

O Teorema de Schur tem várias aplicações. Por exemplo, dá uma solução ao seguinte problema minimizante:

**Teorema 5.5** *Entre todas as curvas de classe  $\mathcal{C}^2$ , fechadas, regulares, convexas e com curvatura menor ou igual a  $\frac{1}{R}$ ,  $R$  uma constante positiva, a que possui o menor comprimento é o círculo de raio  $R$ .*

**Prova** Inicialmente, sem perda de generalidade, podemos supor que as curvas da hipótese do teorema estão parametrizadas pelo comprimento de arco. Agora, pelo Corolário 5.3, temos que os comprimentos de tais curvas são maiores ou iguais a  $2\pi R$ . Considerando um círculo de raio  $R$ , a sua curvatura é  $k \equiv \frac{1}{R}$  e seu comprimento é igual a  $2\pi R$ . Suponha agora que  $\alpha$  seja uma curva como nas hipóteses do teorema e tenha comprimento igual a  $2\pi R$ . Nesse caso, usando a notação do Teorema de Schur, comparemos  $\alpha$  com o círculo de raio  $R$ , parametrizado pela curva  $\tilde{\alpha}$ . Assim, como ambas são curvas fechadas, temos que  $d(2\pi R) = \tilde{d}(2\pi R) = 0$ . Logo a curvatura de  $\alpha$  é igual a  $\frac{1}{R}$  e, portanto,  $\alpha$  é um círculo de raio  $R$ .  $\square$

Como uma segunda aplicação do Teorema de Schur, obtemos o seguinte resultado, devido a Schwarz:

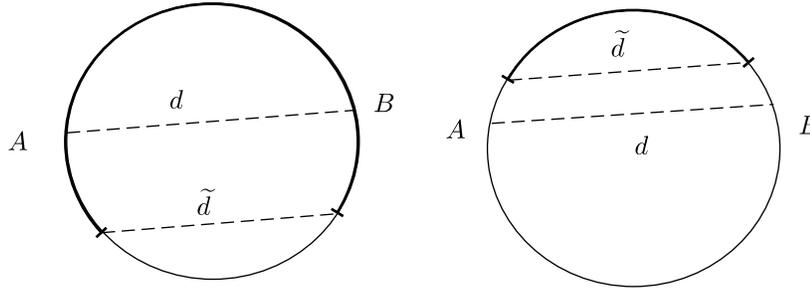
**Teorema 5.6** (Schwarz) *Sejam  $P$  e  $Q$  dois pontos no plano cuja distância é  $d$ . Seja  $\alpha$  uma curva ligando  $P$  a  $Q$  com curvatura*

$$k(s) \leq \frac{1}{R}, \quad \text{com } R \geq \frac{d}{2}.$$

*Considere um círculo  $\mathcal{D}$  de raio  $R$ , tal que  $P, Q \in \mathcal{D}$ . Então o comprimento de  $\alpha$  é menor que o comprimento do menor arco de  $\mathcal{D}$  determinado por  $P$  e  $Q$  ou é maior que o comprimento do maior arco de  $\mathcal{D}$ , determinado por esses pontos.*

**Prova.** Observemos primeiro que  $R \geq \frac{d}{2}$  é uma condição necessária para o círculo  $\mathcal{D}$  de raio  $R$  existir. Agora, para demonstrarmos o teorema, podemos supor que o comprimento de  $\alpha$  é menor que  $2\pi R$ , caso contrário, segue-se o resultado imediatamente. Assim podemos comparar  $\alpha$  com um arco do mesmo

comprimento sobre  $\mathcal{D}$ , determinando uma corda de comprimento  $\tilde{d}$ . Logo as hipóteses do Teorema de Schur estão satisfeitas e, portanto,  $\tilde{d} \leq d$ .

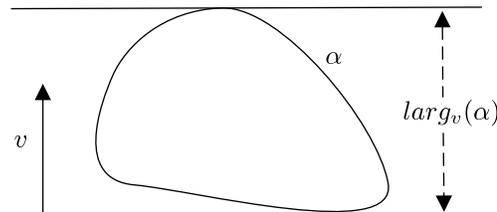


E segue-se o resultado. □

### 5.3 Curvas de Largura Constante

Nesta seção, iremos introduzir a noção de largura de uma curva no plano em relação a uma direção de  $\mathbb{R}^2$  e mostrar algumas propriedades das curvas de largura constante.

Fixe um vetor  $v$  não-nulo em  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular e fechada. A largura de  $\alpha$  em relação à direção  $v$ ,  $larg_v(\alpha)$ , é dada pela menor distância entre duas retas paralelas  $r_1$  e  $r_2$ , ortogonais a  $v$  e com a propriedade que o traço de  $\alpha$  esteja contido na faixa determinada por essas duas retas.

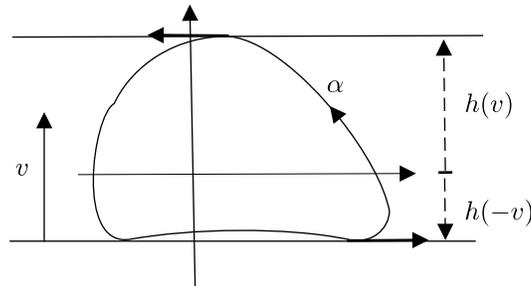


Para que esse conceito se torne mais preciso, para cada  $v \in \mathbb{S}^1$ , considere a função  $h$ , definida por

$$h(v) = \max_{a \leq s \leq b} \langle \alpha(s), v \rangle.$$

O fato da curva  $\alpha$  estar definida em um intervalo fechado, acarreta que  $h$  está bem definida e representa a maior projeção ortogonal de um ponto do traço de  $\alpha$  sobre o vetor  $v$ . Em termos de  $h$ , podemos escrever a largura de  $\alpha$  na direção de  $v$  como

$$\text{larg}_v(\alpha) = h(v) + h(-v).$$



Por exemplo, se o traço de  $\alpha$  descreve um círculo de raio  $R$ , a largura de  $\alpha$ , em qualquer direção  $v$ , é igual a  $2R$ .

Observe que o máximo de  $\langle \alpha, v \rangle$  é atingido em pontos do traço de  $\alpha$  que satisfazem  $\langle \alpha'(s), v \rangle = 0$ . Logo a reta tangente à curva  $\alpha$  é ortogonal a  $v$  em cada ponto em que  $\langle \alpha(s), v \rangle$  ou  $\langle \alpha(s), -v \rangle$  atinge o máximo. No caso em que  $\alpha$  é convexa, há exatamente duas retas tangentes à curva  $\alpha$  que são ortogonais a  $v$ . Tais retas, no entanto, podem ser retas tangentes em mais de um ponto de  $\alpha$ .

**Definição 5.3** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva contínua. O diâmetro  $\mathbb{D}$  de  $\alpha$  é dado por*

$$\mathbb{D} = \max\{\|P - Q\|; P, Q \text{ pontos sobre o traço de } \alpha\}.$$

Para curvas fechadas, os conceitos de largura e diâmetro estão relacionados pelo seguinte resultado:

**Proposição 5.7** *Em qualquer curva regular e fechada  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , o seu diâmetro  $\mathbb{D}$  é dado por*

$$\mathbb{D} = \max_{v \in \mathbb{S}^1} \text{larg}_v(\alpha).$$

**Prova.** Seja  $\mathbb{L} = \max_{v \in \mathbb{S}^1} \text{larg}_v(\alpha)$ . Vamos provar inicialmente que  $\mathbb{D} \leq \mathbb{L}$ . Seja  $d(s, t) = \|\alpha(s) - \alpha(t)\|$ ,  $s, t \in [a, b]$  e seja  $(s_0, t_0)$  um ponto em que a função  $d$  atinge seu máximo. Como  $d$  é diferenciável, temos que

$$\frac{\partial d}{\partial s}(s_0, t_0) = \frac{\partial d}{\partial t}(s_0, t_0) = 0.$$

Essas igualdades significam que

$$\langle \alpha(s_0) - \alpha(t_0), \alpha'(s_0) \rangle = \langle \alpha(s_0) - \alpha(t_0), \alpha'(t_0) \rangle = 0.$$

Portanto as retas tangentes à curva  $\alpha$  em  $\alpha(s_0)$  e  $\alpha(t_0)$  são paralelas, visto que ambas são ortogonais ao vetor  $\alpha(s_0) - \alpha(t_0)$ . Além disso, o traço de  $\alpha$  está inteiramente contido na faixa determinada por essas duas retas. Portanto a distância entre essas retas é igual ao diâmetro de  $\alpha$  e também igual à largura de  $\alpha$  em relação ao vetor  $v = \frac{1}{\|\alpha(s_0) - \alpha(t_0)\|} (\alpha(s_0) - \alpha(t_0))$ . Assim

$$\mathbb{D} \leq \mathbb{L}.$$

Reciprocamente, dado  $v \in \mathbb{S}^1$ , sejam  $s_0, t_0 \in [a, b]$ , tais que

$$h(v) = \langle \alpha(s_0), v \rangle \quad \text{e} \quad h(-v) = \langle \alpha(t_0), -v \rangle.$$

Então

$$\text{larg}_v(\alpha) = h(v) + h(-v) = \langle \alpha(s_0) - \alpha(t_0), v \rangle \leq \|\alpha(s_0) - \alpha(t_0)\|,$$

e, portanto,

$$\mathbb{D} \geq \text{larg}_v(\alpha).$$

Como essa desigualdade vale para todo  $v \in \mathbb{S}^1$ , segue-se que

$$\mathbb{D} \geq \mathbb{L}. \quad \square$$

**Definição 5.4** Dizemos que uma curva  $\alpha$  possui largura constante, se  $\text{larg}_v(\alpha)$  é constante igual a  $\mathbb{L}_0$ , para todo  $v \in \mathbb{S}^1$ . Nesse caso,  $\mathbb{L}_0$  é chamado de largura de  $\alpha$ .

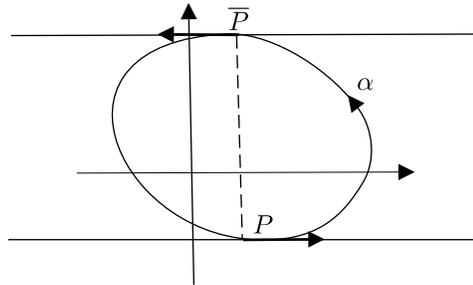
Suponhamos que  $\alpha$  seja uma curva fechada, convexa e com largura constante  $\mathbb{L}_0$ . Pela Proposição 5.7, o diâmetro de  $\alpha$  também é igual a  $\mathbb{L}_0$ . Vamos ver que esse diâmetro é realizado por muitos pares de pontos sobre o traço de  $\alpha$ . De fato, fixado  $s_0 \in [a, b]$ , seja  $s_1 \in [a, b]$ , tal que  $T(s_1) = -T(s_0)$ . Como  $\alpha$  é convexa, seu traço fica inteiramente contido em um dos semiplanos determinado pela reta tangente à  $\alpha$  em cada ponto. Portanto o traço de  $\alpha$  fica inteiramente contido na faixa determinada pelas retas tangentes à curva  $\alpha$  em  $\alpha(s_0)$  e em  $\alpha(s_1)$ . Como a largura de  $\alpha$  é constante e igual a  $\mathbb{L}_0$ , a distância entre essas retas é  $\mathbb{L}_0$  e, portanto,  $\|\alpha(s_0) - \alpha(s_1)\| \geq \mathbb{L}_0$ . Visto que o diâmetro de  $\alpha$  é igual a  $\mathbb{L}_0$ , temos que  $\|\alpha(s_0) - \alpha(s_1)\| = \mathbb{L}_0$ . Por outro lado, essa igualdade só ocorre, se  $\alpha(s_0) - \alpha(s_1)$  for ortogonal às retas tangentes de  $\alpha$  nos pontos  $\alpha(s_0)$  e  $\alpha(s_1)$ . Não existe, contudo, outro ponto  $\alpha(s_2)$ , tal que  $\|\alpha(s_0) - \alpha(s_2)\| = \mathbb{L}_0$ , pois, nesse caso,  $\alpha(s_1)$  e  $\alpha(s_2)$  estariam sobre a reta normal à curva  $\alpha$  em  $s = s_0$ , o que contradiz a hipótese de convexidade de  $\alpha$ .

Portanto, para cada ponto  $P$  sobre o traço de uma curva  $\alpha$  fechada, regular, convexa e de largura constante  $\mathbb{L}_0$ , existe um

único ponto  $\bar{P}$  sobre o traço de  $\alpha$ , tal que  $\|P - \bar{P}\| = \mathbb{L}_0$ , e  $\bar{P}$  está sobre a reta normal à  $\alpha$  no ponto  $P$ . O ponto  $\bar{P}$  é chamado ponto antípoda de  $P$ . No caso em que  $\alpha$  está positivamente orientada, sua curvatura é positiva, e o ponto antípoda de  $P$  é dado por

$$\bar{P} = P + \mathbb{L}_0 N(P),$$

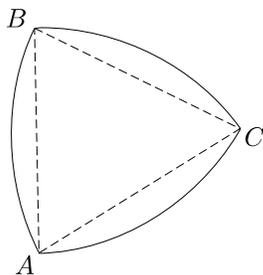
onde  $N$  é o vetor normal unitário de  $\alpha$ .



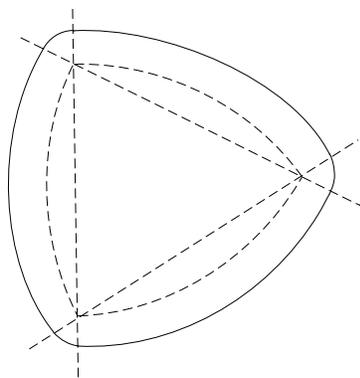
Seja  $\mathcal{C}$  o círculo de centro  $\bar{P}$  e raio  $\mathbb{L}_0$ . Então  $\mathcal{C}$  é tangente à  $\alpha$  em  $P$ , e o traço de  $\alpha$  está inteiramente contido no disco limitado por  $\mathcal{C}$ . Pode-se mostrar que a curvatura de  $\alpha$  em  $P$  é, em módulo, maior ou igual a  $\frac{1}{\mathbb{L}_0}$  (veja Lema 6.4). Temos que toda curva regular, fechada e de largura constante é estritamente convexa.

O leitor deve estar se perguntando: existirá alguma curva de largura constante diferente do círculo? Um primeiro exemplo de curva de largura constante é dado pelo *triângulo de Reuleaux*, que passamos a descrever: considere um triângulo equilátero  $\triangle ABC$ . Tomando cada vértice de  $\triangle ABC$  como centro, construa um arco de círculo ligando os dois vértices remanescentes. A curva obtida pela união dos três arcos de círculo possui largura constante. Observe que, para cada ponto  $P$  do triângulo de Reuleaux que não é um vértice, o traço dessa curva está contido na região entre

a reta  $T_P$  tangente à curva em  $P$  e reta paralela a  $T_P$  passando pelo vértice oposto ao arco que contém  $P$ . A distância entre essas retas independe da escolha do ponto  $P$  e é igual ao lado do triângulo equilátero  $\triangle ABC$ . Concluimos, portanto, que a largura do triângulo de Reuleaux é constante.



Essa curva, porém, é apenas contínua. Para obtermos uma curva de classe  $\mathcal{C}^1$ , basta construirmos a curva paralela ao triângulo de Reuleaux, obtida pela união de seis arcos de círculo, como mostra a figura abaixo.



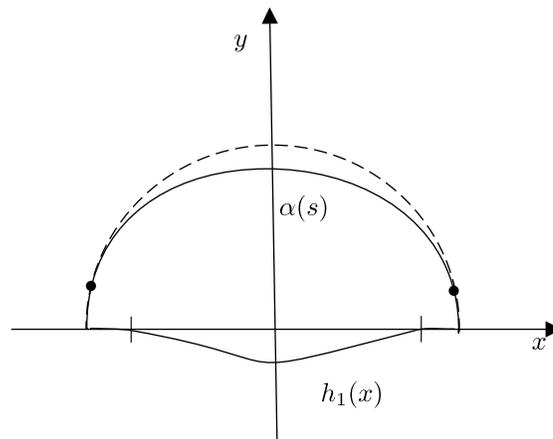
Vamos agora construir uma curva de classe  $\mathcal{C}^2$  e de largura constante. Considere o semi-círculo  $\mathbb{S}_+^1$ , de centro na origem e raio um, com  $y \geq 0$ .  $\mathbb{S}_+^1$  pode ser obtido como gráfico da função

$h : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$ . Seja  $h_1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma função não-constante e de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , tal que:

- $h_1(x) = 0$ , para todo  $x \in [-1, -1 + \delta] \cup [1 - \delta, 1]$ , com  $\delta > 0$  suficientemente pequeno;
- $h_1, h_1'$  e  $h_1''$  são suficientemente próximas de zero, para que a curvatura do gráfico da função  $H$ , dada por  $H(x) = h(x) + h_1(x)$  seja maior que  $\frac{1}{2}$ .

Seja  $\alpha : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma parametrização, pelo comprimento de arco, do gráfico de  $H = h + h_1$ , com  $\alpha(0) = (1, 0)$  e  $\alpha(c) = (-1, 0)$ . A curva  $\alpha$  satisfaz:

1. Existe  $\varepsilon > 0$ , tal que  $\alpha([0, \varepsilon] \cup [c - \varepsilon, c])$  está contido em  $\mathbb{S}_+^1$ ;
2. O traço de  $\alpha$  não está contido em  $\mathbb{S}_+^1$ ;
3. A indicatriz tangente  $T$  da curva  $\alpha$  descreve um semi-círculo;
4.  $k(s) > \frac{1}{2}$ , onde  $k$  é a curvatura de  $\alpha$ .



Considere a curva  $\beta : [0, 2c] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\beta(s) = \begin{cases} \alpha(s), & \text{se } 0 \leq s \leq c, \\ \alpha(s - c) + 2N(s - c), & \text{se } c \leq s \leq 2c, \end{cases}$$

onde  $N(s)$  é o vetor normal unitário de  $\alpha$ .

A condição (1) garante que  $\beta$  está bem definida e  $\beta(0) = \beta(2c)$ . Logo  $\beta$  é uma curva fechada e de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Vamos provar que  $\beta$  é regular. A forma como  $\beta$  está definida e pelo fato de  $\alpha$  ser regular, resta-nos provar a regularidade de  $\beta$  no intervalo  $[c, 2c]$ . Temos que  $s \in [c, 2c]$ ,

$$\beta'(s) = \alpha'(s - c) - 2N'(s - c).$$

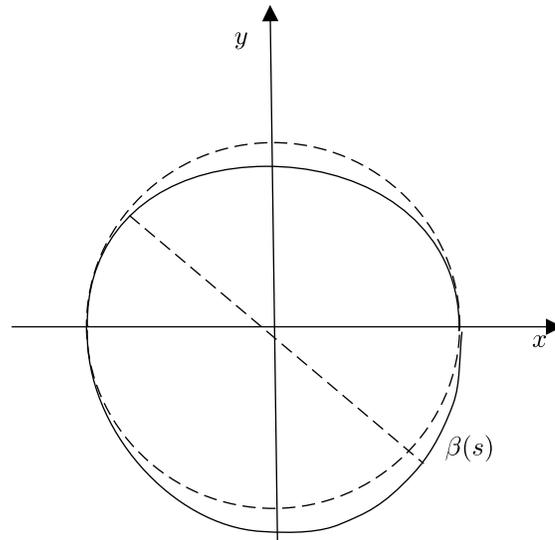
Usando as Equações de Frenet obtemos

$$\beta'(s) = (1 - 2k(s - c))T(s - c).$$

A propriedade (4) da curva  $\alpha$  implica que  $\beta'(s) \neq 0$ . Um cálculo direto nos mostra que a curvatura  $\bar{k}$  de  $\beta$  é dado por

$$\bar{k}(s) = \begin{cases} k(s), & \text{se } s \in [0, c], \\ \frac{k(s - c)}{2k(s - c) - 1}, & \text{se } s \in [c, 2c]. \end{cases}$$

A condição (4) implica que  $\bar{k} > \frac{1}{2}$ . A propriedade (3) nos diz que o índice de rotação de  $\beta$  é igual a um e, portanto,  $\beta$  é estritamente convexa. É imediato vermos que a largura de  $\beta$  é constante e igual a dois.



Vamos provar, em seguida, que o comprimento de uma curva de largura constante  $\mathbb{L}_0$  depende apenas de  $\mathbb{L}_0$ . Esse resultado foi demonstrado originalmente por E. Barbier no século XIX, usando métodos probabilísticos.

**Teorema 5.7** (*Teorema de Barbier*) *O comprimento de qualquer curva convexa, regular, fechada, simples e de largura constante  $\mathbb{L}_0$  é igual a  $\pi\mathbb{L}_0$ .*

**Prova.** Seja  $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, com as hipóteses do teorema e positivamente orientada. Pelo Teorema 5.3, como  $\alpha$  é fechada, simples e convexa, o índice de rotação de  $\alpha$  é igual a um. Considere a extensão periódica  $\tilde{\alpha}$  de  $\alpha$ , definida em  $\mathbb{R}$  por

$$\tilde{\alpha}(s + nL) = \alpha(s), \quad \forall s \in [0, L], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seja  $\varphi$  uma determinação diferenciável do ângulo que a indicatriz tangente de  $\tilde{\alpha}$ ,  $T(s)$ , faz com  $(1, 0)$ . Visto que o índice de rotação

de  $\alpha$  é igual a um, temos

$$\varphi(s+L) - \varphi(s) = 2\pi, \forall s \in \mathbb{R}.$$

Pela equação (3.1), temos que

$$\varphi'(s) = k(s), \forall s \in \mathbb{R}.$$

Vimos que a curva  $\alpha$  é estritamente convexa. Portanto  $k(s) > 0$  e  $\varphi$  é estritamente crescente. Logo  $\varphi$  possui inversa diferenciável.

Agora, para cada  $s \in \mathbb{R}$ , considere a aplicação que a cada  $s \in \mathbb{R}$  associa  $\bar{\alpha}(s)$ , dada por

$$\bar{\alpha}(s) = \tilde{\alpha}(s) + \mathbb{L}_0 N(s),$$

onde  $N$  é o campo normal e unitário ao longo de  $\tilde{\alpha}$ . Temos, portanto, que  $\bar{\alpha}$  é diferenciável, periódica e, para todo  $s \in \mathbb{R}$ ,  $\bar{\alpha}(s)$  e  $\tilde{\alpha}(s)$  são pontos antípodas. Antes de continuarmos a demonstração do teorema, necessitaremos de seguinte resultado:

**Lema 5.2** *Com a notação acima,  $\bar{\alpha}$  é uma reparametrização positiva de  $\tilde{\alpha}$ , isto é, existe uma função diferenciável  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que*

$$\bar{\alpha}(s) = \tilde{\alpha} \circ h(s), \forall s \in \mathbb{R}.$$

*A função  $h$  é tal que  $h(s+L) = h(s) + L$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ , e sua derivada é estritamente positiva em todos os pontos.*

**Prova do lema.** Seja  $h$  a função, dada por  $h(s) = \varphi^{-1}(\varphi(s) + \pi)$ . Temos que  $h$  é diferenciável, e sua derivada é positiva. Além disso,

$$\varphi \circ h(s) = \varphi(s) + \pi.$$

Observe que  $\varphi \circ h(s) = \varphi \circ \varphi^{-1}(\varphi(s) + \pi) = \varphi(s) + \pi$ . Portanto, se  $T$  é a indicatriz tangente de  $\tilde{\alpha}$ , temos que

$$\begin{aligned} T(h(s)) &= (\cos(\varphi \circ h(s)), \text{sen}(\varphi \circ h(s))) \\ &= (\cos(\varphi(s) + \pi), \text{sen}(\varphi(s) + \pi)) \\ &= (-\cos(\varphi(s)), -\text{sen}(\varphi(s))) = -T(s). \end{aligned}$$

Então  $T \circ h(s) = -T(s)$  e, portanto,  $\tilde{\alpha}(s)$  e  $\tilde{\alpha}(h(s))$  são pontos antípodas. Assim

$$\bar{\alpha}(s) = \tilde{\alpha}(h(s)). \quad \square$$

Vamos concluir a prova do Teorema 5.7. Pelo lema anterior,

$$\tilde{\alpha}(s) + \mathbb{L}_0 N(s) = \tilde{\alpha}(h(s)).$$

Derivando essa expressão, obtemos

$$T(s) + \mathbb{L}_0 N'(s) = T(h(s))h'(s).$$

Pela equação (1.8),

$$T(s) - \mathbb{L}_0 k(s)T(s) = T(h(s))h'(s).$$

Visto que  $T(h(s)) = -T(s)$ , temos

$$(1 - k(s)\mathbb{L}_0 + h'(s))T(s) = 0,$$

o que acarreta

$$h'(s) = k(s)\mathbb{L}_0 - 1.$$

Usando as propriedades da função  $h$  e o fato de que o índice de rotação de  $\alpha$  é igual a 1, temos que

$$\begin{aligned} L = h(L) - h(0) &= \int_0^L h'(s) ds = \int_0^L (k(s)\mathbb{L}_0 - 1) ds \\ &= \mathbb{L}_0 \left( \int_0^L k(s) ds \right) - L = 2\pi\mathbb{L}_0 - L. \end{aligned}$$

Portanto

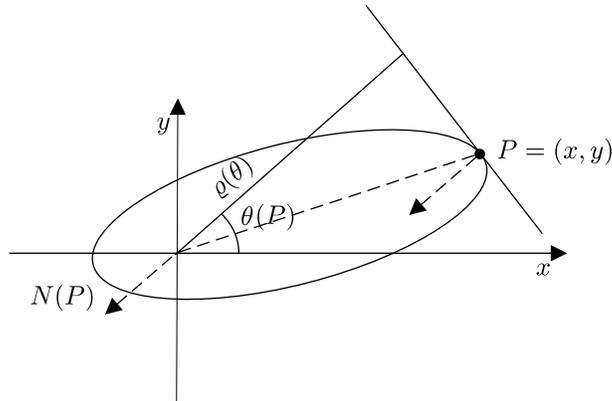
$$L = \pi\mathbb{L}_0. \quad \square$$

## 5.4 Comprimento e Área de Curvas Convexas

Nesta seção, vamos determinar expressões para medir o comprimento de uma curva estritamente convexa, bem como para a área da região limitada por essa curva. Esses resultados serão consequência de escrevermos a curva usando coordenadas polares tangenciais. Seja  $C$  o traço de uma curva regular, fechada, convexa e positivamente orientada em  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $O$  um ponto na região limitada por  $C$ , e escolha o sistema de coordenadas de  $\mathbb{R}^2$  de modo que a origem seja o ponto  $O$ . Seja  $P = (x, y)$  um ponto sobre  $C$ , e seja  $r_P$  a reta tangente à curva  $C$  em  $P$ . Considere  $\theta(P)$  o ângulo que a reta  $n_P$ , perpendicular a  $r_P$  e passando por  $O$ , faz com o semi-eixo positivo do eixo  $Ox$ . Defina  $\varrho(\theta)$  como a projeção orientada  $P$  sobre  $n_P$ . Se  $N(P)$  é o campo normal e unitário à curva  $C$ , a projeção  $\varrho$  é dada por

$$\varrho(\theta) = \langle P, -N(P) \rangle.$$

A função  $\varrho$  é também conhecida por função suporte de  $C$ .



Vamos descrever a curva  $C$ , usando  $\theta$  como parâmetro. Para obtermos  $(x, y)$  como função de  $\theta$ , observemos que qualquer ponto sobre a reta  $r_p$  possui a mesma projeção sobre  $n_p$ . Logo  $P = (x, y)$  satisfaz

$$\varrho(\theta) = x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta.$$

Derivando essa equação em relação a  $\theta$  e usando que  $r_p$  e  $n_p$  são perpendiculares, obtemos

$$\begin{aligned} \varrho'(\theta) &= -x \operatorname{sen} \theta + x' \cos \theta + y \cos \theta + y' \operatorname{sen} \theta \\ &= -x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{cases} x(\theta) = \varrho(\theta) \cos \theta - \varrho'(\theta) \operatorname{sen} \theta \\ y(\theta) = \varrho(\theta) \operatorname{sen} \theta + \varrho'(\theta) \cos \theta. \end{cases} \quad (5.6)$$

Das expressões acima, segue-se que, dados  $\theta$  e  $\varrho$ , podemos determinar  $(x, y) \in C$ , e, reciprocamente, as equações em (5.6) também determinam, de modo único,  $\theta$  e  $\varrho$  em função de  $(x, y)$ .

**Definição 5.5** *O par  $(\theta, \varrho(\theta))$  é chamado de coordenadas polares tangenciais de  $C$ .*

Vamos agora obter as expressões para o comprimento de arco para curvatura de  $C$  em função de  $\theta$ . Inicialmente, derivando as equações (5.6),

$$\begin{cases} x'(\theta) = -[\varrho(\theta) + \varrho''(\theta)] \operatorname{sen} \theta, \\ y'(\theta) = [\varrho(\theta) + \varrho''(\theta)] \cos \theta. \end{cases}$$

Seja  $s$  a função comprimento de arco de  $C$  a partir de um ponto  $P_0 \in C$ . Então  $s$  é uma função monótona crescente de  $\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , e, por conseguinte, invertível. Seja  $\theta(s)$  a expressão de

$\theta$  como função de  $s$ . Seja  $\varphi$  uma determinação diferenciável do ângulo que  $(x'(s), y'(s))$  faz com o vetor  $(1, 0)$ . Então

$$\varphi(s) = \theta(s) + \frac{\pi}{2}.$$

Assim

$$\frac{d\theta}{ds}(s) = \varphi'(s) = k(s),$$

onde  $k$  é a curvatura de  $C$ . Logo

$$\frac{1}{k(s(\theta))} = \frac{ds}{d\theta} = \varrho(\theta) + \varrho''(\theta) > 0. \quad (5.7)$$

Portanto, em função da função suporte, a curvatura de  $C$  é

$$k(\theta) = \frac{1}{\varrho(\theta) + \varrho''(\theta)}.$$

Se  $L$  denota o comprimento de  $C$ ,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^L ds = \int_0^{2\pi} \frac{ds}{d\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} [\varrho(\theta) + \varrho''(\theta)] d\theta = \int_0^{2\pi} \varrho(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

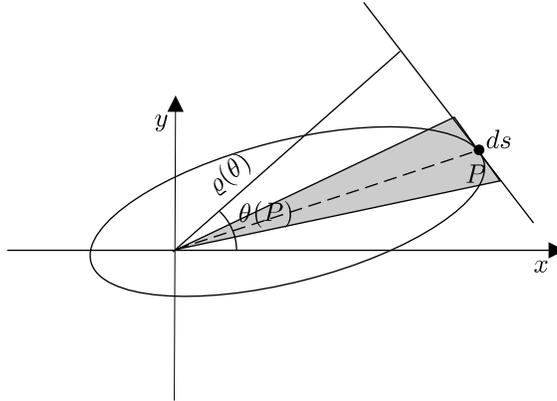
Assim provamos o seguinte resultado:

**Teorema 5.8** (*Fórmula de Cauchy*) *O comprimento  $L$  de uma curva fechada, regular, simples e estritamente convexa  $C$  é dado por*

$$L = \int_0^{2\pi} \varrho(\theta) d\theta,$$

onde  $\varrho$  é a função suporte de  $C$ .

Seja  $\mathcal{A}$  a área da região limitada pela curva  $C$ . Para estimar o valor de  $\mathcal{A}$ , vamos considerar triângulos com um vértice na origem e o lado oposto a esse vértice, sobre a reta tangente a  $C$  em  $P$ , tendo comprimento  $ds$ , conforme a figura a seguir.



Observe que a altura relativa ao vértice  $(0,0)$  é  $\varrho(\theta)$ . Portanto a área de cada um desses triângulos é

$$\frac{1}{2}\varrho(\theta)ds.$$

Usando as idéias do Cálculo Diferencial, passando ao limite quando  $ds$  tende a zero, obtemos

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_C \varrho(\theta(s)) ds.$$

Utilizando a equação (5.7), obtemos

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \varrho(\theta)[\varrho(\theta) + \varrho''(\theta)] d\theta. \tag{5.8}$$

Porém, integrando por partes, temos que

$$\int_0^{2\pi} \varrho(\theta)\varrho''(\theta) d\theta = [\varrho(\theta)\varrho'(\theta)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (\varrho'(\theta))^2 d\theta$$

$$= - \int_0^{2\pi} (\varrho'(\theta))^2 d\theta.$$

Substituindo essa expressão em (5.8), obtemos

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\varrho^2(\theta) - (\varrho'(\theta))^2] d\theta.$$

Provamos, então, o seguinte resultado:

**Teorema 5.9** (*Fórmula de Blaschke*) *A área  $\mathcal{A}$  da região limitada por uma curva fechada, regular, simples e estritamente convexa  $C$  é dada por*

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\varrho^2(\theta) - (\varrho'(\theta))^2] d\theta,$$

onde  $\varrho$  é a função suporte de  $C$ .

O próximo resultado irá nos dar estimativas do comprimento  $L$  e da área  $\mathcal{A}$  em função dos valores máximo e mínimo da curvatura de  $C$ .

**Teorema 5.10** *Seja  $C$  uma curva fechada, regular e estritamente convexa. Sejam  $L$  o comprimento de  $C$  e  $\mathcal{A}$  a área da região limitada por  $C$ . Então*

$$\frac{2\pi}{k_1} \leq L \leq \frac{2\pi}{k_2}$$

e

$$\frac{\pi}{k_1^2} \leq \mathcal{A} \leq \frac{\pi}{k_2^2},$$

onde  $k_1$  é o valor máximo e  $k_2$  é o valor mínimo da curvatura de  $C$ .

**Prova.** Por (5.7),

$$\frac{2\pi}{k_1} \leq \int_0^{2\pi} \varrho(\theta) d\theta \leq \frac{2\pi}{k_1},$$

o que acarreta

$$\frac{2\pi}{k_1} \leq L \leq \frac{2\pi}{k_2}.$$

Por outro lado, novamente por (5.7) e (5.8),

$$\frac{1}{k_1} \int_0^{2\pi} \varrho(\theta) d\theta \leq 2\mathcal{A} \leq \frac{1}{k_2} \int_0^{2\pi} \varrho(\theta) d\theta.$$

Porém, como

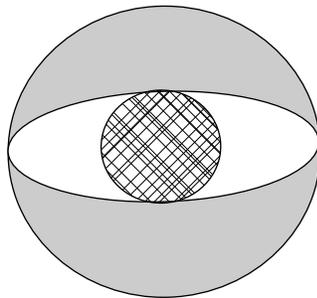
$$\frac{2\pi}{k_1} \leq \int_0^{2\pi} \varrho(\theta) d\theta \leq \frac{2\pi}{k_2},$$

obtemos

$$\frac{\pi}{k_1^2} \leq \mathcal{A} \leq \frac{\pi}{k_2^2}. \quad \square$$

Como consequência imediata desse teorema, temos o seguinte resultado:

**Corolário 5.4** *O comprimento (respectivamente, a área) de uma curva fechada, regular, simples e estritamente convexa está entre o comprimento (respectivamente, a área) dos círculos osculadores de  $C$  com maior e menor raio de curvatura.*



Vamos encerrar esta seção, com uma caracterização das curvas de maior comprimento dentre as curvas convexas de diâmetro fixado.

**Teorema 5.11** (*A. Rosenthal e O. Szasz-[RS]*) *Dentre todas as curvas convexas, fechadas, regulares, simples e com diâmetro  $\mathcal{D}$ , as curvas de largura constante possuem o maior comprimento.*

**Prova.** Seja  $C$  uma curva fechada, convexa e de comprimento  $L$ , dada, em coordenadas polares tangenciais, por  $(\theta, \varrho(\theta))$ . Como  $\varrho$  é uma função periódica de período  $2\pi$ , podemos representá-la, usando Séries de Fourier, por

$$\varrho(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sen n\theta),$$

onde, usando a Fórmula de Cauchy,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varrho(\theta) d\theta = \frac{L}{\pi}. \quad (5.9)$$

Por outro lado, a integral em (5.9) pode ser escrita como

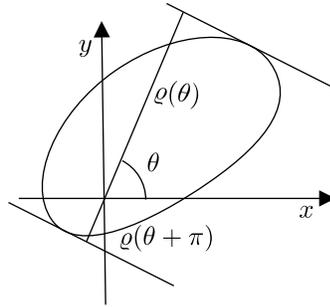
$$\int_0^{2\pi} \varrho(\theta) d\theta = \int_0^{\pi} [\varrho(\theta) + \varrho(\theta + \pi)] d\theta.$$

Portanto

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\varrho(\theta) + \varrho(\theta + \pi)] d\theta.$$

Observe que, para  $\theta \in [0, \pi]$ , a largura de  $C$  em relação ao vetor unitário que faz ângulo  $\theta$  com o eixo  $Ox$  é dada pela seguinte expressão:

$$[\varrho(\theta) + \varrho(\theta + \pi)].$$



Temos, então, que

$$[\rho(\theta) + \rho(\theta + \pi)] \leq \mathcal{D}, \quad \forall \theta \in [0, \pi]. \quad (5.10)$$

Logo  $a_0 \leq \mathcal{D}$  e, conseqüentemente, por (5.9),

$$L \leq \pi \mathcal{D}. \quad (5.11)$$

Além disso, a igualdade na equação anterior ocorre, se e somente se ocorre a igualdade em (5.10) e, portanto,  $C$  possui largura constante  $\mathcal{D}$ . □

Como conseqüência da desigualdade (5.11) e da Desigualdade Isoperimétrica, temos o seguinte resultado de L. Bieberbach [Bi].

**Proposição 5.8** *Seja  $C$  uma curva de Jordan, estritamente convexa e regular. Seja  $D$  o diâmetro de  $C$  e  $A$  a área da região limitada por  $C$ . Então*

$$A \leq \frac{1}{4} \pi D^2. \quad (5.12)$$

*Além disso, a igualdade se verifica em (5.12), se e somente se  $C$  é um círculo.*

**Prova.** Seja  $L$  o comprimento de  $\mathcal{C}$ . Pela desigualdade (4.6), temos que

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}.$$

Usando (5.11), segue-se que

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi} \leq \frac{\pi^2 D^2}{4\pi} = \frac{1}{4}\pi D^2,$$

o que conclui a primeira parte do resultado. O caso da igualdade decorre da classificação da igualdade de (4.6).

## 5.5 Curvas Paralelas

Considere  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular, fechada e simples. Seja  $N$  o campo normal e unitário ao longo de  $\alpha$  que aponta para fora da região limitada pelo traço de  $\alpha$ . Dado  $\zeta \in \mathbb{R}$ , a curva paralela à curva  $\alpha$  é a curva  $\alpha_\zeta$ , definida por

$$\alpha_\zeta(t) = \alpha(t) + \zeta N(t), \quad t \in [a, b].$$

Vamos provar que, se  $\alpha$  é uma curva estritamente convexa, então  $\alpha_\zeta$  é uma curva regular, fechada e estritamente convexa, para todo  $\zeta > 0$ . De fato, se  $(\theta, \varrho(\theta))$  são as coordenadas polares tangenciais de  $\alpha$ , então a função suporte  $\varrho_\zeta$  de  $\alpha_\zeta$  é dada por

$$\varrho_\zeta(\theta) = \varrho(\theta) + \zeta.$$

Assim o raio de curvatura  $\rho_\zeta$  de  $\alpha_\zeta$  é determinado por

$$\rho_\zeta(\theta) = \rho(\theta) + \zeta,$$

onde  $\rho$  é o raio de curvatura de  $\alpha$ . Portanto  $\alpha_\zeta$  é periódica e sua curvatura é estritamente positiva e, portanto,  $\alpha_\zeta$  é uma curva fechada e estritamente convexa.

Sejam  $L_\zeta$  e  $\mathcal{A}_\zeta$ , respectivamente, o comprimento de  $\alpha_\zeta$  e a área da região limitada pelo traço da curva  $\alpha_\zeta$ . Usando as fórmulas de Cauchy e Blaschke, obtemos

$$L_\zeta = L + 2\zeta\pi \quad (5.13)$$

e

$$\mathcal{A}_\zeta = \mathcal{A} + \zeta L + 2\zeta^2\pi, \quad (5.14)$$

onde  $L$  e  $\mathcal{A}$  são, respectivamente, o comprimento de  $\alpha$  e a área da região limitada por  $\alpha$ . As equações (5.13) e (5.14) são conhecidas como *Fórmulas de Steiner* para curvas paralelas a uma curva fechada e convexa.

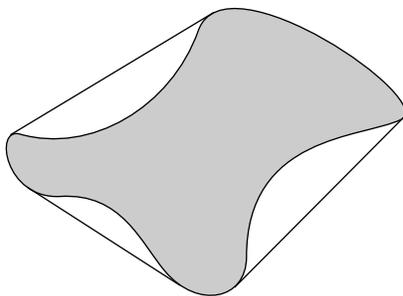
## 5.6 Exercícios

1. Mostre que, se o traço de uma curva  $\alpha$  descreve um círculo de raio  $R$ , então a largura de  $\alpha$ , em qualquer direção, é igual a  $2R$ .
2. Seja  $C$  o traço de uma curva fechada, regular, convexa e de largura constante  $\mathbb{L}$ . Suponha que  $C$  está positivamente orientada. Mostre que
  - (a) para todo  $P \in C$ , a curvatura de  $C$  em  $P$ ,  $k(P)$ , satisfaz  $k(P) > \frac{1}{\mathbb{L}}$ ;
  - (b) se  $P$  e  $\tilde{P}$  são pontos antípodas, então

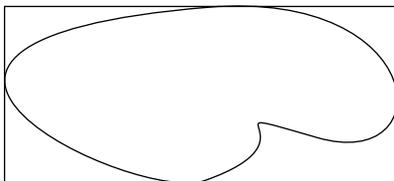
$$\frac{1}{k(P)} + \frac{1}{k(\tilde{P})} = \mathbb{L};$$

- (c) se cada par de pontos antípodas dividir  $C$  em dois arcos de comprimentos iguais, então  $C$  é uma círculo.

3. Mostre que, se uma reta  $r$  intersecta uma curva fechada e estritamente convexa  $C$ , então  $r$  é tangente à curva  $C$  ou intersecta  $C$  em exatamente dois pontos.
4. Seja  $C$  uma curva fechada e convexa. Mostre geometricamente que  $C$  deve ser simples.
5. Seja  $C$  o traço de uma curva fechada e simples que limita uma região  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Definimos o *fecho convexo* de  $C$ ,  $H_C$ , como o menor conjunto convexo que contém  $\Omega$ . É possível provar que sempre existe o fecho convexo de  $C$ . Mostre que a fronteira de  $H_C$  é uma curva fechada e convexa, formada por arcos de  $C$  e por segmentos de reta. Conclua que para resolver o problema isoperimétrico, podíamos nos restringir às curvas convexas.



6. Dizemos que um retângulo  $\mathcal{Q}$  está circunscrito a uma curva fechada e regular  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , se a região limitada por  $\alpha$  está contida na região delimitada por  $\mathcal{Q}$  e a curva  $\alpha$  tangencia todos os quatro lados de  $\mathcal{Q}$ .



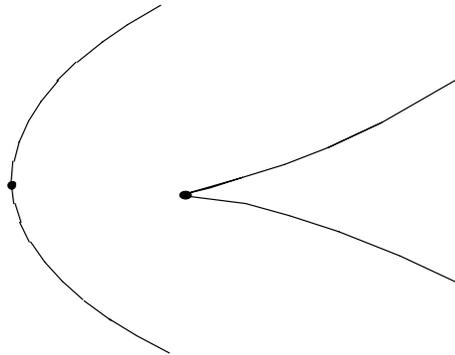
Mostre que, se  $\alpha$  é uma curva fechada, regular e convexa, então existe pelo menos um retângulo que está circunscrito à curva  $\alpha$ .



## Capítulo 6

# Teorema dos Quatro Vértices

Vamos considerar uma curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  regular, parametrizada pelo comprimento de arco e de classe  $\mathcal{C}^2$ . Um vértice de  $\alpha$  é um ponto crítico da função curvatura  $k$  de  $\alpha$ , isto é, um ponto  $t_0 \in [a, b]$ , tal que a derivada da função curvatura,  $k'$ , se anula nesse ponto. Observe que para uma curva fechada, regular e de classe  $\mathcal{C}^2$ , a derivada de  $k$  está bem definida nos pontos  $t = a$  e  $t = b$  e essa derivada coincide nesses pontos. Neste capítulo, vamos provar um dos teoremas clássicos mais famosos da Geometria Global das Curvas Planas, que nos diz: uma curva fechada e regular possui pelo menos quatro vértices. Vamos entender geometricamente o que é um vértice de uma curva. Como vimos, a evoluta  $\alpha_e$  de uma curva  $\alpha$ , com curvatura sempre positiva, é uma curva regular, se a curvatura de  $\alpha$  não possui derivada nula. Os pontos onde  $k'$  se anula são pontos singulares da evoluta de  $\alpha$ . Vimos, nos exemplos, que, em geral, a evoluta possui um “*bico*” nesses pontos singulares, que correspondem aos vértices de  $\alpha$ .



*O vértice de uma curva e o ponto correspondente na sua evoluta.*

A evoluta de uma curva possui aplicações geométricas importantes. Assim um primeiro interesse do teorema dos quatro vértices é sobre o número de singularidades da evoluta de uma curva fechada e regular. Porém uma consequência maior desse resultado está em olhá-lo do ponto de vista do Teorema Fundamental das Curvas Planas. Nesse resultado, vimos que, dada uma função diferenciável  $k$  em um intervalo  $I$ , existe uma curva  $\alpha$  em  $\mathbb{R}^2$  cuja função curvatura é  $k$ . Observe que, se  $I = [a, b]$  e a função  $k$  é tal que

$$\frac{d^n k}{dt^n}(a) = \frac{d^n k}{dt^n}(b),$$

poderíamos perguntar se  $k$  pode ser a função curvatura de uma curva fechada. Note que o Teorema Fundamental das Curvas Planas, Teorema 1.2, não nos diz se, nesse caso, a curva fecha, isto é, se  $\alpha(a) = \alpha(b)$ . O Teorema dos Quatro Vértices vai nos dar então uma condição necessária para que uma função seja curvatura de uma curva fechada, isto é, ela deve ter pelo menos quatro pontos críticos. Um fato interessante é que, sob certas condições sobre a positividade de  $k$ , temos a recíproca do teorema.

## 6.1 Teorema dos Quatro Vértices

Nessa seção vamos enunciar e demonstrar o principal resultado desse capítulo.

**Teorema 6.1** (*Teorema dos Quatro Vértices*) *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva de Jordan, regular e de classe  $\mathcal{C}^3$ . Então  $\alpha$  possui pelo menos quatro vértices.*

Antes de provarmos esse resultado, vamos introduzir e estudar as propriedades de círculo circunscrito ao traço de uma curva fechada e regular. Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada e regular. Como o traço de  $\alpha$  é limitado, existe pelo menos um disco fechado  $D(P, r) = \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid \|Q - P\| \leq r\}$  que contém o traço de  $\alpha$ . Seja  $\mathcal{D}_\alpha$  o conjunto de tais discos.

**Lema 6.1** *Existe um único disco  $D_0 \in \mathcal{D}_\alpha$ , tal que  $D_0$  é o disco de menor raio dentre os elementos de  $\mathcal{D}_\alpha$ .*

**Prova.** Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$F(P) = \max_{t \in [a, b]} \|\alpha(t) - P\|.$$

Como  $\alpha$  é regular e está definida em um intervalo fechado e limitado, o máximo acima existe e ocorre em um ponto  $t_P \in [a, b]$ . A função  $F$ , portanto, está bem definida e tem as seguintes propriedades:

(i)  $F(P) > 0$ ,  $\forall P \in \mathbb{R}^2$ .

De fato, se  $F(P) = 0$ , para todo  $t \in [a, b]$ , então  $\|\alpha(t) - P\| = 0$  e, portanto, a curva  $\alpha$  seria constante, o que contradiz  $\alpha$  ser regular.

(ii)  $F$  é contínua em  $\mathbb{R}^2$ .

Com efeito, sejam  $P, Q \in \mathbb{R}^2$ . Pela desigualdade triangular, para todo  $t \in [a, b]$ ,

$$\|\alpha(t) - P\| \leq \|\alpha(t) - Q\| + \|P - Q\| \leq F(Q) + \|P - Q\|,$$

e, analogamente,

$$\|\alpha(t) - Q\| \leq F(P) + \|P - Q\|.$$

Logo, aplicando  $\max_{t \in [a, b]}$  nas desigualdades acima, temos

$$F(P) \leq F(Q) + \|P - Q\| \quad \text{e} \quad F(Q) \leq F(P) + \|P - Q\|.$$

Portanto

$$|F(P) - F(Q)| \leq \|P - Q\|,$$

o que implica que  $F$  é contínua em  $\mathbb{R}^2$ .

Para cada  $P \in \mathbb{R}^2$ , considere o disco  $D_P$  de centro  $P$  e raio  $F(P)$ , isto é,

$$D_P = \{U \in \mathbb{R}^2 \mid \|U - P\| \leq F(P)\}.$$

Pela definição de  $F(P)$ , temos que  $D_P \in \mathcal{D}_\alpha$ , para todo  $P \in \mathbb{R}^2$ . Considere agora  $D(P, r)$  um disco de centro  $P$  e raio  $r$  em  $\mathcal{D}_\alpha$ . Afirmamos que

$$F(P) \leq r.$$

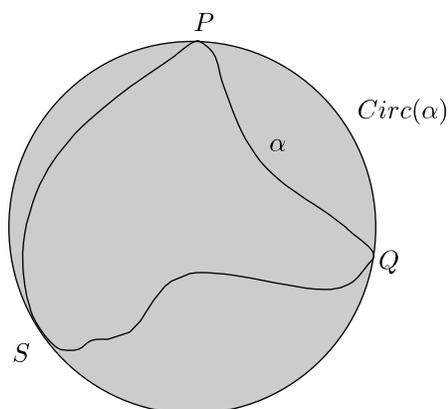
De fato, como o traço de  $\alpha$  está contido em  $D(P, r)$ , temos

$$\|\alpha(t) - P\| \leq r,$$

para todo  $t \in [a, b]$ . Logo, aplicando  $\max_{t \in [a, b]}$  nessa desigualdade, obtemos

$$F(P) = \max_{t \in [a, b]} \|\alpha(t) - P\| \leq r.$$

Portanto, entre todos os discos de centro  $P$  em  $\mathcal{D}_\alpha$ ,  $D_P$  é o disco que possui o menor raio.

Círculo circunscrito a uma curva  $\alpha$ 

Sejam  $O = (0, 0)$  e  $t_O \in [a, b]$ , tais que

$$F(O) = \|\alpha(t_O) - O\| = \|\alpha(t_O)\|.$$

Para todo  $P \in \mathbb{R}^2$ , tal que  $\|P\| \geq 2\|\alpha(t_O)\|$ ,

$$\|\alpha(t) - P\| \geq \|P\| - \|\alpha(t)\| \geq 2\|\alpha(t_O)\| - \|\alpha(t)\| = \|\alpha(t_O)\|.$$

Tomando-se o máximo nas desigualdades acima, quando  $t$  varia em  $[a, b]$ , obtemos que, para todo  $P \in \mathbb{R}^2$ , com  $\|P\| \geq 2\|\alpha(t_O)\|$ ,

$$F(P) \geq \|\alpha(t_O)\| = F(O).$$

Além disso, pela continuidade de  $F$ , temos que  $F$ , restrita ao disco fechado  $D(O, r_0)$  de centro  $O$  e raio  $r_0 = 2\|\alpha(t_O)\|$ , assume um valor mínimo em um ponto  $P_0$ . Esse ponto é, de fato, ponto de mínimo global de  $F$ , visto que

$$F(P_0) \leq \begin{cases} F(P), & \text{se } P \in D(O, r_0), \\ F(O) \leq F(P), & \text{se } P \notin D(O, r_0). \end{cases}$$

O disco de centro  $P_0$  e raio  $F(P_0)$  é, portanto, um disco que contém o traço de  $\alpha$  e possui o menor raio dentre todos os discos em  $\mathcal{D}_\alpha$ .

Vamos provar a unicidade de tal disco. Suponha que existam dois discos  $D_1$  e  $D_2$  de raio  $F(P_0)$  em  $\mathcal{D}_\alpha$ . Temos então que o traço de  $\alpha$  está contido em  $D_1 \cap D_2$ . Pela geometria elementar, como  $D_1$  e  $D_2$  são discos de mesmo raio, existe um disco de raio menor, a menos que eles coincidam, que contém  $D_1 \cap D_2$ , o que contradiz a escolha de  $P_0$ .  $\square$

**Definição 6.1** *Seja  $\alpha$  uma curva fechada e regular. A fronteira do disco fechado de menor raio que contém o traço de  $\alpha$  é chamada círculo circunscrito de  $\alpha$ . Pelo lema anterior, cada curva fechada e regular admite um único círculo circunscrito que será denotada por  $Circ(\alpha)$ .*

Estudaremos as propriedades de  $Circ(\alpha)$ .

**Lema 6.2** *Todo semi-círculo fechado de  $Circ(\alpha)$  contém pontos do traço de  $\alpha$ .*

**Prova.** Vamos supor, por contradição, que existe um semi-círculo de  $Circ(\alpha)$  sem pontos do traço de  $\alpha$ . Vamos escolher o sistema de coordenadas  $Oxy$  de  $\mathbb{R}^2$  de modo que  $Circ(\alpha)$  seja um círculo centrado na origem  $O$  e com raio  $R_0$ , tal que o traço de  $\alpha$  não possui pontos sobre o  $Circ(\alpha)$  com  $x \leq 0$ . Parametrize  $Circ(\alpha)$  pelo traço da aplicação  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $\gamma(t) = (R_0 \cos t, R_0 \sin t)$  e considere a função  $h : [\pi/2, 3\pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$h(u) = \min_{t \in [a, b]} \|\gamma(u) - \alpha(t)\|.$$

A função  $h$  é contínua e  $h(u) > 0$ ,  $\forall u \in [\pi/2, 3\pi/2]$ . Como  $h$  assume o seu valor mínimo, temos que

$$\xi_0 = \min\{h(u), u \in [\pi/2, 3\pi/2]\} > 0.$$

Observe que o traço de  $\alpha$  está contido no círculo de centro  $(\frac{\xi_0}{2}, 0)$  e raio  $R_0$  sendo, portanto, possível obtermos um disco de raio menor que  $R_0$  que ainda contém o traço de  $\alpha$ , visto que o traço de  $\alpha$  está contido em dois discos distintos de mesmo raio, o que contradiz a definição de  $Circ(\alpha)$ .  $\square$

Esse lema tem, como conseqüência imediata, o seguinte resultado:

**Lema 6.3** *O traço de uma curva fechada e regular intersecta seu círculo circunscrito em pelo menos dois pontos. Além disso, se ele intersecta em exatamente dois pontos, tais pontos estão diametralmente opostos.*

Vamos agora estudar o comportamento dos pontos do traço de  $\alpha$ , que estão sobre  $Circ(\alpha)$ .

**Lema 6.4** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva de Jordan, regular, parametrizada pelo comprimento de arco e orientada de modo que o campo normal  $N$  aponte para a região limitada pelo seu traço. Para cada  $t \in [a, b]$ , tal que  $\alpha(t) \in Circ(\alpha)$ , as retas tangentes à  $\alpha$  e  $Circ(\alpha)$  coincidem em  $\alpha(t)$  e a curvatura  $k$  de  $\alpha$  satisfaz*

$$k(t) \geq \frac{1}{R_0},$$

onde  $R_0$  é o raio de  $Circ(\alpha)$ .

**Prova.** Seja  $P_0$  o centro de  $Circ(\alpha)$ . Se  $\alpha(t_1) \in Circ(\alpha)$ , a função  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$h(t) = \|\alpha(t) - P_0\|^2,$$

possui um máximo em  $t_1$ . Como  $h$  não se anula nesse ponto, é diferenciável em  $t_1$  e, portanto,

$$h'(t_1) = 2\langle \alpha'(t_1), \alpha(t_1) - P_0 \rangle = 0$$

e

$$h''(t_1) = 2\langle \alpha'(t_1), \alpha'(t_1) \rangle + 2\langle \alpha''(t_1), \alpha(t_1) - P_0 \rangle \leq 0.$$

A primeira equação nos diz que as retas tangentes de  $\alpha$  e  $Circ(\alpha)$  coincidem em  $\alpha(t_1)$ , enquanto a segunda equação, devido à orientação de  $\alpha$ , implica que

$$0 \geq \|\alpha'(t_1)\|^2 + \langle \alpha''(t_1), -R_0 N(t_1) \rangle = 1 - k(t_1)R_0,$$

o que conclui a prova.

Finalmente, usaremos os resultados acima para a demonstração do resultado principal deste capítulo.

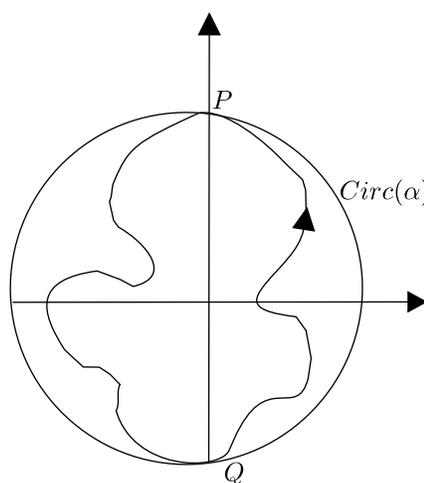
**Prova do Teorema 6.1.** Suponha  $\alpha$  orientada positivamente. Pelo Lema 6.3, existem pelo menos dois pontos  $P$  e  $Q$  do traço de  $\alpha$  pertencentes ao  $Circ(\alpha)$ . Vamos considerar  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  os arcos do traço de  $\alpha$  determinados por  $P$  e  $Q$ . Se algum desses arcos estivesse inteiramente contido em  $Circ(\alpha)$ , a curvatura de  $\alpha$  ao longo desse arco seria constante e, portanto,  $\alpha$  possuiria um número infinito de vértices. Vamos supor então que  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  não estão contidos em  $Circ(\alpha)$ .

**Afirmção 1:** Em cada  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, 2$ , existe um ponto  $\alpha(t_i)$ , tal que

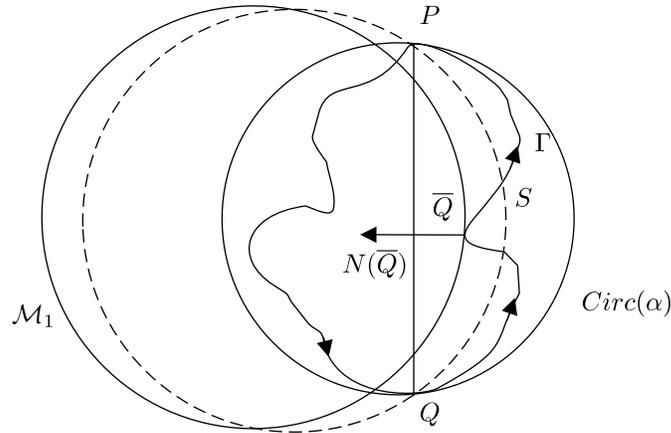
$$k(t_i) < \frac{1}{R_0},$$

onde  $k(t_i)$  é a curvatura de  $\alpha$  em  $t_i$  e  $R_0$  é o raio de  $Circ(\alpha)$ . Observe que, pelo Lema 6.2, a curva  $\alpha$  intersecta todo semi-círculo fechado de  $Circ(\alpha)$ . Portanto, trocando  $\Gamma_i$  por algum sub-arco de  $\Gamma_i$ , podemos supor que os extremos de  $\Gamma_i$  estão em um semi-círculo fechado de  $Circ(\alpha)$ . Como estamos supondo que o número de vértices de  $\alpha$  é finito,  $\Gamma_i \not\subset Circ(\alpha)$ , e, portanto, existe  $Q_i \in \Gamma_i$  que pertence ao interior do disco  $\mathcal{D}$ , delimitado

por  $Circ(\alpha)$ . Além disso, a reta que passa por  $P$  e  $Q$  intersecta  $Circ(\alpha)$  transversalmente. Logo, pelo Lema 6.4, ela é transversal ao traço de  $\alpha$ , o que implica que existem pontos do traço de  $\alpha$  de ambos os lados dessa reta. Fixe um dos arcos  $\Gamma_i$  e, por simplicidade, denote-o por  $\Gamma$ . Escolha o sistema de coordenadas  $Oxy$  de  $\mathbb{R}^2$  de modo que a reta que passa por  $P$  e  $Q$  seja o eixo  $Oy$ , o centro de  $Circ(\alpha)$  esteja sobre o eixo  $Ox$  e  $\Gamma$  possua pontos com coordenada  $x$  positiva (veja a figura abaixo).



Nesse sistema de coordenadas, o centro de  $Circ(\alpha)$  é da forma  $(x_0, 0)$ , com  $x_0 \leq 0$ . Seja  $S \in \Gamma$  um ponto no interior de  $\mathcal{D}$ , e seja  $\mathcal{M}$  o círculo determinado por  $P$ ,  $Q$  e  $S$ . Visto que  $S$  está no interior de uma metade de  $\mathcal{D}$ , o raio  $\bar{R}$  de  $\mathcal{M}$  é estritamente maior que  $R_0$ . O centro de  $\mathcal{M}$  é, portanto, um ponto da forma  $(\lambda, 0)$ , com  $\lambda < 0$ . Considere  $\mathcal{M}_t$  o círculo de centro  $(\lambda - t, 0)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$  e raio  $\bar{R}$ . Como  $\Gamma$  é um arco fechado, existe um último valor de  $t$  para o qual  $\mathcal{M}_t$  intersecta o arco  $\Gamma$ . Seja  $t_1 \in \mathbb{R}$ , tal que  $\mathcal{M}_{t_1} \cap \Gamma \neq \emptyset$ , porém, para todo  $t > t_1$ ,  $\mathcal{M}_t \cap \Gamma = \emptyset$ . Denote por  $\mathcal{M}_1$  o círculo  $\mathcal{M}_{t_1}$ , e seja  $\bar{Q} \in \mathcal{M}_{t_1} \cap \Gamma$ .



Observe que em  $\bar{Q}$ , as retas tangentes à  $\Gamma$  e à  $\mathcal{M}_1$  coincidem e, numa vizinhança desse ponto,  $\Gamma$  fica no exterior de  $\mathcal{M}_1$ . Como o vetor normal à  $\alpha$  em  $\bar{Q}$  aponta para o interior de  $\mathcal{M}_1$ , um argumento análogo ao do Lema 6.4 implica que a curvatura em  $\bar{Q}$  satisfaz

$$k(\bar{Q}) \leq \frac{1}{R} < \frac{1}{R_0},$$

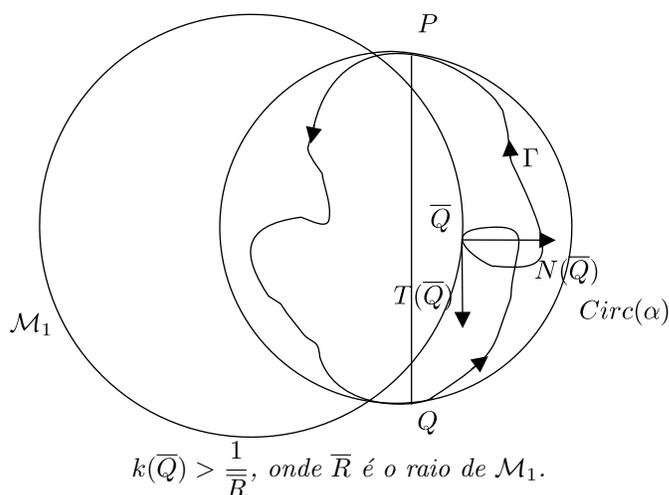
o que prova a afirmação.

Decorre da afirmação 1 que, em cada arco  $\Gamma_i$ ,  $\alpha$  possui pontos onde a curvatura é menor que a curvatura em seus extremos. Portanto a curvatura de  $\alpha$  possui um mínimo em cada  $\Gamma_i$ , digamos em  $\alpha(\bar{t}_i)$ , com

$$k(\bar{t}_i) \leq \frac{1}{R} < \frac{1}{R_0}.$$

Logo a curva  $\alpha$  possui pelo menos dois vértices. Agora observe que os arcos determinados pelos pontos  $\alpha(\bar{t}_i)$  possuem pontos,  $P$  e  $Q$ , com curvatura maior que a curvatura em seus extremos. Assim a curvatura de  $\alpha$  possui máximo em cada um desses arcos, o que implica que  $\alpha$  possui pelo menos mais dois vértices, portanto, totalizando pelo menos quatro vértices.  $\square$

**Observação 6.1** A curva  $\alpha$  ser curva de Jordan é fundamental para a estimativa de curvatura no ponto  $\bar{Q}$ . Observe que no ponto  $\bar{Q}$ , veja figura abaixo, a curvatura de  $\alpha$  em  $\bar{Q}$  é maior que  $\frac{1}{\bar{R}}$ .



Vamos estudar a recíproca do Teorema dos Quatro Vértices. Dada uma função contínua  $k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , pelo Teorema Fundamental das Curvas Planas, sabemos que existe uma curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  cuja curvatura em  $t_0$  é  $k(t_0)$ . Uma pergunta natural: quais as condições sobre a função  $k$  garantem que ela possa ser a função curvatura de uma curva fechada?

Se consideramos a função  $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\theta(s) = \int_a^s k(t) dt,$$

então a curva  $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  possui uma parametrização pelo comprimento de arco, dada por  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ , com

$$x(s) = \int_0^s \cos \theta(t) dt, \quad y(s) = \int_0^s \text{sen } \theta(t) dt, \quad (6.1)$$

onde escolhemos o sistema de coordenadas de  $\mathbb{R}^2$  de modo que  $\alpha(a) = (0, 0)$  e o vetor tangente unitário à curva  $\alpha$  em  $t = a$  seja  $(1, 0)$ . Observe, então, que a curva  $\alpha$  é fechada e contínua, se

$$\int_0^l \cos \theta(s) ds = 0 = \int_0^l \sin \theta(s) ds. \quad (6.2)$$

Se  $\alpha$  é fechada e de classe  $\mathcal{C}^1$ , além de (6.2), devemos ter

$$\int_0^l k(s) ds = 2n\pi, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}. \quad (6.3)$$

Para que  $\alpha$  seja fechada e de classe  $\mathcal{C}^2$ , além de (6.2) e (6.3), devemos ter que

$$k \text{ é periódica, de período } \frac{l}{m}, m \in \mathbb{N}. \quad (6.4)$$

Reciprocamente, dada uma função  $k : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ , satisfazendo (6.2), (6.3) e (6.4), então a curva  $\alpha$ , definida por  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ , com  $x$  e  $y$  dadas por (6.1), é fechada, de classe  $\mathcal{C}^2$  e tem  $k$  como curvatura.

No caso em que  $k \geq 0$  e satisfaz (6.2)-(6.4), então  $\alpha$  é uma curva convexa e, portanto, é a extensão periódica de uma curva de Jordan. Nesse caso, a curva é de Jordan, se a condição (6.3) é verificada com  $n = 1$ .

Suponhamos que  $k > 0$  e

$$\int_0^l k(s) ds = 2\pi. \quad (6.5)$$

Nesse caso, a função  $\theta : [0, l] \rightarrow [0, 2\pi]$ , dada por

$$\theta(s) = \int_0^s k(t) dt,$$

é diferenciável e invertível. Se  $s : [0, 2\pi] \rightarrow [0, l]$  indica a inversa da função  $\theta$ , considere  $T(s) = T(s(\theta))$  a indicatriz tangente e  $N(s) = N(s(\theta))$  a indicatriz normal de  $\alpha$ . A condição (6.2) se escreve como

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{k(\theta)} d\theta = 0 = \int_0^{2\pi} \frac{\text{sen } \theta}{k(\theta)} d\theta, \quad (6.6)$$

onde  $k(\theta) = k(s(\theta))$  é a curvatura de  $\alpha$ . Em termos vetoriais, essa equação é equivalente à

$$\int_0^{2\pi} \frac{T(\theta)}{k(\theta)} d\theta = 0,$$

ou, ainda,

$$\int_0^{2\pi} \frac{N(\theta)}{k(\theta)} d\theta = 0. \quad (6.7)$$

Finalmente, a condição (6.5) é equivalente a considerar a função  $k$  como uma função contínua com valores reais, definida sobre o círculo unitário  $\mathbb{S}^1 = \{(\cos \theta, \text{sen } \theta) | 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ . Pelas considerações acima, temos o resultado seguinte:

**Proposição 6.1** *Seja  $k : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e positiva, tal que*

$$\int_0^{2\pi} \frac{N(\varepsilon)}{k(\varepsilon)} d\varepsilon = 0, \quad (6.8)$$

onde  $N(\varepsilon) = (\cos \varepsilon, \text{sen } \varepsilon)$  e  $k(\varepsilon) = k(\cos \varepsilon, \text{sen } \varepsilon)$ . Então existe uma curva convexa e de Jordan  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , cuja indicatriz normal é  $N$  e a curvatura no ponto  $\alpha(\varepsilon)$  é  $k(\varepsilon)$ . Além disso, tal curva é única, a menos de translação.

**Prova.** Considere a curva  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  de coordenadas

$$x(t) = \int_0^t \frac{\text{sen } \varepsilon}{k(\varepsilon)} d\varepsilon + c_1 \quad \text{e} \quad y(t) = \int_0^t \frac{-\cos \varepsilon}{k(\varepsilon)} d\varepsilon + c_2.$$

Temos que

$$x'(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{k(t)} \quad \text{e} \quad y'(t) = \frac{\operatorname{cos} t}{k(t)},$$

e, portanto,

$$N(t) = (\operatorname{cos} t, \operatorname{sen} t).$$

Além disso, usando (1.9), a curvatura de  $\alpha$ , no ponto  $\alpha(t)$ , é dada por  $k(t)$ . Finalmente, a condição (6.8) implica que

$$\alpha(2\pi) = (0, 0) = \alpha(0).$$

Logo  $\alpha$  é uma curva fechada e contínua. Além disso, a indicatriz tangente de  $\alpha$  é dada por  $T(t) = (\operatorname{sen} t, -\operatorname{cos} t)$ , o que acarreta

$$T(2\pi) = (0, -1) = T(0).$$

Logo, como  $k$  é periódica, com período  $2\pi$ ,  $\alpha$  é uma curva de Jordan e de classe  $\mathcal{C}^2$ .

□

A proposição anterior, nos deu condições necessárias e suficientes para que uma função contínua e positiva  $k : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  seja a curvatura de uma curva de Jordan  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , de classe  $\mathcal{C}^2$ , com a indicatriz normal em  $\alpha(t)$  dada por  $N(t) = (\operatorname{cos} t, \operatorname{sen} t)$ . Observe que esta parametrização é especial, no sentido que estamos fixando  $N$  em cada  $t \in [0, 2\pi]$ .

Vamos supor que  $k : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  seja uma função positiva, tal que  $k(0) = k(2\pi)$  satisfazendo

$$\int_0^{2\pi} \frac{N(\varepsilon)}{k(\varepsilon)} d\varepsilon \neq 0.$$

Suponha, no entanto, que exista uma curva  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  fechada e de classe  $\mathcal{C}^2$ , tal que a curvatura de  $\alpha$  em  $\alpha(t)$  seja  $k(t)$ . Se  $h : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$  representa o ângulo que a indicatriz

normal  $N$  faz com o eixo  $Ox$  positivo, temos que, pelo fato de  $\alpha$  ser uma curva convexa e de Jordan,  $h$  é um difeomorfismo, com  $h(0) = h(2\pi)$ ,  $h'(0) = h'(2\pi)$  e

$$N(t) = (\cos h(t), \operatorname{sen} h(t)).$$

Então a curva  $\beta : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\beta(t) = \alpha \circ h^{-1}(t),$$

é tal que a sua curvatura em  $\beta(t)$  é  $\bar{k}(t) = k \circ h^{-1}(t)$  e sua indicatriz normal é  $N(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ . Logo

$$\int_0^{2\pi} \frac{N(\varepsilon)}{\bar{k}(\varepsilon)} d\varepsilon = \int_0^{2\pi} \frac{N(\varepsilon)}{k \circ h^{-1}(\varepsilon)} d\varepsilon = 0. \quad (6.9)$$

Reciprocamente, se existe um difeomorfismo  $h : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$ , com  $h(0) = h(2\pi)$ ,  $h'(0) = h'(2\pi)$ , tal que (6.9) se verifique, pela proposição anterior, podemos considerar a função  $\bar{k} = k \circ h^{-1} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ . Portanto, aplicando a Proposição 6.1, temos que existe uma curva de Jordan  $\beta : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , de classe  $\mathcal{C}^2$ , tal que a sua curvatura em cada ponto é  $\bar{k}$ . Logo a curva  $\alpha = \beta \circ h$  é uma curva de Jordan, convexa, de classe  $\mathcal{C}^2$  e cuja curvatura em cada ponto é  $k$ . Mostramos, então, o resultado seguinte:

**Proposição 6.2** *Sejam  $k : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e positiva e  $h : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$  um difeomorfismo, tal que  $h(0) = h(2\pi)$ ,  $h'(0) = h'(2\pi)$  e*

$$\int_0^{2\pi} \frac{N(\varepsilon)}{k \circ h^{-1}(\varepsilon)} d\varepsilon = 0, \quad (6.10)$$

onde  $N(\varepsilon) = (\cos \varepsilon, \operatorname{sen} \varepsilon)$ . Então existe uma curva convexa e de Jordan  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , cuja curvatura no ponto  $\alpha(\varepsilon)$  é  $k(\varepsilon)$ . Além disso, tal curva é única, a menos de translação.

A condição (6.10) é, então, uma condição necessária e suficiente para que uma função  $k$  seja a função curvatura de uma curva fechada, convexa e de classe  $\mathcal{C}^2$ . O próximo resultado, vai nos dar condições sobre uma função positiva e contínua para ela satisfazer (6.10).

**Teorema 6.2** *Seja  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função positiva. Então existe um difeomorfismo  $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ , tal que*

$$\int_{\mathbb{S}^1} f \circ h^{-1}(\phi) d\phi = 0,$$

*se e somente se  $f$  é constante ou  $f$  possui pelo menos dois pontos de mínimo relativo e pelo menos um máximo relativo em cada um dos arcos determinados pelos pontos de mínimo relativo.*

**Prova.** Veja [Gl], p. 303.

Como consequência desse teorema, obtemos a recíproca do Teorema dos Quatro Vértices.

**Teorema 6.3** *Seja  $k : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, estritamente positiva e com  $k(0) = k(2\pi)$ . Se  $k$  é constante ou possui pelo menos dois pontos de máximo e dois pontos de mínimo, então existe uma curva de Jordan convexa  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que a curvatura de  $\alpha$  em  $\alpha(t)$  é  $k(t)$ .*

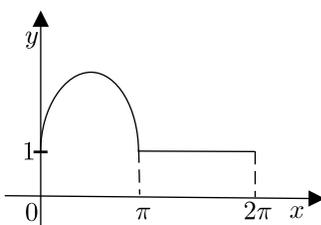
**Prova.** Aplicando o Teorema 6.2 para  $f = \frac{1}{k}$ , obtemos um difeomorfismo  $h : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$  satisfazendo (6.9). O resultado decorre da Proposição 6.2. □

**Observação 6.2** *Observe que a condição sobre os quatro pontos críticos de  $k$  no enunciado acima, não é equivalente ao Teo-*

rema dos Quatro Vértices. De fato, no nosso enunciado, não excluimos a possibilidade em que a curvatura seja constante em um intervalo, e tenha apenas um outro ponto de máximo ou de mínimo. Considere, por exemplo, a função  $k : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$k(t) = 1 + \operatorname{sen}(t) + |\operatorname{sen}(t)|.$$

Pelo Teorema Fundamental das Curvas Planas, existe uma curva  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  cuja curvatura em  $\alpha(t)$  é  $k(t)$ .



Como  $k|_{[0, \pi]} > k|_{[\pi, 2\pi]}$ , o Teorema de Schur diz que  $|\alpha(\pi) - \alpha(0)| < |\alpha(2\pi) - \alpha(\pi)|$  e, portanto, a curva  $\alpha$  não é uma curva fechada. Com efeito, decorre da prova apresentada para o Teorema dos Quatro Vértices, que existem quatro intervalos disjuntos, eventualmente degenerado em pontos, nos quais  $k' = 0$ .

## 6.2 Exercícios

1. Mostre que uma curva regular não pode ter exatamente um vértice.
2. Encontre os vértices da curva  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\alpha(t) = (a \cos t, b \operatorname{sen} t),$$

com  $a, b > 0$ .

3. Mostre que uma curva fechada e simples, cujo traço descreve o conjunto

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 = 1\},$$

possui oito vértices situados nas retas:  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 0$  e  $x - y = 0$ .

4. Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular e de classe  $\mathcal{C}^3$ . Suponha que em  $t_0 \in [a, b]$ , a curvatura  $k$  de  $\alpha$  possua um máximo ou um mínimo relativo não-nulo. Suponha ainda que esse extremo é não-degenerado, isto é, a derivada de  $k$  troca de sinal em  $t_0$ . Mostre que a evoluta  $\alpha_e$  de  $\alpha$  possui uma cúspide em  $t_0$ , no sentido que as retas tangentes à curva  $\alpha$  em  $\alpha(t)$ , quando  $t$  converge para  $t_0$ , convergem para uma reta  $r$  que passa por  $\alpha_e(t_0)$ , o vetor tangente  $\alpha'_e(t_0)$  é o vetor nulo, mas os vetores tangentes à evoluta  $\alpha_e$  trocam de orientação em  $t_0$ .
5. Considere a curva  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\alpha(t) = ((1 - 2 \operatorname{sen} t) \cos t, (1 - 2 \operatorname{sen} t) \operatorname{sen} t).$$

Mostre que  $\alpha$  é regular, fechada e de classe  $\mathcal{C}^2$ , porém não é simples. Mostre que a curvatura  $k$  de  $\alpha$  é dada por

$$k(t) = \frac{9 - 6 \operatorname{sen} t}{(5 - 4 \operatorname{sen} t)^{3/2}} > 0,$$

e conclua que  $\alpha$  possui apenas dois vértices. Onde falha o argumento da prova do Teorema dos Quatro Vértices?

# Respostas dos Exercícios

Capítulo 1 - Página 66.

1. a)  $k(t) = \frac{2}{a}$ ,

b)  $k(t) = \frac{2 + t^2}{a(1 + t^2)^{3/2}}$ ,

c)  $k(t) = \frac{e^{-at}}{\sqrt{1 + a^2}}$ ,

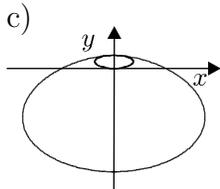
d)  $k(t) = 0$ ,

e)  $k(t) = \frac{3}{4a} \left| \sec \frac{t}{2} \right|$ .

3.  $k(t) = -\frac{t}{(t^2 + 1)^{3/2}}$ , para  $0 < t < \infty$ .

5.  $k(0) = 2a$ .

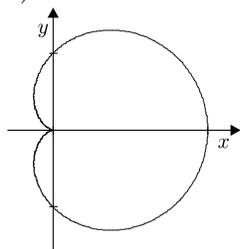
6. b) Não é simples.



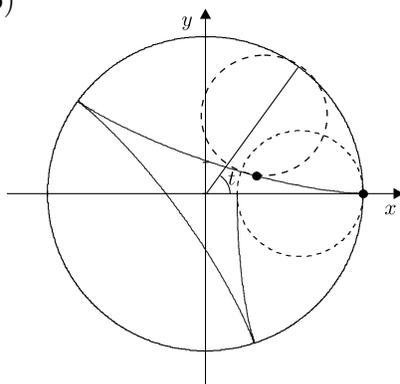
7. b) Sim.

c)  $k(t) = \frac{3}{4}(2 + 2 \cos t)^{1/2}$ .

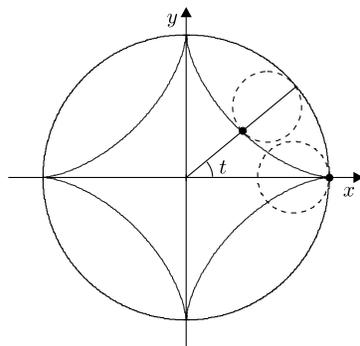
e)



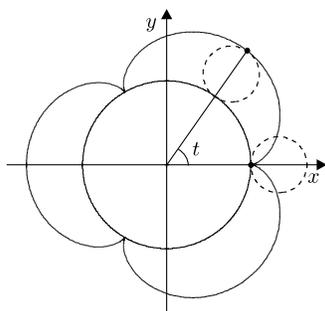
8. b)



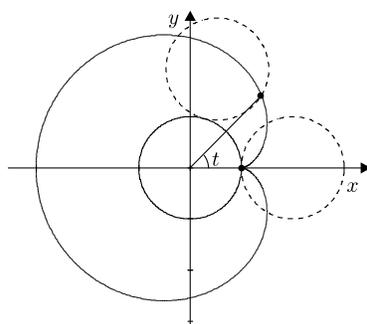
c)



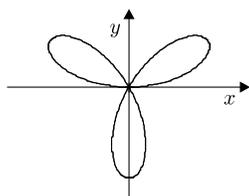
9. b)



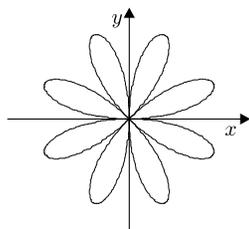
c)



10. b)



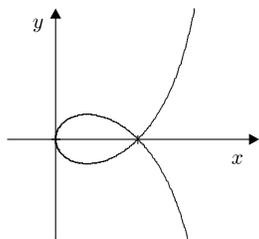
c)

11. a)  $\alpha(t) = (a(1 + \sin(t)), a(1 + \sin(t)) \tan(t))$ .

b) Sugestão: Mostre que a equação polar da estrofóide é dada por

$$r \cos \theta = a(1 \pm \sin \theta),$$

onde  $a = d(O, A)$ .



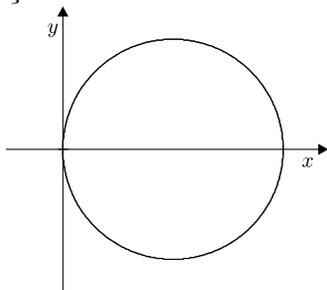
12. Sugestão: Use a forma canônica de  $\alpha$  e de  $S^1$  (ambas têm o mesmo par  $\{T, N\}$ ) e compare as coordenadas em uma vizinhança de  $p$ .

14.  $\alpha_e(t) = \left(-t^2 - \frac{9}{2}t^4, \frac{4}{3}t + 4t^3\right)$  para  $t \neq 0$ .

16.  $k(t) = \sqrt{t}$ .

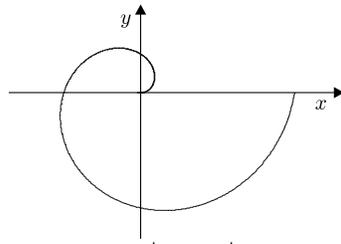
17. a)  $k(\theta) = \frac{2}{a}$

Traço da curva com  $a = 1$ :



b)  $k(\theta) = \frac{2a^2 + r^2}{(r^2 + a^2)^{3/2}}$

Traço da curva com  $a = 3$ :



$$c) k(\theta) = \frac{3}{4a} \left| \sec \frac{\theta}{2} \right|$$

Para o traço da curva, ver a resposta da questão 7, item a).

20.  $\frac{m}{n}$

23.  $r_1(u) = (1+u, 3u+3) \Rightarrow y = 3x$   $r_{-1}(u) = (-1+u, 5-5u) \Rightarrow y = -5x$ .

### Capítulo 2 - Página 128.

1. (i), (ii), (iii) e (v).

2. Dezenove componentes.

### Capítulo 3 - Página 151.

2. a)  $R_\alpha = 4$   
 b)  $R_\alpha = 1$   
 c)  $R_\alpha = 5$   
 d)  $R_\alpha = 2$

### Capítulo 4 - Página 173.

1. Não.

**Capítulo 6 - Página 239.**

2. Em  $t = 0, t = \frac{\pi}{2}, t = \pi$  e  $t = \frac{3\pi}{2}$ .



# Referências Bibliográficas

- [AM] ASPERTI, A.C. E MERCURI, F.- Topologia e Geometria das Curvas Planas. 13º Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 1981.
- [Ar] ARAÚJO, P.V. - Geometria Diferencial. Coleção Matemática Universitária. IMPA, 1998.
- [Bi] BIEBERBACH, L. - Uber eine Extremaleeigenschaft des Kreises. Jahrb. Dtsch. Math. Verein., 24 247-250, (1915).
- [Ch] CHERN, S.S. - Curves and Surfaces in Euclidean Spaces. Studies in Global Geometry and Analysis. The Mathematical Association of America, 1967.
- [CJ] COURANT, R, AND JOHN, F - Introduction to Calculus and Analysis Volume 2. Wiley-Interscience Publication. New York, 1974.
- [dC] DO CARMO, M. P. - Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall, 1976.
- [Gl] GLUCK, H.- The converse to the four-vertex theorem. L'Eiseignement Mathématique, 17 (1971).

- [Jo] JORDAN, C.- Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique. 3<sup>ème</sup> edition, nouveau tirage, Gauthier-Villars. Paris, 1959.
- [L1] LIMA, E.L. - Curso de Análise, volume 1. Projeto Euclides, 1979.
- [L2] LIMA, E.L. - Curso de Análise, volume 2(Terceira Edição). Projeto Euclides, 1989.
- [L3] LIMA, E.L. - Duas novas demonstrações do Teorema de Jordan-Brouwer no caso diferenciável. Matemática Universitária 4 (1986).
- [MR] MONTIEL, S. E ROS, A. - Curvas y Superficies. Proyecto Sur de Ediciones, S.L., 1997.
- [O] OSSERMAN, R. - The four-or-more vertex theorem. Am. Math. Monthly 92 (1985).
- [Ro] RODRIGUEZ, L - Introdução à Geometria Diferencial. 11<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 1979.
- [RS] ROSENTHAL E A. SZASZ, O.- Sur le rayon d'une sphère dont la surface contient une curve fermée. C.R. Acad. Sci. Paris, 25 755-757 (1996).
- [Rd] RUDIN, W. - Real & Complex Analysis. Mc Graw-Hill (1978).
- [Ru] RUTTER, J.W. - Geometry of Curves. Chapman & Hall, Mathematics Series 2000.
- [Sc] SCHUR, A - Über die Schwarzsche Extremaleigenschaft des Kreises unter den Kurven Konstanter Krümmung. Math. Ann Bd 5 143-148 (1921).

- [Tv] TVERBERG, H. - A proof of the Jordan curve theorem.  
Bull. London Math Soc, 12 34-38 (1980).

# Índice Remissivo

- ângulo orientado, 74
- antípoda, ponto, 203
- aplicação
  - suave, 26
- astróide, 61
- círculo, 15, 34, 36, 60
  - osculador, 69
- círculo circunscrito, 228
- círculo osculador, 49
- caminho, 26
- campo
  - de classe  $C^\infty$ , 38
  - de vetores, 37
  - normal, 38, 43
  - normal a uma curva, 40
  - tangente, 38
  - tangente a uma curva, 40
  - unitário, 38
- cardióide, 68, 70
- catenária, 19
- centro de curvatura, 48
- ciclóide, 21, 61
- componente conexa, 100
- comprimento de arco, 32
- conjunto
  - conexo, 100
  - conexo por caminhos, 100
  - convexo, 102, 181
  - imagem, 14
  - localmente conexo, 165
  - simétrico, 120
- coordenadas polares tangenciais, 211
- curva
  - campo de vetores ao longo
    - de uma curva, 38
  - constante, 26
  - contínua, 14
  - convexa, 175, 177
  - da deformação, 95
  - de Hilbert, 24, 173
  - de Jordan, 15
  - de largura constante, 202
  - de Lissajous, 20, 128
  - de Moore, 25
  - de Peano, 24

- estritamente convexa, 175, 177
- fechada, 14, 131
- fechada e simples, 15
- ímpar, 120
- paralela à, 218
- parametrizada pelo comprimento de arco, 33
- parametrizada suave, 26
- periódica, 14, 21
- poligonal inscrita, 33
- positivamente orientada, 164
- regular, 28
- simples, 15
- singular, 28
- curvas
  - congruentes, 57
  - homotópicas, 101
- curvatura, 40
  - absoluta total, 145
  - da cicloide, 61
  - da elipse, 61
  - de uma curva regular, 42
  - em coordenadas polares, 44
  - identicamente zero, 41
  - interpretação geométrica, 46
  - total, 137
- deformação contínua de uma curva, 94
- Desigualdade Isoperimétrica, 168
- diâmetro, 200
- elipse, 16, 60, 138
- elipse, focos da, 16
- epicicloide, 68
- Equações de Frenet, 42
- esfera unitária, 121
- espiral, 22, 37
- espiral de Arquimedes, 23, 52, 70
- estrofóide, 69
- evoluta, 59, 63, 66
  - da cicloide, 62
  - da elipse, 61
- Fórmula de Blaschke, 214
- Fórmula de Cauchy, 212
- Fórmula do número de interseções, 114
- fórmula integral de Cauchy, 125
- Fórmulas de Steiner, 219
- fecho convexo, 220
- fecho de um conjunto, 181
- forma canônica local, 59
- função ímpar, 120
- função angular, 83
- função suporte, 210
- gráfico, 19
- hipérbole, 17

- hipociclóide, 67
- homotopia regular, 134, 135
- imagem normal de Gauss, 132
- imagem tangente de Gauss, 132
- indicatriz normal, 132
- indicatriz tangente, 132
- índice de rotação, 132
- involuta, 64, 66
- largura, 199
- lemniscata, 20, 134
- lemniscata de Bernoulli, 70
- lemniscata de Geronno, 71
- logocíclica, 69
- número de interseções, 106, 107
- número de rotação de uma curva, 86
- orientação positiva de uma curva, 164
- parábola de Neill, 18
- período, 15
- Polinômio de Taylor, 58
- ponto
  - de fronteira, 181
  - exterior, 181
  - focal, 48
  - interior, 181
- produto escalar real, 54
- raio de curvatura, 48
- referencial de Frenet, 40
- reparametrização, 31
  - negativa, 31
  - positiva, 31
  - própria, 31
- reparametrização pelo comprimento de arco, 35
- reta, 27
- reta suporte, 182
- reta tangente, 28
- rosácea, 68
- rotação, 57
- singularidade
  - de uma curva, 28
- Teorema
  - da Rotação das tangentes, 140
  - de Barbier, 207
  - de Borsuk, 121
  - de Brower, 123
  - de Green, 168
  - de Jordan, 164
  - de Jordan regular, 161
  - de Poincaré-Bohl, 103
  - de Rouché, 104
  - de Schur, 194
  - de Schwarz, 198
  - de Whitney-Graustein, 136
  - dos Quatro Vértices, 225

Fundamental da Álgebra,  
119  
Fundamental das Curvas  
Planas, 55  
traço, 14  
translação, 57  
triângulo de Reuleaux, 203  
  
vértice de uma curva regular,  
223  
velocidade escalar, 28  
vetor normal, 40  
vetor tangente, 27  
vetor velocidade, 27