Universidade Federal de Alagoas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Rio São Francisco

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

O Teorema de Alexandrov

Gregório Manoel da Silva Neto

Maceió
Agosto de 2009

MATEMÁTICA
A ciência
do infinito

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

O Teorema de Alexandrov

Gregório Manoel da Silva Neto

Maceió, Brasil
04 de Agosto de 2009

GREGÓRIO MANOEL DA SILVA NETO

O Teorema de Alexandrov

Dissertação de Mestrado, na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 04 de Agosto de 2009 à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva.

Maceió
2009

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

S586t Silva Neto, Gregório Manoel da.
O teorema de Alexandrov / Gregório Manoel da Silva, 2009.
71 f.

Orientador: Hilário Alencar da Silva.
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2009.

Bibliografia: f. 68-69.
Índice: f: 70-71.

1. Geometria diferencial. 2. Laplaciano. 3. Hipersuperfícies. 4. Curvatura média. 5. Curvatura de Ricci. 6. Alexandrov, teorema de. 7. Obata, teorema de. 8. Variedade riemanniana compacta. I. Título.

CDU: 514.764.27

O Teorema de Alexandrov

Gregório Manoel da Silva Neto

Dissertação de Mestrado, na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 04 de Agosto de 2009 à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva (Orientador)

Prof. Dr. Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros

Ao meu orientador Prof. Hilário Alencar, aos
meus pais, irmão e amigos.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Hilário Alencar, pela sua amizade e apoio, por ser muito mais que um orientador, pelos conselhos e pela paciência, mas acima de tudo pelo exemplo e referencial de pessoa e de profissional que tem sido.

Agradeço a Isadora Maria de Jesus pela sua amizade, apoio e auxílio durante todo o curso, pelo auxílio, paciência e disponibilidade para corrigir esta dissertação.

Agradeço ao Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros pela sugestão de incluir a demonstração original do Teorema de Obata.

Aos meus pais pelo apoio e suportes emocional e psicológico.

Ao CNPq pelo suporte financeiro ao longo de todo o Mestrado.

Resumo

O objetivo desta dissertação é apresentar uma demonstração de R. Reilly para o Teorema de Alexandrov. O teorema estabelece que

As únicas hipersuperfícies compactas, conexas, de curvatura média constante, mergulhadas no espaço Euclidiano são as esferas.

O teorema de Alexandrov foi provado por A. D. Alexandrov no artigo *Uniqueness Theorems for Surfaces in the Large V*, publicado em 1958 pela Vestnik Leningrad University, volume 13, número 19, páginas 5 a 8. Em sua demonstração, Alexandrov usou o famoso Princípio de Tangência, introduzido por ele no citado artigo.

No ano de 1962, M. Obata demonstrou em *Certain Conditions for a Riemannian Manifold to be Isometric With a Sphere*, publicado pelo Journal of Mathematical Society of Japan, volume 14, páginas 333 a 340, que uma variedade Riemanniana M, compacta, conexa e sem bordo, é isométrica a uma esfera, desde que a curvatura de Ricci de M satisfaça determinada limitação inferior. Este teorema resolve o problema de encontrar as variedades que atingem a igualdade na estimativa de Lichnerowicz para o primeiro autovalor.

Em 1977, R. Reilly, no artigo *Applications of the Hessian Operator in a Riemannian Manifold*, publicado no Indianna University Mathematical Journal, volume 23, páginas 459 a 452, demonstrou uma generalização do Teorema de Obata para variedades compactas com bordo. Como exemplo da técnica desenvolvida nesta demonstração, ele apresenta uma nova demonstração do Teorema de Alexandrov. Esta demonstração, bem como as técnicas envolvidas, são o objeto de estudo deste trabalho.

Palavras Chave: Geometria diferencial; Laplaciano; Hipersuperfícies; Curvatura média; Curvatura de Ricci; Alexandrov, teorema de; Obata, teorema de; Variedade riemanniana compacta.

Abstract

The goal of this dissertation is to present a R. Reilly's demonstration of the theorem of Alexandrov . The theorem states that

The only compact hypersurfaces, conected, of constant mean curvature, immersed in Euclidean space are spheres.

The theorem of Alexandrov was proved by A. D. Alexandrov in the article *Uniqueness Theorems for Surfaces in the Large V*, published in 1958 by Vestnik Leningrad University, volume 13, number 19, pages 5 to 8. In his demonstration, Alexandrov used the famous Principle of tangency, introduced by him in that article.

In the year 1962, M. Obata shown in *Certain Conditions for a Riemannian Manifold to be isometric With the Sphere*, published by the Journal of Mathematical Society of Japan, volume 14, pages 333 to 340, that a Riemannian Manifold M, compact, connected and without boundary, is isometric to a sphere, since the Ricci curvature of M satisfies certain lower bound. This theorem solves the problem of finding manifolds that reach equality in the estimate of Lichnerowicz for the first eigenvalue.

In 1977, R. Reilly, in the article *Applications of the Hessian operator in a Riemannian Manifold*, published in Indianna University Mathematical Journal, volume 23, pages 459 to 452, showed a generalization of the Obata theorem for compact manifolds with boundary. As an example of the technique developed in this demonstration, he presents a new demonstration of the theorem of Alexandrov. This demonstration, as well as the techniques involved are the object of study of this work.

Keywords: Differential geometry; Laplacian; Hypersurfaces; Mean curvature; Ricci Curvature; Alexandrov, theorem of; Obata, theorem of; Compact riemannian manifolds.

Sumário

Introdução

O objetivo desta dissertação é apresentar uma demonstração de R. Reilly para o Teorema de Alexandrov. O teorema estabelece que

As únicas hipersuperfícies compactas, conexas, de curvatura média constante, mergulhadas no espaço Euclidiano são as esferas.

O teorema foi provado por A. D. Alexandrov em [1]. Em sua demonstração ele usou o famoso Princípio de Tangência, introduzido por ele no citado artigo.

Sejam M uma variedade Riemanniana de dimensão m e R o seu tensor curvatura. A *curvatura de Ricci* de M em p na direção de um vetor unitário $x \in T_pM$ é definida por

$$\mathrm{Ric}_p(x) = \frac{1}{m-1}\,\mathrm{tr}(y \mapsto R(x,y)x).$$

O *tensor de Ricci* é a aplicação $\mathrm{Ric} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{D}(M)$ definida por

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{tr}(Z \mapsto R(X,Z)Y).$$

Sejam M^m e $\overline{M}^{m+1}$ variedades Riemannianas com conexões ∇ e $\overline{\nabla}$, respectivamente. Sejam $x : M \to \overline{M}$ uma imersão isométrica e $U \subset M$ um aberto de M tal que $x|_U$ é um mergulho. Sejam $\mathfrak{X}(U)$ e $\mathfrak{X}(U)^{\perp}$ os conjuntos dos campos de vetores definidos em U que são tangentes e normais a M, respectivamente. Seja $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)^{\perp}$ dada por

$$B(X,Y) = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\perp}$$

a aplicação bilinear associada a segunda forma fundamental de x, para $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ extensões de $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$. Se $\{e_1, \ldots, e_m\}$ é uma base ortonormal para T_pM e $\{e_1, \ldots, e_m, \eta\}$ é uma base ortonormal para $T_p\overline{M}$, então a *curvatura média* H da imersão x é definida por

$$H = \mathrm{tr}\, B = \sum_{i=1}^{m} \langle B(e_i, e_i), \eta \rangle = \sum_{i=1}^{m} h_{ii}.$$

Seja $\mathcal{D}(M)$ o conjunto das funções $f : M \to \mathbb{R}$ que possuem derivadas contínuas de todas as ordens. O *gradiente* de f, denotado por ∇f, é o único campo de vetores que satisfaz a equação

$$Xf = \langle \nabla f, X \rangle, \ \forall\ X \in \mathfrak{X}(M).$$

A *divergência* de um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ é definida por

$$\operatorname{div} X = \operatorname{tr}(Y \mapsto \nabla_Y X).$$

O *Laplaciano* Δf de f é definido por

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f).$$

Variando f sobre $\mathcal{D}(M)$, obtemos um operador $\Delta : \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$, denominado *Laplaciano* de M. Um número real λ é dito um *autovalor* de Δ , se existe uma função $f \in \mathcal{D}(M)$, denominada *autofunção*, tal que $\Delta f + \lambda f = 0$.

Na demonstração do Teorema de Alexandrov, necessitaremos do seguinte

Teorema 0.0.1 (Obata [11], 1962). *Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão m, compacta, sem bordo e conexa. Suponha que o primeiro autovalor não-nulo do Laplaciano de M é dado por*

$$\lambda_1 = mK.$$

Se a curvatura de Ricci na direção do gradiente da autofunção f, associada ao autovalor λ_1, satisfaz

$$\operatorname{Ric}_p(\nabla f) = K|\nabla f|^2,$$

então M é isométrica a uma esfera de raio $\dfrac{1}{\sqrt{K}}$.

O Teorema de Obata classifica todas as variedades Riemannianas compactas, sem bordo e conexas que satisfazem a igualdade da estimativa de Lichnerowicz, a saber:

Teorema 0.0.2 (Lichnerowicz [8],1958). *Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão m, compacta, sem bordo e conexa. Seja $f \in \mathcal{D}(M)$ uma autofunção do Laplaciano de M correspondente ao primeiro autovalor não-nulo, isto é,*

$$\Delta f = -\lambda_1 f, \ \lambda_1 \neq 0.$$

Suponha que a curvatura de Ricci de M na direção do gradiente de f é limitada inferiormente por

$$\mathrm{Ric}_p(\nabla f) \geq K|\nabla f|^2$$

para todo $p \in M$ e para alguma constante $K > 0$. Então

$$\lambda_1 \geq mK.$$

Em 1977, R. Reilly, no artigo [13], demonstrou uma generalização do Teorema de Obata para variedades compactas com bordo. Como exemplo da técnica desenvolvida nesta demonstração, ele apresenta uma nova demonstração do Teorema de Alexandrov. Esta demonstração, bem como as técnicas envolvidas, são o objeto de estudo deste trabalho.

A demonstração do Teorema de Alexandrov aqui apresentada, utiliza uma versão integral da fórmula de Ricci-Bochner-Lichnerowicz desenvolvida por Reilly no artigo citado, a saber:

Teorema 0.0.3 (Fórmula de Reilly, [13]). *Seja D uma variedade Riemanniana de dimensão $m+1$ cujo bordo é dado por uma variedade Riemanniana M de dimensão m. Seja $f \in \mathcal{D}(D)$ satisfazendo o problema de Dirichlet*

$$\Delta f = g \text{ em } D$$

e

$$f = u \text{ em } M.$$

Então

$$\frac{m}{m+1}\int_D g^2 \geq \int_M H f_\eta^2 + \int_M f_\eta \Delta_M u + \int_M \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} h_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta + \int_D \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f),$$

onde H e $h_{\alpha\beta}$ denotam a curvatura média da segunda forma fundamental de M com respeito ao normal η apontando para o exterior (de M) e Ric *é o tensor de Ricci de D. Além disso, a igualdade vale se, e somente se,*

$$f_{ij} = \frac{g\delta_{ij}}{m+1}$$

em D.

A demonstração do Teorema de Alexandrov, bem como dos resultados preliminares, encontram-se em [7]. A demonstração da fórmula de variação de comprimento de arco e dos teoremas de Lichnerowicz e Obata foram baseadas em [4].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos os requisitos necessários para a compreensão dos resultados principais desta dissertação, a saber, os teoremas de Alexandrov e Obata. Salvo menção contrária, os resultados apresentados aqui encontram-se demonstrados em [6]. Ao longo de todo este trabalho, a palavra diferenciável significará possuir derivadas contínuas de todas as ordens.

1.1 Variedades Diferenciáveis e Campos de Vetores

Uma *variedade diferenciável de dimensão* n é um conjunto M e uma família de aplicações injetivas $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$, definidas em abertos U_α de $\mathbb{R}^n$, satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) $\bigcup_\alpha \mathbf{x}(U_\alpha) = M$;

(ii) Para todo par de índices α, β tais que $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$ e $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$ são abertos de $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $\mathbf{x}_\beta \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1} : \mathbf{x}_\alpha^{-1}(W) \to \mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$ são diferenciáveis;

(iii) A família $\{(\mathbf{x}_\alpha, U_\alpha)\}_\alpha$ é maximal com esta propriedade.

A família $\{(\mathbf{x}_\alpha, U_\alpha)\}_\alpha$ recebe o nome de *atlas*. Cada $(\mathbf{x}_\alpha, U_\alpha)$ é denominado *carta* ou *parametrização* ou ainda *sistema de coordenadas*. O conjunto $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ é chamado *vizinhança coordenada* de cada ponto $p \in \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$.

Observemos que o conjunto $\Theta = \{\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha); U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \text{ é aberto}\}$ define uma topologia em M que torna todas as aplicações $\mathbf{x}_\alpha$ homeomorfismos.

Observação 1.1.1. Durante toda esta dissertação, diremos que uma variedade diferenciável M é *compacta* se M é um espaço topológico compacto.

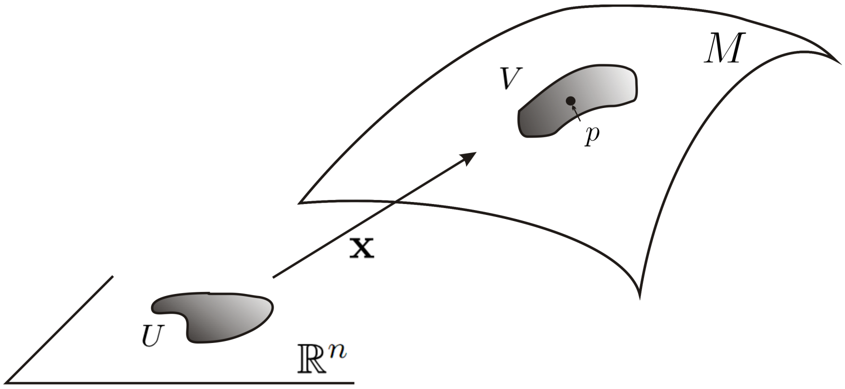

Figura 1.1: Representação geométrica da definição de variedade.

Diremos ainda que M é uma variedade *sem bordo* se $\partial M = \emptyset$, onde ∂M é a fronteira de M.

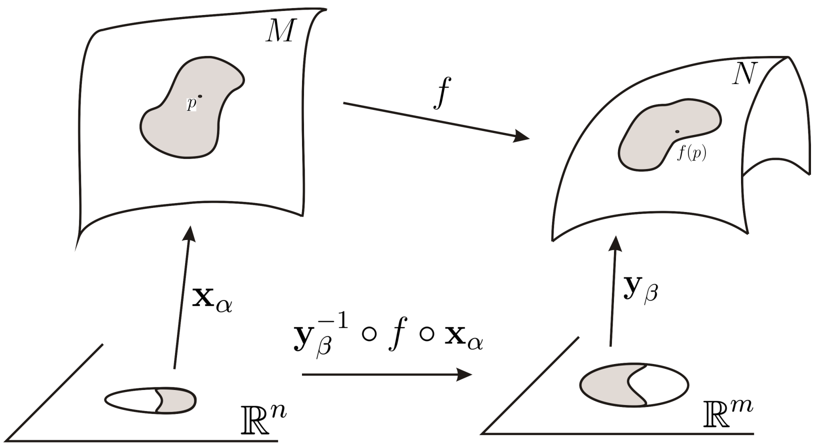

Figura 1.2: Representação geométrica da definição de função diferenciável.

Sejam M^m e N^n duas variedades diferenciáveis de dimensão m e n, com respectivos atlas $\{(\mathbf{x}_\alpha, U_\alpha)\}$ e $\{(\mathbf{y}_\beta, V_\beta)\}$. Dizemos que uma aplicação $f : M \to N$ é diferenciável se as aplicações

$$\mathbf{y}_\beta^{-1} \circ f \circ \mathbf{x}_\alpha : \mathbf{x}_\alpha^{-1}(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbf{y}_\beta^{-1}(V_\beta) \subset \mathbb{R}^n \qquad (1.1)$$

são diferenciáveis para todos α e β. A aplicação (1.1) é chamada *expressão* de f nos sistema de cordenadas $\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{y}_\beta$. Dizemos que f é um difeomorfismo se a expressão em coordenadas de f for um difeomorfismo para todos α, β.

Definição 1.1.1. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é denominada* curva *(diferenciável) em M. Sejam*

$p = \alpha(0)$ *e* $\mathcal{D}(M)$ *o conjunto das funções diferenciáveis de* M *em* $\mathbb{R}$. *O* vetor tangente *à curva* α *em* $t = 0$ *é a aplicação*

$$\begin{array}{rcccl} \alpha'(0) & : & \mathcal{D}(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & f & \longmapsto & \left.\dfrac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0}. \end{array}$$

Com o intuito de simplificar a notação, escreveremos $\dfrac{\partial f}{\partial u_i}$ no lugar de $\dfrac{\partial (f \circ \mathbf{x})}{\partial u_i}$, onde $\mathbf{x}$ é uma parametrização de M em uma vizinhança coordenada. O conjunto de todos os vetores tangentes a M em p é um espaço vetorial denominado *espaço tangente* a M em p, o qual denotaremos por T_pM. O conjunto $TM = \{(p, v); p \in M \text{ e } v \in T_pM\}$ é uma variedade diferenciável de dimensão $2m$, denominada *fibrado tangente*.

Sejam M e N variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M \to N$ é dita uma *imersão* se $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ for injetiva para todo $p \in M$. Se, além disso, φ for um homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset N$, então dizemos que φ é um *mergulho*. Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \to N$ é um mergulho, dizemos que M é uma *subvariedade* de N.

Dizemos que uma variedade diferenciável M é *orientável* se admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ tal que, para todos α, β com $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, a matriz da diferencial da mudança de coordenadas $\mathbf{x}_\alpha^{-1} \circ \mathbf{x}_\beta$ tem determinante positivo. Caso contrário, dizemos que M é *não-orientável*. Se M é orientável, a escolha de uma parametrização satisfazendo a definição acima é chamada de *orientação* de M e, neste caso, dizemos que M está *orientada*.

Definição 1.1.2. *Um* campo de vetores $X : M \to TM$ *em uma variedade diferenciável* M^n *de dimensão* n *é uma correspondência que a cada ponto* $p \in M$ *associa um vetor em* T_pM.

Se considerarmos uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ e definirmos os campos de vetores

$$\begin{array}{rcccl} \dfrac{\partial}{\partial u_i} & : & \mathbf{x}(U) & \longrightarrow & TU \\ & & p & \longmapsto & \dfrac{\partial}{\partial u_i}(p) = d\mathbf{x}_p(e_i), \end{array}$$

então é possível escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}^{-1}(p)) \frac{\partial}{\partial u_i}(p),$$

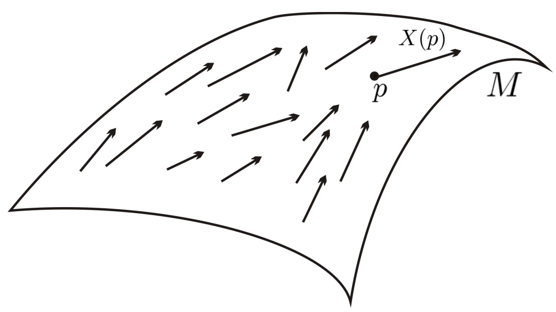

Figura 1.3: Representação de um campo de vetores em uma variedade.

onde cada $a_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função em U e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Dizemos que X é diferenciável se as funções a_i forem diferenciáveis para alguma (e, portanto para qualquer) parametrização.

Uma outra interpretação do conceito de campo de vetores pode ser dada pela aplicação $X : \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$, definida por

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial u_i}.$$

Daqui por diante, a expressão "campo de vetores" significará campo diferenciável de vetores. Também denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto de todos os campos (diferenciáveis) de vetores.

A interpretação de X como um operador em $\mathcal{D}(M)$ permite considerar os iterados de X. Se X e Y são campos de vetores diferenciáveis em M e $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, podemos considerar as funções $X(Yf)$ e $Y(Xf)$. O problema é que, na maioria das vezes, tais operações não conduzem a campos de vetores por envolverem derivadas de ordem superior à primeira. Entretanto, a aplicação

$$\begin{array}{rcccl} [\cdot,\cdot] & : & \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \longmapsto & \mathfrak{X}(M) \\ & & (X,Y) & \longrightarrow & [X,Y] = XY - YX, \end{array}$$

define um campo de vetores chamado *colchete* de X e Y. O colchete possui as seguintes propriedades.

Proposição 1.1.1. *Se X, Y e Z são campos de vetores em M, a, b são números reais e f, g são funções diferenciáveis, então:*

(a) $[X,Y] = -[Y,X]$ *(anti-comutatividade);*

(b) $[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z]$ *(linearidade);*

(c) $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0$ *(identidade de Jacobi);*

(d) $[fX,gY]=fg[X,Y]+f(Xg)Y-g(Yf)X$.

1.2 Métricas Riemannianas

Sejam M uma variedade diferenciável e $p \in M$. Seja $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ um produto interno em T_pM. Variando p sobre M, defina $g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$, por

$$g(X,Y)(p) = g_p(X(p), Y(p)),$$

onde $\mathcal{F}(M)$ denota o conjunto de todas as funções de M em $\mathbb{R}$. Dizemos que g é uma *métrica Riemmaniana* sobre M se $g(X,Y) \in \mathcal{D}(M)$ para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ uma parametrização em torno de $p \in M$. Sejam $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\dfrac{\partial}{\partial x_i} : \mathbf{x}(U) \to TU$ dada por $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(p) = d\mathbf{x}_p(e_i)$. Como todo campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{x}(U))$ pode ser escrito da forma $X(p) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$, vemos que g é uma métrica Riemanniana se, e somente se, as funções $g_{ij} : \mathbf{x}(U) \to \mathbb{R}$ dadas por

$$g_{ij}(p) = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)(p)$$

são diferenciáveis em $\mathbf{x}(U)$. Por sua vez, isto é equivalente a dizer que as funções $g_{ij} \circ \mathbf{x}^{-1} : U \to \mathbb{R}$ são diferenciáveis. As funções g_{ij} são denominadas *expressões da métrica Riemanniana* (ou "os g_{ij} da métrica") no sistema de coordenadas $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$. Uma variedade diferenciável munida de uma métrica Riemanniana é denominada *variedade Riemanniana*.

Definição 1.2.1. *Sejam M e N variedades Riemannianas com métricas g e h, respectivamente. Uma aplicação diferenciável $f : M \to N$ é uma* isometria local *se*

$$g(X,Y)(p) = h(df_p(X), df_p(Y))(f(p)),$$

para todo $p \in M$. Além disso, se f é um difeomorfismo, dizemos que f é uma isometria.

Observação 1.2.1. A definição acima introduz uma relação de equivalência entre duas variedades Riemannianas. Ela diz que duas variedades isometricas são indistinguíveis do ponto de vista métrico. Isto significa que as medidas como ângulo, área, volume, comprimento e curvatura, definidas adiante, são idênticas em ambas as variedades.

Exemplo 1.2.1 (Variedades Imersas)**.** Seja $f : M^n \to N^{n+k}$ uma *imersão*, isto é, $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se N possui uma métrica Riemanniana g então podemos definir uma métrica em M por $h(X,Y)(p) = g(df_p(X), df_p(Y))(p)$, o que torna $f : M \to N$ uma isometria. Tal aplicação é denominada *imersão isométrica.*

Sejam M uma variedade diferenciável e $\alpha : I \to M$ uma curva diferenciável. Um *campo de vetores* V sobre α é uma aplicação $V : I \to TM$ tal que $t \mapsto V(t)f$ é diferenciável, qualquer que seja $f \in \mathcal{D}(M)$. O campo de vetores $d\alpha\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)$, denotado por $fracd\alpha dt$, é chamado *campo de velocidades* de (ou *campo tangente* a) α.

A restrição de uma curva a um intervalo fechado $[a,b] \subset I$ é denominada *segmento.* Se M é uma variedade Riemanniana, então podemos definir o *comprimento* de um segmento por

$$L(\alpha) = \int_a^b \left[g\left(\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt}\right)(t)\right]^{1/2} dt.$$

No restante do trabalho, inspirados pela notação clássica de produto interno, abandonaremos a notação $g(X,Y)$, que será substituida por $\langle X, Y\rangle$, exceto quando houver possibilidade de confusão.

Introduziremos agora a noção de conexão Riemanniana. A conexão é uma generalização da derivada covariante de superfícies.

Definição 1.2.2. *Uma* conexão Riemanniana*, ou simplesmente uma* conexão*, em uma variedade Riemanniana M é uma aplicação*

$$\begin{array}{rcccl} \nabla & : & \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \to & \mathfrak{X}(M) \\ & & (X,Y) & \longmapsto & \nabla_X Y \end{array}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;

(ii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_Y Z$;

(iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$;

(iv) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$; *(simetria)*

(v) $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$.

para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

A proposição a seguir estabelece a relação entre conexão e derivada covariante.

Proposição 1.2.1. *Sejam M uma variedade Riemanniana e ∇ sua conexão. Então existe uma única correspondência que associa a cada campo de vetores V ao longo de uma curva $c : I \subset \mathbb{R} \to M$ um outro campo de vetores $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c, denominado* derivada covariante *de V ao longo de c, tal que:*

(a) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$;

(b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, *onde f é uma função diferenciável em I;*

(c) *Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}(M)$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt}Y$.*

Observação 1.2.2. Um campo de vetores V é dito *paralelo* quando $\frac{DV}{dt} = 0$.

Um conjunto $\{E_1, \dots, E_n\}$ é dito um *referencial* para M se, para cada $p \in M$, o conjunto $\{E_1(p), \dots, E_n(p)\}$ for uma base de T_pM. Isto implica que todo campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ pode ser escrito da forma

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i E_i,$$

onde as funções x_i são diferenciáveis. Um referencial é dito *ortonormal* se $\{E_1(p), \dots, E_n(p)\}$ for uma base ortonormal de T_pM para cada $p \in M$. Dizemos que um referencial é *geodésico* em $p \in M$, se $\nabla_{E_i}E_j(p) = 0$, para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

1.3 Curvatura

Definição 1.3.1. *O* tensor curvatura *ou, simplesmente, a* curvatura *R de uma variedade Riemanniana M, é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z, \;\; Z \in \mathfrak{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

A seguir, enunciaremos algumas das propriedades da curvatura.

Proposição 1.3.1. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M goza das seguintes propriedades:*

(i) *R é bilinear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, isto é,*

$$\begin{array}{rcl} R(fX+gY,Z) & = & fR(X,Z)+gR(Y,Z) \\ R(X,fZ+gW) & = & fR(X,Z)+gR(X,W), \end{array}$$

com $f,g \in \mathcal{D}(M)$, $\quad X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(M)$;

(ii) *Para cada $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, o operador curvatura $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é linear, ou seja,*

$$\begin{array}{rcl} R(X,Y)(Z+W) & = & R(X,Y)Z+R(X,Y)W \\ R(X,Y)(fZ) & = & fR(X,Y)Z, \end{array}$$

com $f \in \mathcal{D}(M)$ e $Z,W \in \mathfrak{X}(M)$;

(iii) *(Primeira Identidade de Bianchi) Para quaisquer $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ vale*

$$R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y=0.$$

Reescrevendo as propriedades acima, obtemos

Corolário 1.3.1. (a) $\langle R(X,Y)Z,T\rangle+\langle R(Y,Z)X,T\rangle+\langle R(Z,X)Y,T\rangle=0$;

(b) $\langle R(X,Y)Z,T\rangle=-\langle R(Y,X)Z,T\rangle$;

(c) $\langle R(X,Y)Z,T\rangle=-\langle R(X,Y)T,Z\rangle$;

(d) $\langle R(X,Y)Z,T\rangle=\langle R(Z,T)X,Y\rangle$.

Proposição 1.3.2. *Seja σ um espaço bidimensional do espaço tangente T_pM e $x,y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(x,y)=\frac{\langle R(x,y)x,y\rangle}{\sqrt{|x|^2|y|^2-\langle x,y\rangle^2}},$$

não depende da escolha dos vetores $x,y \in \sigma$.

Definição 1.3.2. *Sejam $p \in M$ e $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bidimensional. O número real $K(x,y)=K(p,\sigma)$, onde $\{x,y\}$ é uma base qualquer de σ, é chamado de* curvatura seccional de σ em p.

A proposição a seguir mostra que, numa variedade de curvatura seccional constante, o tensor curvatura pode ser escrito de uma forma mais simples.

Proposição 1.3.3. *Sejam M uma variedade Riemanniana e p um ponto de M. Defina uma aplicação trilinear $R' : \mathfrak{X}M \times \mathfrak{X}M \times \mathfrak{X}M \to \mathfrak{X}M$ por*

$$\langle R'(X,Y)Z,T\rangle = \langle X,Z\rangle\langle Y,T\rangle - \langle Y,Z\rangle\langle X,T\rangle,$$

para todo X, Y, Z, $T \in \mathfrak{X}M$. Então M tem curvatura seccional constante igual a K_0 se, e somente se, $R = K_0R'$, onde R é a curvatura de M.

Sejam $p \in M$ e x um vetor unitário de T_pM. Definimos a *curvatura de Ricci* no ponto p na direção de x por

$$\mathrm{Ric}_p(x) = \frac{1}{n-1}\,\mathrm{tr}(y \mapsto R(x,y)x).$$

Se $\{e_1, \ldots, e_{n-1}, x\}$ é uma base ortonormal de T_pM, então

$$\mathrm{Ric}_p(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\langle R(x,e_i)x, e_i\rangle = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} K(x,e_i).$$

A função $\mathrm{Ric}_p : T_pM \to \mathbb{R}$ é uma forma quadrática associada à forma bilinear simétrica

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Ric}_p & : & T_pM \times T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \mathrm{tr}(z \mapsto R(x,z)y). \end{array}$$

Variando p sobre M obtemos um tensor $\mathrm{Ric} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{D}(M)$ dado por

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{tr}(Z \to R(X,Z)Y).$$

Observemos que, se M tem dimensão 2, então Ric_p é a curvatura Gaussiana de M em p. Além disso

$$\mathrm{Ric}_p(x) = \frac{1}{n-1}\,\mathrm{Ric}(X,X)(p).$$

Exemplo 1.3.1. Se M é conexa e tem curvatura seccional constante igual a K, então

$$\mathrm{Ric}_p(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} K(x,e_i) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} K = K.$$

1.4 Equações de Estrutura de Cartan

Nesta seção apresentaremos as equações de estrutura de Cartan, as quais constituem parte importante do chamado *método do referencial móvel*, com o intuito de demonstrar a Fórmula de Ricci-Bochner-Lichnerowicz. Esta fórmula é parte importante na demonstração do Teorema de Lichnerowicz, um dos resultados principais deste trabalho. Os cálculos relacionados às fómulas de Cartan são baseados em [5]. A parte relacionada à formas diferenciais pode ser encontrada em [9].

Sejam $E_1, \ldots E_r, F$ espaços vetoriais. Uma aplicação $\omega : E_1 \times \cdots \times E_r \to F$ é dita *r-linear* quando satisfaz

$$\omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i + \lambda w_i, v_{i+1}, \ldots, v_r) = \omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_r)$$

$$+\lambda\omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, w_i, v_{i+1}, \ldots, v_r).$$

Quando $F = \mathbb{R}$, dizemos que f é uma *forma r-linear* ou uma *r-forma.*

Sejam $\omega_1, \ldots, \omega_r : E \to \mathbb{R}$ funcionais lineares definidos num espaço vetorial E de dimensão finita m. O *produto exterior* $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_r : E^r \to \mathbb{R}$ dos funcionais $\omega_1, \ldots, \omega_r$ é definido por

$$\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_r(v_1, \ldots, v_r) = \det[\omega_i(v_j)].$$

Sejam $\{e_1, \ldots, e_m\}$ uma base para E e $\{de_1, \ldots, de_m\}$ a base dual de E^*. Seja $I = (i_1, \ldots, i_r) \in \{1, \ldots, m\}^r$. Denotaremos por de_I o produto exterior $de_I = de_{i_1} \wedge \ldots \wedge de_{i_r}$.

Proposição 1.4.1. *O conjunto* $\{de_I; I = (i_1, \ldots, i_p) \in \{1, \ldots, n\}^p, i_1 < \ldots < i_p\}$ *é uma base para o espaço* $\mathfrak{U}_r(E)$ *das r-formas.*

Sejam $\omega = \sum_I a_I\omega_I$ uma r-forma e $\eta = \sum_J b_J\omega_J$ uma s-forma. Definimos o *produto exterior* de ω e η por

$$\omega \wedge \eta = \sum_{I,J} a_I b_J \omega_I \wedge \omega_J = \sum_{I,J} a_I b_J \omega_{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{i_r} \wedge \omega_{j_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{j_s}.$$

Sejam M uma variedade diferenciável e $U \subset M$ um aberto. Para cada $p \in M$ considere $\omega(p) : T_pM \times \ldots \times T_pM \to \mathbb{R}$ uma forma r-linear alternada. Estendendo para campos de vetores em $\mathfrak{X}(M)$, obtemos a r-forma $\omega : \mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{D}(M)$. O produto exterior de duas r-formas ω e η é definido pontualmente por

$$(\omega \wedge \eta)(p) = \omega(p) \wedge \eta(p) = \det$$

Seja $\omega = \sum_I a_I \omega_I$ uma r-forma. A *diferencial exterior* de ω, denotada por $d\omega$, é a $(r+1)$-forma dada por

$$d\omega = \sum_{i,I} \frac{\partial a_I}{\partial u_i} \omega_i \wedge \omega_I.$$

Na equação acima, $\dfrac{\partial a_I}{\partial u_i}$ é a derivada de a_I na direção de $\dfrac{\partial}{\partial u_i}$ e ω_i são as formas duais de $\dfrac{\partial}{\partial u_i}$, isto é, $\omega_i\left(\dfrac{\partial}{\partial u_j}\right) = \delta_{ij}$. A proposição a seguir lista algumas das propriedades básicas da diferencial exterior. Uma demonstração para esse resultado pode ser encontrada em [9], exceto pelo item (iv), que se encontra demonstrado em [12], pág. 71.

Proposição 1.4.2. *A diferencial exterior satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $d(\omega + c\eta) = d\omega + cd\eta$, *para todo* $c \in \mathbb{R}$, *e quaisquer* r*-formas* ω, η;

(ii) $d \circ d\omega = 0$;

(iii) *Se* ω *é uma* r*-forma e* η *é uma* s*-forma, então*

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge d\eta;$$

(iv) *Sejam* M *uma variedade e* ω *uma* r*-forma. Então, para* $X_1, \ldots, X_{r+1} \in \mathfrak{X}(M)$, *temos*

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \ldots, X_{r+1}) &= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} X_i(\omega(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{r+1})) \\ &\quad + \sum_{i<j}^{r+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{r+1}), \end{aligned}$$

onde $\hat{X}_k$ *significa que* X_k *foi omitido.*

Observação 1.4.1. No caso $r = 1$ temos

$$d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Seja ∇ a conexão numa variedade Riemanniana M de dimensão n. Fixemos um aberto $U \subset M$, que pode ser uma vizinhança coordenada, e $E_1, \ldots, E_n$ um referencial em U. Sejam $\omega_1, \ldots, \omega_n$ as 1-formas duais de $E_1, \ldots, E_n$, isto é, $\omega_i(E_j) = \delta_{ij}$. Seja $X \in \mathfrak{X}(X)$. Definimos as 1-*formas de conexão* ω_{ij} por

$$\nabla_X E_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_{ij}(X) E_j.$$

Segue que

$$\omega_j(\nabla_X E_i) = \sum_{k=1}^{n} \omega_{ik}(X)\omega_j(E_k) = \sum_{k=1}^{n} \omega_{ik}(X)\delta_{jk} = \omega_{ij}(X)$$

e, portanto, ω_{ij} é linear e diferenciável. Se $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é ortonormal, então

$$\langle \nabla_X E_i, E_j \rangle = \left\langle \sum_k \omega_{ik}(X) E_k, E_j \right\rangle = \sum_k \omega_{ik}(X) \langle E_k, E_j \rangle = \omega_{ij}(X),$$

o que implica

$$0 = X\langle E_i, E_j \rangle = \langle \nabla_X E_i, E_j \rangle + \langle \nabla_X E_j, E_i \rangle = \omega_{ij}(X) + \omega_{ji}(X).$$

Como $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \\
&= \nabla_X \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i(Y) E_i \right) - \nabla_Y \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i(X) E_i \right) - \sum_{i=1}^{n} \omega_i([X, Y]) E_i \\
&= \sum_i \omega_i(Y) \nabla_X E_i - \sum_i \omega_i(X) \nabla_Y E_i + \sum_i X\omega_i(Y) E_i \\
&\quad - \sum_i Y\omega_i(X) E_i - \sum_i \omega_i([X, Y]) E_i \\
&= \sum_{i,j} \omega_i(Y)\omega_{ij}(X) E_j - \sum_{i,j} \omega_i(X)\omega_{ij}(Y) E_j + \sum_i d\omega_i(X, Y) E_i \\
&= -\sum_{i,j} \omega_i \wedge \omega_{ij}(X, Y) E_j + \sum_j d\omega_j(X, Y) E_j,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$d\omega_i(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \omega_j \wedge \omega_{ji}(X,Y). \tag{1.2}$$

A equação (1.2) é denominada *1ª equação de estrutura de Cartan.*

Seja $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ o tensor curvatura e defina Ω_{ij} por

$$R(X,Y)E_i = \sum_{j=1}^{n} \Omega_{ij}(X,Y)E_j.$$

Escrevendo em termos das formas de conexão, temos

$$\begin{aligned}
-R(X,Y)E_i &= \nabla_X\nabla_Y E_i - \nabla_Y\nabla_X E_i - \nabla_{[X,Y]}E_i \\
&= \nabla_X\left(\sum_k \omega_{ik}(Y)E_k\right) - \nabla_Y\left(\sum_k \omega_{ik}(X)E_k\right) - \sum_k \omega_{ik}([X,Y])E_k \\
&= \sum_k \omega_{ik}(Y)\nabla_X E_k - \sum_k \omega_{ik}(X)\nabla_Y E_k + \sum_k X\omega_{ik}(Y)E_k - \\
&\quad - \sum_k Y\omega_{ik}(X)E_k - \sum_k \omega_{ik}([X,Y])E_k \\
&= \sum_k \omega_{ik}(Y)\sum_l \omega_{kl}(X)E_l - \sum_k \omega_{ik}(X)\sum_l \omega_{kl}(Y)E_l \\
&= \sum_l X\omega_{il}(Y)E_l - \sum_l Y\omega_{il}(X)E_l - \sum_l \omega_{il}([X,Y])E_l \\
&= \sum_{k,l}\left(\omega_{ik}(Y)\omega_{kl}(X) - \omega_{ik}(X)\omega_{kl}(Y)\right)E_l + \sum_l d\omega_{il}(X,Y)E_l \\
&= \sum_l \left[-\sum_k \omega_{ik}\wedge\omega_{kl}(X,Y) + d\omega_{il}(X,Y)\right]E_l.
\end{aligned}$$

Isto implica que

$$\langle R(X,Y)E_i, E_j\rangle = \sum_k \omega_{ik}\wedge\omega_{kj}(X,Y) - d\omega_{ij}(X,Y).$$

Por outro lado,

$$\langle R(X,Y)E_i, E_j\rangle = \left\langle \sum_k \Omega_{ik}(X,Y)E_k, E_j \right\rangle = \Omega_{ij}(X,Y).$$

Assim,

$$d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} - \Omega_{ij}. \tag{1.3}$$

A equação (1.3) é denominada *2ª equação de estrutura de Cartan.* Escrevendo Ω_{ij} em termos da curvatura, temos

$$\begin{aligned}
\Omega_{ij}(X,Y) &= \langle R(X,Y)E_i, E_j\rangle = \langle R(E_i,E_j)X, Y\rangle \\
&= \langle R(E_i,E_j)\sum_k \omega_k(X)E_k, \sum_l \omega_l(Y)E_l\rangle \\
&= \sum_{kl} \langle R(E_i,E_j)E_k, E_l\rangle \omega_k(X)\omega_l(Y) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l(X,Y).
\end{aligned}$$

1.5 Algumas Funções Importantes

Definição 1.5.1 (Gradiente). *O* gradiente *de uma função $f \in \mathcal{D}(M)$ é o único campo de vetores $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$ que satisfaz a equação*

$$\langle \nabla f, X\rangle = Xf, \quad \forall\ X \in \mathfrak{X}(M).$$

Sob o ponto de vista de formas diferenciais, vemos que $df(p)$ é um funcional linear para cada $p \in M$ e, portanto, existe um único vetor $\operatorname{grad} f(p)$ tal que

$$df(p)(X(p)) = \langle \operatorname{grad} f(p), X(p)\rangle_p.$$

Fazendo p variar sobre M, obtemos

$$df(X) = \langle \operatorname{grad} f, X\rangle.$$

Sejam $\{E_1, \ldots, E_n\}$ um referencial ortonormal em M e $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ seu correferencial dual, isto é, $\omega_i(E_j) = \delta_{ij}$ e $\omega_i(p) : T_pM \to \mathbb{R}$ são os funcionais da base dual de $\{E_1(p), \ldots, E_n(p)\} \subset T_pM$. Definimos a *primeira diferencial covariante* f_i de f pela equação

$$df = \sum_{i=1}^{n} f_i \omega_i.$$

Escrevendo $\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^{n} a_i E_i$, obtemos

$$df(E_i) = \sum_{j=1}^{n} f_j \omega_j(E_i) = f_i = \langle \operatorname{grad} f, E_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_j E_j, E_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j \langle E_j, E_i \rangle = a_i,$$

donde

$$f_i = \langle \operatorname{grad} f, E_i \rangle \text{ e } \operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^{n} f_i E_i.$$

Por outro lado, se $X = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial u_i}$ é um campo de vetores, então

$$\begin{aligned} df(X) &= df\left(\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial u_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} b_i df\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_j} dx_j \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_j} \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial f}{\partial u_i} = Xf. \end{aligned}$$

Pela unicidade do gradiente, concluímos que

$$\operatorname{grad} f = \nabla f.$$

Assim sendo, temos

$$f_i = \langle \nabla f, E_i \rangle = E_i(f),$$

donde

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} f_i E_i = \sum_{i=1}^{n} E_i(f) E_i.$$

Definição 1.5.2 (Divergência)**.** *Sejam M uma variedade Riemanniana e $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo de vetores. A* divergência *de X é o traço do operador $Y \mapsto \nabla_Y X$.*

Se $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é um referencial ortonormal para M, então

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle.$$

Com o intuito de descrevermos a interpretação da divergência em termos de formas diferenciais, consideremos $\{E_1, \dots, E_n\}$ um referencial geodésico e $X = \sum_{i=1}^{n} x_i E_i$ um campo de vetores. Derivando x_i exteriormente, obtemos

$$dx_i = \sum_{j=1}^{n} x_{i;j}\omega_j \Rightarrow x_{i;i} = dx_i(E_i) = E_i(x_i).$$

Deste modo, usando o fato do referencial ser geodésico,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle = -\sum_{i=1}^{n} \left[\langle X, \nabla_{E_i} E_i \rangle + E_i \langle X, E_i \rangle \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} E_i \langle X, E_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} E_i(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_{i;i}. \end{aligned}$$

Definição 1.5.3 (Hessiana)**.** *Sejam M uma variedade Riemanniana e $f \in \mathcal{D}(M)$ uma função diferenciável. A* Hessiana *de f é o tensor simétrico*

$$\begin{aligned} \operatorname{Hess} f \ : \ \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathcal{D}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle . \end{aligned}$$

Observação 1.5.1 (Simetria da Hessiana)**.** Escrevendo a Hessiana da forma

$$\operatorname{Hess} f(X,Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle = X\langle \nabla f, Y \rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y \rangle = XYf - (\nabla_X Y)f$$

e usando a fórmula

$$d\omega(X,Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y])$$

para $\omega = df$, vemos que

$$\begin{aligned} 0 = ddf &= Xdf(Y) - Ydf(X) - df([X,Y]) \\ &= XYf - YXf - df(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\ &= [XYf - (\nabla_X Y)f] - [YXf - (\nabla_Y X)f] \\ &= \operatorname{Hess} f(X,Y) - \operatorname{Hess}(Y,X), \end{aligned}$$

isto é,

$$\operatorname{Hess} f(X,Y) = \operatorname{Hess} f(Y,X).$$

Uma norma para a Hessiana de f pode ser definida por

$$|\operatorname{Hess} f|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_j \rangle^2,$$

onde $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é um referencial ortonormal para M.

Iremos agora obter uma expressão para a Hessiana sob a ótica das formas diferenciais. Seja $\{E_1, \ldots, E_n\}$ um referencial geodésico para M. Definimos a *segunda diferencial covariante* f_{ij} de f por

$$\sum_{j=1}^{n} f_{ij}\omega_j = df_i + \sum_{j=1}^{n} f_j \omega_{ij}. \tag{1.4}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{E_j} \nabla f, E_i \rangle &= -\langle \nabla f, \nabla_{E_j} E_i \rangle + E_j \langle \nabla f, E_i \rangle = E_j(f_i) = (f_i)_j = df_i(E_j) \\
&= \sum_{k=1}^{n} f_{ik}\omega_k(E_j) - \sum_{k=1}^{n} f_k \omega_{ik}(E_j) = f_{ij} - \sum_{k=1}^{n} f_k \langle \nabla_{E_j} E_i, E_k \rangle \\
&= f_{ij}.
\end{aligned}$$

Logo, se $X = \sum_{i=1}^{n} a_i E_i$ e $Y = \sum_{j=1}^{n} b_j E_j$, então

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hess} f(X, Y) &= \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j f_{ij} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j f_{ij} \omega_i(E_i) \omega_j(E_j) = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_k b_l f_{ij} \omega_i(E_k) \omega_j(E_l) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} \omega_i \left(\sum_{k=1}^{n} a_k E_k \right) \omega_j \left(\sum_{l=1}^{n} a_l E_l \right) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} \omega_i(X) \omega_j(Y) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} \omega_i \otimes \omega_j(X, Y),
\end{aligned}$$

onde $\omega_i \otimes \omega_j(X, Y) = \omega_i(X)\omega_j(Y)$ é o *produto tensorial* das formas ω_i e ω_j. Sob essa nova notação, a norma da Hessiana pode ser escrita da forma

$$|\operatorname{Hess} f|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_j \rangle^2 = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}^2.$$

Definição 1.5.4. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O Laplaciano de f em M é a função*

$$\begin{array}{rccc} \Delta f & : & M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & p & \longmapsto & \operatorname{div}(\nabla f)(p). \end{array}$$

Se $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é um referencial ortonormal, então

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{tr}(X \mapsto \nabla_X \nabla f) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle = \operatorname{tr}(\operatorname{Hess} f).$$

Assim, também poderíamos ter definido o Laplaciano de f em M por

$$\Delta f = \operatorname{tr}(\operatorname{Hess} f).$$

Escrevendo o Laplaciano em formas diferencias, temos

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} f_{ii}.$$

1.6 Geodésicas e Campos de Jacobi

Definição 1.6.1. *Sejam M uma variedade Riemanniana e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Uma curva parametrizada $\gamma : I \to M$ é uma* geodésica *em $t_0 \in I$ se*

$$\frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt} = 0$$

em $t = t_0$; se γ é geodésica em t, para todo $t \in I$, dizemos que γ é uma geodésica em I.

Dizemos que uma geodésica γ é *normalizada* ou que está *parametrizada pelo comprimento de arco* quando $|\gamma'(t)| = 1$, para todo $t \in I$.

Definição 1.6.2. *Sejam M uma variedade Riemanniana e $p \in M$. A* aplicação exponencial $\exp_p : T_pM \to M$ *é a aplicação diferenciável*

$$\exp_p(v) = \gamma(1, p, v) = \gamma(|v|, p, \frac{v}{|v|}),$$

onde $\gamma(t) = \gamma(t, p, v)$ é a única geodésica satisfazendo $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.

Geometricamente, $\exp_p(v)$ é o ponto de M obtido percorrendo-se um comprimento $|v|$, a partir de p, sobre a geodésica que passa por p com velocidade $\dfrac{v}{|v|}$.

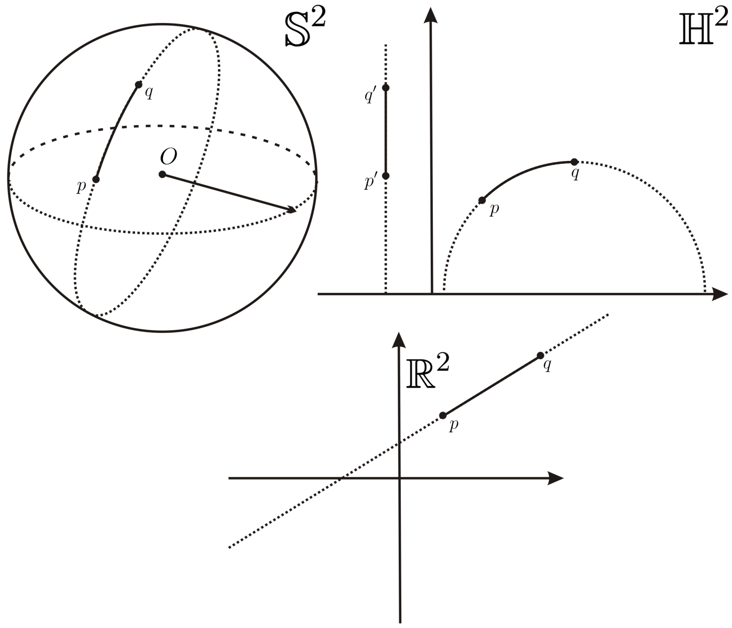

Figura 1.4: As geodésicas da esfera, do plano hiperbólico e do plano Euclidiano.

Definição 1.6.3. *Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto conexo cuja fronteira ∂A é uma curva diferenciável por partes tal que os ângulos dos vértices sejam diferentes de π. Uma* superfície parametrizada *é uma aplicação diferenciável $s : A \to M$, isto é, s se estende a uma aplicação diferenciável $s : U \subset \mathbb{R}^2 \to M$, onde $U \supset A$ é um aberto.*

Um *campo de vetores* em s é uma aplicação $V : A \to TA$ tal que $(u, v) \mapsto V(u, v)f$ é diferenciável para cada função diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$.

Sejam (u, v) as coordenadas cartesianas de $\mathbb{R}^2$. Para v_0 fixo, consideremos a curva $u \mapsto s(u, v_0)$ e o campo de vetores $(u, v_0) \mapsto ds_{(u,s_0)}\left(\frac{\partial}{\partial u}(u, v_0)\right)$. Tal campo será denotado por $\frac{\partial s}{\partial u}$. Analogamente, definimos o campo $\frac{\partial s}{\partial v}$. Se V é um campo de vetores ao longo de s, então definimos as *derivadas covariantes* $\frac{DV}{\partial u}$ e $\frac{DV}{\partial v}$ como sendo as derivadas covariantes ao longo das curvas $u \mapsto s(u, v_0)$ e $v \mapsto s(u_0, v)$, respectivamente.

Lema 1.6.1 (de Simetria)**.** *Se M é uma variedade diferenciável com uma conexão, então*

$$\frac{D}{\partial u}\frac{\partial s}{\partial v} = \frac{D}{\partial v}\frac{\partial s}{\partial u}.$$

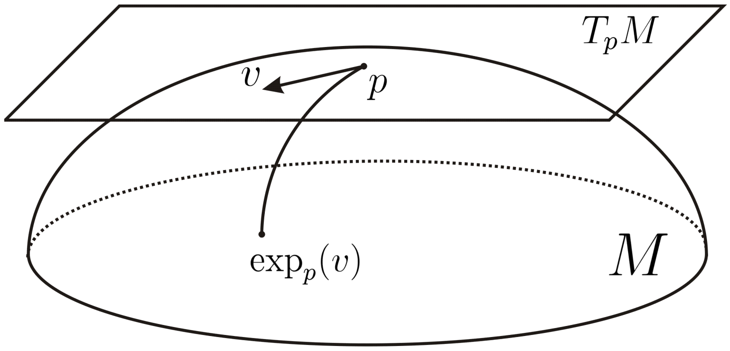

Figura 1.5: A aplicação exponencial.

Lema 1.6.2 (Gauss)**.** *Sejam* $p \in M$ *e* $v \in T_pM$ *tal que* $\exp_p v$ *esteja definida. Seja* $w \in T_v(T_pM) \approx T_pM$*. Então*

$$\langle d(\exp_p)_v(v), d(\exp_p)_v(w)\rangle = \langle v, w\rangle.$$

Seja $V \subseteq T_pM$ uma vizinhança da origem tal que $\exp_p|_V$ é um difeomorfismo. O conjunto $U = \exp_p(V)$ é denominado *vizinhança normal* (ou *geodésica*) de p. Se $B_\varepsilon(0)$ é a bola de centro na origem de T_pM e raio ε, então $B_\varepsilon(p) = \exp_p(B_\varepsilon(0))$ é denominado *bola normal* (ou *geodésica*) de centro p e raio ε, enquanto que $S_\varepsilon(p) = \exp_p(\partial B_\varepsilon(0))$ é denominada *esfera normal* (ou *geodésica*) de centro p e raio ε.

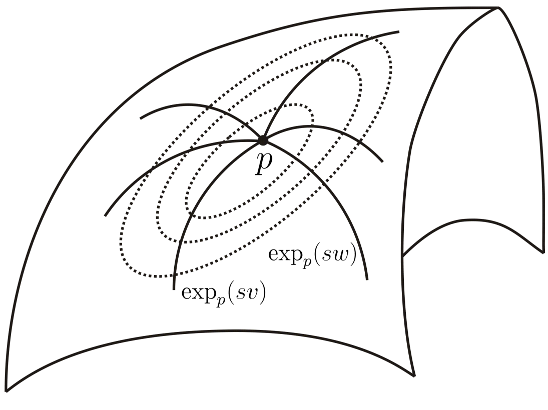

Figura 1.6: Representação de bolas geodésicas.

Observemos que $S_\varepsilon(p)$ é uma subvariedade de M, pois $\exp_p : \partial B_\varepsilon(0) \to S_\varepsilon(p)$ é um difeomorfismo e $\partial B_\varepsilon(0)$ é uma subvariedade de T_pM. O Lema de Gauss implica que $S_\varepsilon(p)$ é ortogonal às geodésicas que partem de p.

Proposição 1.6.1. *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to M$ uma superfície parametrizada e (s,t) as coordenadas de $\mathbb{R}^2$. Seja $V = V(s,t)$ um campo de vetores ao longo de f. Então*

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}V - \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}V = R\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)V.$$

Definição 1.6.4 (Campos de Jacobi)**.** *Um campo de vetores J ao longo de uma geodésica γ é denominado* campo de Jacobi *se satisfaz à equação diferencial*

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0, \tag{1.5}$$

denominada equação de Jacobi*.*

Exemplo 1.6.1 (Campos de Jacobi em variedades de curvatura seccional constante)**.** Sejam M uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante κ, $\gamma : [0,l] \to M$ uma geodésica normalizada e S_κ um campo de Jacobi ao longo de γ, normal a γ'. Primeiramente, observemos que, se T é um campo de vetores ao longo de γ, então

$$\langle R(\gamma', S_\kappa)\gamma', T\rangle = \kappa[\langle\gamma', \gamma'\rangle\langle S_\kappa, T\rangle - \langle\gamma', T\rangle\langle S_\kappa, \gamma'\rangle] = \kappa\langle S_\kappa, T\rangle,$$

pois $\langle\gamma', \gamma'\rangle = 1$ e S_κ é normal a γ'. Logo,

$$R(\gamma', S_\kappa)\gamma' = \kappa S_\kappa.$$

Deste modo, a equação de Jacobi torna-se

$$\frac{D^2 S_\kappa}{\partial t^2} + \kappa S_\kappa = 0.$$

Assim, se $\omega(t)$ é um campo paralelo ao longo de γ, com $\langle\gamma'(t), \omega(t)\rangle = 0$ e $|\omega(t)| = 1$, verificaremos que

$$S_\kappa(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(t\sqrt{\kappa})}{\sqrt{\kappa}}\omega(t) & \text{se} \quad \kappa > 0; \\[2ex] t\omega(t) & \text{se} \quad \kappa = 0; \\[2ex] \dfrac{\operatorname{senh}(t\sqrt{-\kappa})}{\sqrt{-\kappa}}\omega(t) & \text{se} \quad \kappa < 0; \end{cases}$$

para $S_\kappa(0) = 0$ e $S'_\kappa(0) = \omega(0)$. Com efeito, como ω é paralelo, então $\omega(t) = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i(t)$ onde os b_i são constantes e $\{e_1(t), \ldots, e_n(t)\}$ é um referencial ao longo de γ. Deste modo, se $J(t) = \sum_{i=1} f_i(t) e_i(t)$, onde $f_i : I \subset \mathbb{R} \to M$ são funções diferenciáveis, então

$$f_i'' + \kappa f_i = 0, \ f_i(0) = 0 \text{ e } f_i'(0) = b_i.$$

As soluções do sistema acima são

$$f_i(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(t\sqrt{\kappa})}{\sqrt{\kappa}} b_i & \text{se} \quad \kappa > 0; \\ \\ t b_i & \text{se} \quad \kappa = 0; \\ \\ \dfrac{\operatorname{senh}(t\sqrt{-\kappa})}{\sqrt{-\kappa}} b_i & \text{se} \quad \kappa < 0; \end{cases}$$

como desejávamos.

Os resultados a seguir exibem algumas propriedades dos campos de Jacobi.

Proposição 1.6.2. *Seja $\gamma : [0, a] \to M$ uma geodésica. Então um campo de Jacobi ao longo de γ é dado por*

$$J(t) = d(\exp_p)_{t\gamma'(0)}(tJ'(0)), \ t \in [0, a].$$

Proposição 1.6.3. *Seja $\gamma : [0, l] \to M$ uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco. Sejam $\gamma'(0) = v$, $w \in T_pM$, $|w| = 1$ e $\langle v, w \rangle = 0$. Se $K(p, \sigma)$ denota a curvatura seccional do plano gerado por v e w, então*

$$\|J(t)\| = t - \frac{1}{6} K(p, \sigma) t^3 + \tilde{R}(t), \ \lim_{t \to 0} \frac{\tilde{R}(t)}{t^3} = 0. \tag{1.6}$$

Seja $\gamma : [0, l] \to M$ uma geodésica. O ponto $\gamma(t_0)$ é dito *conjugado* de $\gamma(0)$ se existe um campo de Jacobi J, não identicamente nulo, ao longo de γ, tal que $J(t_0) = 0 = J(0)$. O número máximo de tais campos linearmente independentes é a *multiplicidade* do ponto conjugado $\gamma(t_0)$.

A proposição a seguir nos fornece uma relação entre os pontos conjugados e os pontos críticos da aplicação exponencial.

Proposição 1.6.4. *Sejam $\gamma : [0, l] \to M$ uma geodésica e $p = \gamma(0) \in M$. O ponto $q = \gamma(t_0)$, $t_0 \in [0, l]$ é conjugado de p ao longo de γ se, e somente se, $v_0 = t_0\gamma'(0)$ é um ponto crítico de $\exp_p$. Além disso, a multiplicidade de q como ponto conjugado de p é igual à dimensão do núcleo da aplicação linear $d(\exp_p)_{v_0}$.*

1.7 Imersões e Segunda Forma Fundamental

Sejam M e $\overline{M}$ variedades Riemannianas e $f : M \to \overline{M}$ uma imersão. Sejam $\overline{\nabla}$ a conexão Riemanniana de $\overline{M}$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ extensões locais de X e Y, respectivamente. Seja $U \subset M$ um aberto tal que $f|_U$ é um mergulho.

Denotaremos por $\mathfrak{X}(U)^{\perp}$ o conjunto dos campos de vetores normais a $U \approx f(U)$. Definimos a função $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)^{\perp}$ por

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y = \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\right)^{\perp},$$

onde $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são extensões locais de X e Y, respectivamente. Seja $\eta \in (\mathfrak{X}M)^{\perp}$. A aplicação $H_\eta : \mathfrak{X}M \times \mathfrak{X}M \to \mathcal{D}(M)$ dada por

$$H_\eta(X, Y) = \langle B(X, Y), \eta \rangle$$

é uma forma bilinear simétrica.

Definição 1.7.1. *A* segunda forma fundamental II_η *da imersão f segundo o vetor normal η é a forma quadrática associada a forma bilinear H_η, isto é,*

$$II_\eta(X) = H_\eta(X, X).$$

Como H_η é uma forma bilinear simétrica, a ela está associada uma única transformação linear auto-adjunta $A_\eta : \mathfrak{X}M \to \mathfrak{X}M$ que satisfaz

$$\langle A_\eta(X), Y \rangle = H_\eta(X, Y) = \langle B(X, Y), \eta \rangle.$$

O operador A_η é denominado *operador* (ou $1-$ *tensor*) *de Weingarten* de f segundo η. A proposição a seguir expressa o operador de Weingarten em termos da conexão de $\overline{M}$.

Proposição 1.7.1. *Sejam $p \in M$, $x \in T_pM$ e $\eta \in T_pM^{\perp}$. Sejam N uma extensão local de η e X uma extensão local de x tangente a M. Então*

$$A_\eta(X) = -(\overline{\nabla}_X N)^{\top}.$$

Teorema 1.7.1 (Gauss)**.** *Sejam $p \in M$ e x, y vetores ortonormais em T_pM. Então*

$$K(x, y) - \overline{K}(x, y) = \langle B(x, x), B(y, y) \rangle - |B(x, y)|^2.$$

1.8 Variedades Completas e Teorema de Hopf-Rinow

Uma variedade Riemanniana é dita *completa* se, para todo $p \in M$, a aplicação exponencial está definida em todo o T_pM, isto é, as geodésicas de M podem ser estendidas a aplicações $\gamma : \mathbb{R} \to M$.

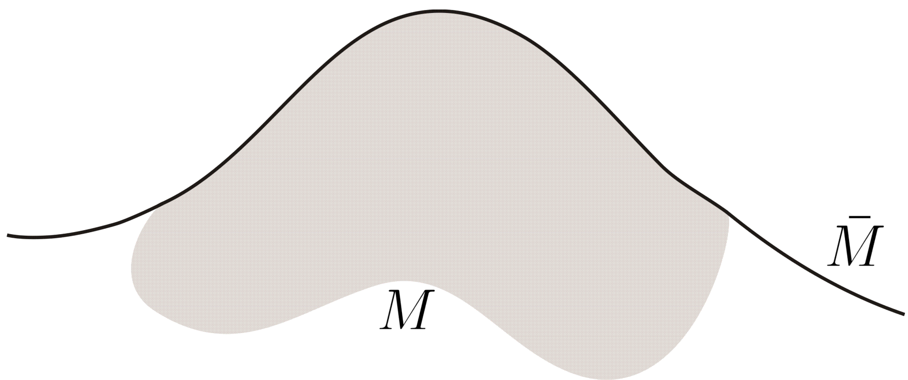

Figura 1.7: Representação de uma variedade estendível.

Definição 1.8.1. *Dados $p, q \in M$, a* distância *de p a q é definida por*

$$d(p,q) = \inf\{L(f_{p,q}); f_{p,q} \text{ é uma curva diferenciável por partes ligando } p \text{ a } q\},$$

onde $L(\alpha)$ indica o comprimento da curva α.

Teorema 1.8.1 (Hopf-Rinow)**.** *Sejam M uma varieadade Riemanniana e $p \in M$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\exp_p$ *está defnida em todo o T_pM;*

(b) *Os limitados e fechados são compactos;*

(c) *(M, d) é um espaço métrico completo;*

(d) *M é uma variedade Riemanniana completa;*

(e) *Existe uma sucessão de compactos $K_n \subset M$ tais que $K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1}$, $\bigcup_n K_n = M$ e, se $q_n \notin K_n$, então $d(p, q_n) \to \infty$.*

Além disso, cada uma das afirmações acima implica

(f) *Para todo $q \in M$ existe uma geodésica γ ligando p a q com $L(\gamma) = d(p,q)$.*

Corolário 1.8.1. *Se M é compacta, então M é completa.*

1.9 Teorema de Cartan

Sejam M e N variedades Riemannianas de mesma dimensão m. Sejam $p \in M$ e $p_0 \in N$. Escolha uma isometria linear $\psi : T_pM \to T_{p_0}N$ e seja $V \subset M$ uma vizinhança normal de p tal que $\exp_p$ está definida em $(\psi \circ \exp_p^{-1})(V)$. Defina $\varphi : V \to N$ por

$$\varphi(x) = \exp_{p_0} \circ \psi \circ \exp_p^{-1}(x).$$

Qualquer que seja $q \in V$ existe uma única geodésica normalizada $\gamma : [0, t] \to M$ satisfazendo $\gamma(0) = p$ e $\gamma(t) = q$. Se P_t é o transporte paralelo de p até q ao longo de γ, definamos ainda $\phi_t : T_qM \to T_{\varphi(q)}N$ por

$$\phi_t(v) = Q_t \circ \psi \circ P_t^{-1}(v), \;\; v \in T_qM,$$

onde Q_t é o transporte paralelo ao longo da geodésica normalizada $\beta : [0, t] \to N$ dada por $\beta(0) = p_0$, $\beta'(0) = \psi(\gamma'(0))$. Finalmente indicamos por R e $\overline{R}$ as curvaturas de M e N, respectivamente.

Teorema 1.9.1 (Cartan)**.** *Com as notações introduzidas acima, se para todo $q \in V$ e quaisquer que sejam $x, y, u, v \in T_qM$ tem-se*

$$\langle R(x, y)u, v\rangle = \langle \overline{R}(\phi_t(x), \phi_t(y))\phi_t(u), \phi_t(v)\rangle,$$

então $\varphi : V \subset M \to \varphi(V) \subset N$ é uma isometria e $d\varphi_p = \psi$.

Corolário 1.9.1. *Sejam M e N espaços de mesma curvatura constante e de mesma dimensão m. Sejam $p \in M$ e $p_0 \in N$. Então existem uma vizinhança $V \subset M$ de p, uma vizinhança $W \subset N$ de p_0 e uma isometria $\varphi : V \to W$.*

A proposição a seguir será útil na demonstração do Teorema de Obata.

Proposição 1.9.1. *Sejam M e N variedades Riemannianas tal que M é conexa. Sejam $f_1, f_2 : M \to N$ duas isometrias locais. Se existe $p \in M$ tal que $f_1(p) = f_2(p)$ e $(df_1)_p = (df_2)_p$, então $f_1 = f_2$.*

1.10 Teorema da Divergência, Teorema Espectral e Princípio do Min-Max

Teorema 1.10.1 (Teorema da Divergência)**.** *Sejam M uma variedade Riemanniana orientada, compacta, com bordo e X um campo de vetores definido em M. Então*

$$\int_M (\operatorname{div} X) dM = \int_{\partial M} \langle X, \eta\rangle dS_M,$$

onde η é o vetor normal unitário apontando para o exterior de ∂M na orientação de M. Se $\partial M = \emptyset$, então

$$\int_M (\operatorname{div} X) dM = 0.$$

Aplicando o Teorema da Divergência ao campo $f\nabla g$, obtemos

$$\int_M [f\Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle] dM = \int_{\partial M} f\langle \nabla g, \eta \rangle dS_M, \tag{1.7}$$

denominada *1ª fórmula de Green.* Através da fórmula (1.7) obtemos a chamada *2ª fórmula de Green*:

$$\int_M (f\Delta g - g\Delta f) dM = \int_{\partial M} \langle f\nabla g - g\nabla f, \eta \rangle dS_M. \tag{1.8}$$

Teorema 1.10.2 (Teorema Espectral)**.** *Seja M uma variedade Riemanniana compacta e orientada. Então são válidas as seguintes propriedades:*

(i) *O conjunto dos autovalores do operador Laplaciano $\Delta : \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$ consiste de uma sequência infinita*

$$(0 \leq) \quad \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots \uparrow +\infty;$$

(ii) *Cada autovalor λ_i tem multiplicidade finita e os autoespaços correspondentes a autovalores distintos são ortogonais no sentido de $L_1^2(M)$, onde $L_1^2(M)$ é o completamento de $\mathcal{D}(M)$ com respeito à norma*

$$\|\varphi\|^2 = \int_M \varphi^2 dM + \int_M |\nabla \varphi|^2 dM;$$

(iii) *A soma direta dos autoespaços correpondentes é densa em $L_1^2(M)$ na topologia da norma e densa em $\mathcal{C}^k(M)$ na topologia da convergência uniforme, k=1,2,. . . .*

O cálculo destes autovalores é dado pelo princípio do Min-Max, que descreveremos a seguir, para mais detalhes, ver [14] e [15].

Teorema 1.10.3 (Princípio do Min-Max)**.** *Sejam f_i as autofunções do Laplaciano correspondentes aos autovalores λ_i, isto é,*

$$\Delta f_i = -\lambda_i f_i.$$

Se $H = \{f \in L_1^2(M); \int_M f dM = 0\}$, *então*

$$\lambda_1 = \inf\left\{\frac{\int_M |\nabla f|^2}{\int_M f^2}; f \in H\right\}$$

e

$$\lambda_i = \inf\left\{\frac{\int_M |\nabla f|^2}{\int_M f^2}; f \in H, \int_M f f_j dM = 0, j = 1, \ldots, i-1\right\}.$$

Em particular

$$\lambda_1 \int_M f^2 \leq \int_M |\nabla f|^2.$$

1.11 Fórmula de Ricci-Bochner-Lichnerowicz

Sejam M uma variedade Riemanniana de dimensão m e $N \subset M$ uma subvariedade de dimensão $n < m$. Seja $\{E_1, \ldots, E_m\}$ um referencial ortonormal em M tal que $\{E_1, \ldots, E_n\}$ seja um referencial em N. Adotando a indexação $1 \leq i, j, k \leq n$ e $n+1 \leq \nu, \eta \leq m$, obtemos uma expressão em formas para a segunda forma fundamental, a saber

$$\omega_{\eta i} = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}^{\eta} \omega_j,$$

onde $h_{ij}^{\eta} = \langle B(E_i, E_j), E_\eta \rangle$. De fato,

$$\overline{\nabla}_X Y = B(X, Y) + \nabla_X Y,$$

onde $\overline{\nabla}$ e ∇ são as conexões de M e N, respectivamente. Usando a definição de ω_{ij}, temos

$$\overline{\nabla}_X E_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}(X) E_j + \sum_{\eta=n+1}^{m} \omega_{i\eta}(E_j) E_\eta \text{ e } \nabla_X E_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}(X) E_j$$

e, portanto,

$$B(E_i, E_j) = \sum_{\eta=n+1}^{m} \omega_{i\eta}(E_j) E_\eta \Rightarrow \langle B(E_i, E_j), E_\eta \rangle = \omega_{i\eta}(E_j),$$

donde segue o afirmado. Sejam $f \in \mathcal{D}(M)$ e

$$df = \sum_{i=1}^{m} f_i \omega_i. \tag{1.9}$$

Derivando (1.9) exteriormente e usando a primeira equação de estrutura, obtemos

$$\begin{aligned} 0 = ddf &= \sum_{i=1}^{m} d(f_i\omega_i) = \sum_{i=1}^{m} df_i \wedge \omega_i + \sum_{i=1}^{m} f_i d\omega_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} df_i \wedge \omega_i + \sum_{i,j=1}^{m} f_i \omega_{ij} \wedge \omega_j \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(df_i + \sum_{j=1}^{m} f_j \omega_{ji} \right) \wedge \omega_i \\ &= \sum_{i,j=1} f_{ij}\omega_j \wedge \omega_i. \end{aligned}$$

Isto implica que $f_{ij} = f_{ji}$ para todo $i, j = 1, \ldots, m$. Deste modo, a Hessiana de f, dada por

$$\operatorname{Hess} f = \sum_{i,j=1}^{m} f_{ij}\omega_i \otimes \omega_j,$$

é um 2-tensor simétrico. Lembremos também que o Laplaciano de f é dado por

$$\Delta f = \operatorname{tr}(\operatorname{Hess} f) = \sum_{i=1}^{m} f_{ii}.$$

Definimos as *terceiras diferenciais covariantes* por

$$\sum_{k=1}^{m} f_{ijk}\omega_k = df_{ij} + \sum_{k=1}^{m} f_{kj}\omega_{ki} + \sum_{k=1}^{m} f_{ik}\omega_{kj}. \tag{1.10}$$

Derivando exteriormente a equação (1.4), pág. 24, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= ddf_i = \sum_{j=1}^{m} d(f_{ij}\omega_j) - \sum_{j=1}^{m} d(f_j\omega_{ji}) \\ &= \sum_{j=1}^{m} df_{ij}\omega_j + \sum_{j=1}^{m} f_{ij} d\omega_j - \sum_{i=1}^{m} df_j \omega_{ji} - \sum_{j=1}^{m} f_j d\omega_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^{m} df_{ij}\omega_j + \sum_{j,k=1}^{m} f_{ij}\omega_{jk} \wedge \omega_k - \sum_{j=1}^{m} df_j\omega_{ji} - \sum_{j,k=1}^{m} f_j \omega_{jk} \wedge \omega_{ki} - \sum_{j=1}^{m} f_j \Omega_{ji} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{m}\left(df_{ij}+\sum_{k=1}^{m} f_{ik}\omega_{kj}\right)\wedge\omega_j-\sum_{j=1}^{m}\left(df_j\omega_{ji}+\sum_{k=1}^{m} f_k\omega_{kj}\wedge\omega_{ji}\right)-\sum_{j=1}^{m} f_j\Omega_{ji}\\
&= \sum_{j=1}^{m}\left(df_{ij}+\sum_{k=1}^{m} f_{ik}\omega_{kj}\right)\wedge\omega_j-\sum_{j=1}^{m}\left(df_j+\sum_{k=1}^{m} f_k\omega_{kj}\right)\wedge\omega_{ji}-\sum_{j=1}^{m} f_j\Omega_{ij}\\
&= \sum_{j=1}^{m}\left(df_{ij}+\sum_{j=1}^{m} f_{ik}\omega_{kj}\right)\wedge\omega_j-\sum_{j=1}^{m}\left(f_{kj}\omega_k\right)\wedge\omega_{ji}-\sum_{j=1}^{m} f_j\Omega_{ji}\\
&= \sum_{j=1}^{m}\left(df_{ij}+\sum_{k=1}^{m} f_{ik}\omega_{kj}+\sum_{k=1}^{m} f_{jk}\omega_{ki}\right)\wedge\omega_j-\sum_{j=1}^{m} f_j\Omega_{ji}\\
&= \sum_{j,k=1}^{m} f_{ijk}\omega_k\wedge\omega_j-\frac{1}{2}\sum_{j,k,l=1}^{m} f_jR_{jikl}\omega_k\wedge\omega_l\\
&= \sum_{j,k=1}^{m} f_{ijk}\omega_k\wedge\omega_j-\frac{1}{2}\sum_{j,k,l=1}^{m} f_lR_{likj}\omega_k\wedge\omega_j\\
&= \sum_{j,k=1}^{m}\left(f_{ijk}-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m} f_lR_{likj}\right)\omega_k\wedge\omega_j\\
&= \sum_{j,k=1}^{m}\left(f_{ikj}-\frac{1}{2}+\sum_{l=1}^{m} f_lR_{lijk}\right)\omega_j\wedge\omega_k.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
f_{ijk}-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m} f_lR_{likj}=0 \quad \text{e} \quad f_{ikj}-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m} f_lR_{lijk}=0.
$$

Isto nos dá

$$
f_{ijk}-f_{ikj}=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m} f_l(R_{likj}-R_{lijk})=\sum_{l=1}^{m} f_lR_{lijk}. \tag{1.11}
$$

A equação (1.11) é conhecida como *identidade de Ricci*. Em particular, para $k=i$,

$$
f_{iji}-f_{iij}=\sum_{l=1}^{m} f_lR_{liji}.
$$

Somando em $1 \leq i \leq m$, obtemos

$$\sum_{i=1}^{m} f_{iji} - \sum_{i=1}^{m} f_{iij} = \sum_{l=1}^{m} f_l \left(\sum_{i=1}^{m} R_{liji} \right) = \sum_{l=1}^{m} f_l \operatorname{Ric}(E_l, E_j),$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^{m} f_{iji} - \sum_{i=1}^{m} f_{iij} = \sum_{l=1}^{m} f_l \operatorname{Ric}(E_l, E_j). \tag{1.12}$$

A equação (1.12) também é conhecida como *identidade de Ricci.*

Teorema 1.11.1 (Fórmula de Ricci-Bochner-Lichnerowicz)**.** *Sejam M uma variedade Riemanniana e $f \in \mathcal{D}(M)$. Então*

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle + \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f) + |\operatorname{Hess} f|^2. \tag{1.13}$$

Demonstração. Seja $\{E_1, \ldots, E_m\}$ um referencial geodésico na vizinhança de um ponto $p \in M$. Então

$$\Delta(|\nabla f|^2) = \sum_{i,j=1}^{m} (f_i^2)_{jj} = \sum_{i,j=1}^{m} (2f_i(f_i)_j)_j = \sum_{i,j=1}^{m} 2(f_i)_j^2 + 2\sum_{i,j=1}^{m} f_i(f_i)_{jj}.$$

Mas

$$(f_i)_j = df_i(E_j) = \sum_{k=1}^{m} f_{ik}\omega_k(E_j) - \sum_{k=1}^{m} f_k\omega_{ik}(E_j) = f_{ij} - \sum_{k=1}^{m} f_k\omega_{ik}(E_j) = f_{ij},$$

pois $\omega_{ik}(E_j) = \langle \nabla_{E_j} E_i, E_k \rangle = 0$. Assim

$$(f_i)_{jj} = (f_{ij})_j = df_{ij}(E_j) = \sum_{k=1}^{m} f_{ijk}\omega(E_j) - \sum_{k=1}^{m} f_{kj}\omega_{ki}(E_j) - \sum_{k=1}^{m} f_{ij}\omega_{jk}(E_j) = f_{ijj},$$

pelo mesmo motivo. Deste modo,

$$\Delta|\nabla f|^2 = 2\sum_{i,j=1}^{m} (f_i)_j^2 + 2\sum_{i,j=1}^{m} f_i(f_i)_{jj} = 2\sum_{i,j=1}^{m} f_{ij}^2 + 2\sum_{i,j=1}^{m} f_i f_{ijj}.$$

Por outro lado,

$$\langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle = \sum_{i=1}^{m} f_i(\Delta f)_i = \sum_{i,j=1}^{m} f_i(f_{jj})_i = \sum_{i,j=1}^{m} f_i f_{jji}.$$

Mas a fórmula de Ricci nos diz que

$$\sum_{j=1}^{m} f_{jij} - \sum_{j=1}^{m} f_{jji} = \sum_{l=1}^{m} f_l \operatorname{Ric}(E_l, E_i) = \operatorname{Ric}(\nabla f, E_i)$$

e isto implica

$$\sum_{i,j=1}^{m} f_i f_{jji} = \sum_{i,j=1}^{m} f_i f_{jij} - \sum_{i=1}^{m} f_i \operatorname{Ric}(\nabla f, E_i) = \sum_{i,j=1}^{m} f_i f_{jij} - \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f).$$

Portanto,

$$\sum_{i,j=1}^{m} f_i f_{jij} = \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f).$$

Entretanto, $f_{jij} = (f_{ji})_j = (f_{ij})_j = f_{ijj}$. Logo,

$$\sum_{i,j=1}^{m} f_i f_{ijj} = \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f),$$

que, juntamente com a expressão

$$|\operatorname{Hess} f|^2 = \sum_{i,j=1}^{m} f_{ij}^2,$$

nos dá o resultado desejado. □

1.12 Variações do Comprimento de Arco

Sejam M uma variedade Riemanniana e $\gamma : [a,b] \to M$ uma geodésica normalizada. Uma *variação* de γ é uma aplicação diferenciável

$$\begin{array}{rccl} \phi & : & [a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon) & \longrightarrow & M \\ & & (s,t) & \longmapsto & \phi(s,t) \end{array}$$

tal que $\phi(s,0) = \gamma(s)$. Iremos supor que as curvas $\alpha_1, \alpha_2 : (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ dadas por $\alpha_1(t) = \phi(a,t)$ e $\alpha_2(t) = \phi(b,t)$ são geodésicas. Definimos os campos de vetores $X, Y : [a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon) \to TM$ por

$$X = d\phi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = \frac{\partial \phi}{\partial s}, \quad Y = d\phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\partial \phi}{\partial t}. \tag{1.14}$$

Observamos que, para $t = 0$, temos $|X| = 1$. Portanto, podemos supor que ε é suficientemente pequeno a fim de garantir que $|X| \neq 0$ no domínio de ϕ.

Sejam $\gamma_t : [a,b] \to M$, dadas por $\gamma_t(s) = \phi(s,t)$, as curvas da variação. O comprimento destas curvas é

$$L(\gamma_t) = \int_a^b \left| \frac{d\gamma_t}{ds} \right| ds = \int_a^b \left| d\phi \left(\frac{\partial}{\partial s} \right) \right| ds = \int_a^b |X(s,t)| ds = \int_a^b E(s,t)^{1/2} ds,$$

onde $E(s,t) = \langle X(s,t), X(s,t) \rangle$. Variando o parâmetro t sobre o intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$, obtemos uma função

$$\begin{array}{rccl} L & : & (-\varepsilon,\varepsilon) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & L(\gamma_t). \end{array} \tag{1.15}$$

Observemos que a diferenciabilidade de ϕ e a hipótese sobre ε implicam que L é diferenciável.

Definição 1.12.1. *A primeira e a segunda derivadas*

$$\left. \frac{dL}{dt} \right|_{t=0} \quad e \quad \left. \frac{d^2L}{dt^2} \right|_{t=0}$$

da função L definida por (1.15) *são denominadas, respectivamente,* primeira *e* segunda variação do comprimento de arco.

Nosso objetivo nesta seção é encontrar uma expressão para a segunda variação do comprimento de arco. Esta fórmula nos será útil na demonstração do Teorema de Obata.

Proposição 1.12.1 (Fórmula da segunda variação do comprimento de arco)**.** *Com as considerações e as notações introduzidas anteriormente, temos*

$$\left. \frac{d^2L}{dt^2} \right|_{t=0} = \int_a^b [|Y'|^2 - \langle R(X,Y)X, Y \rangle - \langle X, Y' \rangle^2] ds,$$

onde $Y' = \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} Y = \dfrac{DY}{\partial s}$ *e R é o tensor curvatura de M.*

Demonstração. Derivando L duas vezes com respeito ao parâmetro t, obtemos

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \int_a^b \sqrt{E(s,t)} ds = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{E(s,t)} ds = \int_a^b \frac{1}{2\sqrt{E(s,t)}} \frac{\partial E}{\partial t}(s,t) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2L}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \int_a^b \frac{1}{2\sqrt{E(s,t)}} \frac{\partial E}{\partial t}(s,t) ds \\ &= \int_a^b \left[-\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{E(s,t)^3}} \left(\frac{\partial E}{\partial t}(s,t) \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{E(s,t)}} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}(s,t) \right] ds. \end{aligned}$$

Logo,

$$\left.\frac{d^2L}{dt^2}\right|_{t=0} = \int_a^b \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}(s,0) - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial E}{\partial t}(s,0)\right)^2\right] ds.$$

Usando o Lema de Simetria,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\langle X, X\rangle &= 2\left\langle \frac{DX}{\partial t}, X\right\rangle = 2\left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial \phi}{\partial s}, X\right\rangle \\
&= 2\left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial \phi}{\partial t}, X\right\rangle = 2\left\langle \frac{D}{\partial s}Y, X\right\rangle = 2\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}Y, X\right\rangle \\
&= 2\langle Y', X\rangle.
\end{aligned}$$

Assim, a Proposição 1.6.1 nos dá

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}Y, X\right\rangle = \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}Y, X\right\rangle + \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}Y, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}X\right\rangle \\
&= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}Y, X\right\rangle + \left\langle R\left(\frac{\partial \phi}{\partial s}, \frac{\partial \phi}{\partial t}\right)Y, X\right\rangle + \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}Y, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}X\right\rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}Y, X\right\rangle - \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}Y, \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}X\right\rangle \\
&\quad + \left\langle R\left(\frac{\partial \phi}{\partial s}, \frac{\partial \phi}{\partial t}\right)Y, X\right\rangle + \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}Y, \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}Y\right\rangle.
\end{aligned}$$

Como γ é uma geodésica e $X(s,0) = \dfrac{\partial \phi}{\partial s}(s,0) = \gamma'(s)$, temos que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}X(s,0) = 0$. Visto que α_1 e α_2 também são geodésicas, o mesmo argumento mostra que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}Y(a,t) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}Y(b,t) = 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_a^b \left[\left.\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\right|_{t=0}\right] ds &= \left.\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}Y, X\right\rangle\right|_a^b - \int_a^b \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}Y, \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}X\right\rangle ds \\
&\quad + \int_a^b \left\langle R\left(\frac{\partial \phi}{\partial s}, \frac{\partial \phi}{\partial s}\right)Y, X\right\rangle ds + \int_a^b \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}Y, \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}Y\right\rangle ds \\
&= \int_a^b \langle R(X,Y)Y, X\rangle ds + \int_a^b |Y'|^2 ds.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d^2L}{dt^2}\right|_{t=0} &= \int_a^b \left[\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\right|_{t=0} - \frac{1}{4}\left.\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)^2\right|_{t=0}\right] ds \\
&= \int_a^b [\langle R(X,Y)Y,X\rangle + |Y'|^2 + \langle Y',X\rangle^2] ds \\
&= \int_a^b [|Y'|^2 - \langle R(X,Y)X,Y\rangle + \langle Y',X\rangle^2] ds.
\end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 2

Resultados Principais

O objetivo deste capítulo é demonstrar o Teorema de Alexandrov. Antes disso, demonstraremos os teoremas de Lichnerowicz [8] e Obata [11]. O Teorema de Lichnerowicz fornece uma estimativa ótima para o primeiro autovalor do Laplaciano em uma variedade compacta. Esta estimativa é atingida pela esfera Euclidiana, como veremos no Exemplo 2.2.1, pág. 44. O Teorema de Obata diz que, reciprocamente, se a estimativa obtida por Lichnerowicz é atingida, então M deve ser isométrica a uma esfera. Estes dois resultados serão úteis na demonstração do Teorema de Alexandrov e as demonstrações que apresentaremos aqui são baseadas em [4]. Logo após, apresentaremos uma versão integral da fórmula de Ricci-Bochner-Lichnerowicz, obtida por R. Reilly em [13] e em seguida demonstraremos o Teorema de Alexandrov. As demonstrações destes dois últimos teoremas, bem como os resultados preliminares, foram baseadas em [7].

2.1 Teoremas de Lichnerowicz e Obata

Lema 2.1.1 (Fórmula de Newton). *Seja $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear e $A = (a_{ij})_{m\times m}$ sua matriz associada a uma par de bases qualquer. Então*

$$\|A\|^2 \geq \frac{1}{m}(\operatorname{tr} A)^2 \tag{2.1}$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, $A = \alpha I$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Com efeito,

$$\|A\|^2 = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}^2 \geq \sum_{i=1}^{m} a_{ii}^2 \geq \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ii}\right)^2 = \frac{1}{m}(\operatorname{tr} A)^2,$$

onde a segunda desigualdade acima é exatamente a desigualdade entre as médias aritmética e quadrática.

A igualdade na primeira desigualdade ocorre se, e somente se, $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Por outro lado, igualdade entre as médias ocorre se, e somente se, $a_{11} = \cdots = a_{mm}$. $\square$

Teorema 2.1.1 (Lichnerowicz, [8])**.** *Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão m, compacta, sem bordo e conexa. Seja $f \in \mathcal{D}(M)$ uma autofunção do Laplaciano de M correspondente ao primeiro autovalor não-nulo, isto é,*

$$\Delta f = -\lambda_1 f, \ \ \lambda_1 \neq 0.$$

Suponha que a curvatura de Ricci de M na direção do gradiente de f é limitada inferiormente por

$$\mathrm{Ric}_p(\nabla f) \geq K|\nabla f|^2,$$

para todo $p \in M$ e para alguma constante $K > 0$. Então

$$\lambda_1 \geq mK.$$

Demonstração. A fórmula de Ricci-Bochner-Lichnerowicz estabelece

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) = \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) + |\operatorname{Hess} f|^2.$$

Integrando sobre M e usando o Teorema da Divergência para $\partial M = \emptyset$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{2}\int_M \Delta|\nabla f|^2 dM &= \int_M \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle dM + \int_M \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) dM \\ &\quad + \int_M |\operatorname{Hess} f|^2 dM. \end{aligned}$$

Se $\{E_1, \ldots, E_m\}$ é um referencial para $\mathfrak{X}(M)$ e $f_i = E_i(f)$, então

$$|\operatorname{Hess} f|^2 = \sum_{i,j=1}^{m} f_{ij}^2 \geq \sum_{i=1}^{m} f_{ii}^2 \geq \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} f_{ii}\right)^2 = \frac{1}{m}(\Delta f)^2 = \frac{\lambda_1^2}{m} f^2.$$

A hipótese sobre a curvatura de Ricci e o fato $\Delta f = -\lambda_1 f$, juntamente com a estimativa acima, fornecem

$$0 \geq -\lambda_1 \int_M |\nabla f|^2 dM + (m-1)K \int_M |\nabla f|^2 dM + \frac{\lambda_1^2}{m}\int_M f^2 dM.$$

Por outro lado, aplicando o Teorema da Divergência na expressão

$$\frac{1}{2}\Delta(f^2) = f\Delta f + |\nabla f|^2,$$

obtemos

$$\int_M |\nabla f|^2 dM = -\int_M f\Delta f dM = \lambda_1 \int_M f^2 dM.$$

Deste modo, temos

$$\begin{aligned} 0 &\geq (-\lambda_1 + (m-1)K)\int_M |\nabla f|^2 dM + \frac{\lambda_1^2}{m}\int_M f^2 dM \\ &= (-\lambda_1 + (m-1)K)\lambda_1 \int_M f^2 dM + \frac{\lambda_1^2}{m}\int_M f^2 dM \\ &= \frac{\lambda_1}{m}[-(m-1)\lambda_1 + m(m-1)K]\int_M f^2 dM. \end{aligned}$$

Como $f^2 \geq 0$ e $\lambda_1 > 0$, vemos que

$$-(m-1)\lambda_1 + m(m-1)K \leq 0,$$

isto é,

$$\lambda_1 \geq mK.$$

$\square$

Exemplo 2.1.1 (Primeiro autovalor do Laplaciano na esfera)**.** O objetivo deste exemplo é calcular o primeiro autovalor não-nulo do Laplaciano de $\mathbb{S}^m$. Iremos utilizar a fórmula do Laplaciano em coordenadas

$$\Delta f = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\sqrt{g} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial u_j}\right), \tag{2.2}$$

para estabelecer uma relação entre o Laplaciano de $\mathbb{S}^m$ e o Laplaciano do espaço ambiente $\mathbb{R}^{m+1}$.

Sejam

$$\mathbb{S}^m(r) = \{x \in \mathbb{R}^{m+1}; |x| = r\}, \quad \mathbb{S}^m = \mathbb{S}^m(1),$$

a esfera de centro na origem de $\mathbb{R}^{m+1}$ e raios r e 1, respectivamente, e $P : [0, +\infty) \times \mathbb{S}^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ dada por

$$x = P(r, \omega) = r\omega,$$

as *coordenadas esféricas* em $\mathbb{R}^{m+1}$. Observemos que, em $\mathbb{R}^{m+1}-\{0\}$ a função P admite uma inversa, dada por

$$P^{-1}(z) = (|z|, \frac{z}{|z|}).$$

Se $\omega(u_1,\ldots,u_m)$ é um sistema de coordenadas para a esfera, então

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \omega \;\text{ e }\; \frac{\partial P}{\partial u_j} = r\frac{\partial \omega}{\partial u_j}.$$

Consequentemente,

$$\left|\frac{\partial P}{\partial r}\right| = 1 \;\text{ e }\; \left\langle \frac{\partial P}{\partial r}, \frac{\partial P}{\partial u_j}\right\rangle = r\left\langle \omega, \frac{\partial \omega}{\partial u_j}\right\rangle = 0, \quad \forall j = 1,\ldots,m,$$

pois, na esfera, o vetor posição é perpendicular a qualquer vetor tangente. Além disso,

$$\left\langle \frac{\partial P}{\partial u_j}, \frac{\partial P}{\partial u_k}\right\rangle = r^2\left\langle \frac{\partial \omega}{\partial u_j}, \frac{\partial \omega}{\partial u_k}\right\rangle, \quad j,k = 1,\ldots,m.$$

Sejam g_{ij} e h_{ij} são os coeficientes das métricas de $\mathbb{R}^{m+1}$ parametrizado pelo sistema de coordenadas esféricas $x = r\omega$ e $\mathbb{S}^m$ munido do sistema de coordenadas $\omega = \omega(u_1,\ldots,u_n)$, respectivamente. Usando o argumento acima,

$$g_{rr} = 1, \quad g_{rj} = 0$$

e

$$g_{jk}(r\omega) = r^2 h_{jk}(\omega).$$

Se $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então pela fórmula (2.2), temos

$$\Delta_{\mathbb{R}^{m+1}} F = \frac{1}{r^m}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^m \frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\mathbb{S}^m}(F\,\big|_{\mathbb{S}^m(r)}). \tag{2.3}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathbb{R}^{m+1}} F &= \sum_{i,j=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial F}{\partial u_j}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{g}g^{rr}\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \Delta_{\mathbb{S}^m(r)}(F\,\big|_{\mathbb{S}^m(r)})\\
&= \frac{1}{r^m\sqrt{h}}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^m\sqrt{h}\frac{\partial F}{\partial r}\right)\right] + \Delta_{\mathbb{S}^m(r)}(F\,\big|_{\mathbb{S}^m(r)})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{r^m}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^m\frac{\partial F}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^m\sqrt{h}}\sum_{j,k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial u_j}\left(\frac{1}{r^2}h^{jk}r^m\sqrt{h}\frac{\partial F}{\partial u_k}\right)\\
&= \frac{1}{r^m}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^m\frac{\partial F}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sqrt{h}}\sum_{j,k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial u_j}\left(h^{jk}\sqrt{h}\frac{\partial F}{\partial u_k}\right)\right]\\
&= \frac{1}{r^m}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^m\frac{\partial F}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\Delta_{\mathbb{S}^m}(F\big|_{\mathbb{S}^m(r)}),
\end{aligned}
$$

onde $\Delta_{\mathbb{R}^{m+1}}$, $\Delta_{\mathbb{S}^m(r)}$ e $\Delta_{\mathbb{S}^m}$ são os Laplacianos nas superfícies indicadas. A notação $\Delta_{\mathbb{S}^m}(F\big|_{\mathbb{S}^m(r)})$ significa que $F\big|_{\mathbb{S}^m(r)}$ é considerada como uma função definida em $\mathbb{S}^m(r)$ e o Laplaciano é calculado com respeito às coordenadas de $\mathbb{S}^m$.

Se F puder ser escrita da forma

$$F(x)=R(r)G(\omega),$$

então

$$(\Delta_{\mathbb{R}^{m+1}}F)(x)=r^{-m}(r^mR'(r))'G(\omega)+r^{-2}R(r)\Delta_{\mathbb{S}^m}G.$$

Em particular, se

$$F(x)=r^kG(\omega), \tag{2.4}$$

para algum inteiro positivo k, então

$$
\begin{aligned}
(\Delta_{\mathbb{R}^{m+1}}F)(x) &= r^{-m}(r^mkr^{k-1})'G(\omega)+r^{k-2}\Delta_{\mathbb{S}^m}G(\omega)\\
&= kr^{-m}(m+k-1)r^{m+k-2}G(\omega)+r^{k-2}\Delta_{\mathbb{S}^m}G(\omega)\\
&= r^{k-2}(k(m+k-1)G(\omega)+\Delta_{\mathbb{S}^m}G(\omega)).
\end{aligned}
$$

Deste modo, F definida em (2.4) é harmônica se, e somente se,

$$\Delta_{\mathbb{S}^m}G+k(m+k-1)G=0. \tag{2.5}$$

Seja $F:\mathbb{R}^{m+1}\to\mathbb{R}$ dada por $F(x_1,\ldots,x_{m+1})=x_1+\ldots+x_{m+1}$. Seja $f:\mathbb{S}^m\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(\xi)=\frac{1}{r}F(r\xi), \tag{2.6}$$

para $x\neq 0$ e $f(0)=0$. Vimos acima que o Laplaciano em $\mathbb{R}^{m+1}$ pode ser expresso por

$$\Delta_{\mathbb{R}^{m+1}}F=r^{k-2}[\Delta_{\mathbb{S}^m}f+k(k+m-1)f].$$

Assim, para $k = 1$, temos

$$\Delta_{\mathbb{R}^{m+1}} F = \Delta_{\mathbb{S}^m} f + mf.$$

Visto que F é harmônica, concluímos que f é uma autofunção com autovalor m e, portanto,

$$\lambda_1(\mathbb{S}^m) = m.$$

Teorema 2.1.2 (Obata [11], 1962)**.** *Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão m, compacta, sem bordo e conexa. Suponha que o primeiro autovalor não-nulo do Laplaciano de M é dado por*

$$\lambda_1 = mK.$$

Se a curvatura de Ricci na direção do gradiente da autofunção f, associada ao autovalor λ_1, satisfaz

$$\mathrm{Ric}_p(\nabla f) = K|\nabla f|^2,$$

então M é isométrica a uma esfera de raio $\dfrac{1}{\sqrt{K}}$.

Demonstração. 1º Passo. $\mathrm{Hess}\, f(X,Y) = -Kf\langle X, Y\rangle$, *quaisquer que sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.*

A igualdade na demonstração do Teorema de Lichnerowicz implica

$$|\,\mathrm{Hess}\, f|^2 = \frac{1}{m}(\Delta f)^2.$$

Analisando o caso em que vale a igualdade na Fórmula de Newton (2.1), juntamente com a hipótese que f é uma autofunção do Laplaciano, temos que $f_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $f_{ii} = -\dfrac{\lambda_1}{m} f$. Seja $\{E_1, \ldots, E_m\}$ um referencial geodésico de $\mathfrak{X}(M)$, obtemos, para $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i E_i$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}\, f(X,Y) &= \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle \nabla_X f_i E_i, Y\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} f_i \langle \nabla_X E_i, Y\rangle + \sum_{i=1}^{m} X(f_i)\langle E_i, Y\rangle
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m} x_j E_j(f_i)\right)\langle E_i, Y\rangle = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m} x_j f_{ij}\right)\langle E_i, Y\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i f_{ii}\langle E_i, Y\rangle = -\frac{\lambda_1}{m} f\langle X, Y\rangle = -Kf\langle X, Y\rangle,$$

pois

$$\langle \nabla_X E_i, Y\rangle = \sum_{i=1}^{m} x_j \langle \nabla_{E_j} E_i, Y\rangle = 0.$$

Assim,

$$\operatorname{Hess} f(X, Y) = -Kf\langle X, Y\rangle.$$

Normalizando a métrica,

$$\operatorname{Hess} f(X, Y) = -f\langle X, Y\rangle. \tag{2.7}$$

2º Passo. Se $p \in M$ é um ponto de máximo para f e γ é uma geodésica normalizada satisfazendo $\gamma(0) = p$, então $(f \circ \gamma)(t) = \cos t$.

Seja γ uma geodésica normalizada em M com parâmetro t. Então

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt} = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$$

implica

$$\begin{aligned}
\frac{d^2(f \circ \gamma)}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \\
&= \left\langle \frac{D}{dt}(\nabla f(\gamma(t))), \gamma'(t)\right\rangle + \left\langle \nabla f(\gamma(t)), \frac{D}{dt}\gamma'(t)\right\rangle \\
&= \langle \nabla_{\gamma'(t)} \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle = \operatorname{Hess} f(\gamma'(t), \gamma'(t)),
\end{aligned}$$

isto é,

$$\operatorname{Hess} f(\gamma'(t), \gamma'(t)) = \frac{d^2(f \circ \gamma)}{dt^2}(t). \tag{2.8}$$

Segue de (2.7) que

$$\begin{aligned}
\frac{d^2(f \circ \gamma)}{dt^2}(t) &= -(f \circ \gamma)(t)\langle \gamma'(t), \gamma'(t)\rangle \\
&= -(f \circ \gamma)(t).
\end{aligned}$$

Isto implica

$$(f \circ \gamma)(t) = A \cos t + B \operatorname{sen} t, \tag{2.9}$$

para toda geodésica γ parametrizada pelo comprimento de arco. Normalizando f, obtemos $f(p) = 1$. Se γ é uma geodésica normalizada tal que $\gamma(0) = p$, então

$$A = (f \circ \gamma)(0) = f(p) = 1.$$

Por outro lado, como $\partial M = \emptyset$, temos que $\nabla f(p) = 0$. Usando o fato

$$\left.\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}\right|_{t=0} = [-A \operatorname{sen} t + B \cos t]|_{t=0} = B,$$

temos

$$B = \left.\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}\right|_{t=0} = \langle \nabla f(p), \gamma'(0) \rangle = 0.$$

Assim

$$(f \circ \gamma)(t) = \cos t. \tag{2.10}$$

3º Passo. A aplicação $\exp_p : B(0, \pi) \subset T_pM \to B_p(\pi) \subset M$ *é uma bijeção.*

O Teorema de Hopf-Rinow assegura que, para cada $q \in M$, $q \neq p$, existe uma geodésica minimizante γ ligando p a q. Deste modo,

$$f(q) = \cos d(p, q) = \cos r_p(q) = \cos r,$$

onde $r = r_p : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$r_p(q) = d(p, q)$$

é a *função distância* ao ponto p. Usando esta notação, temos

$$\nabla f = -\operatorname{sen} r \gamma'(r). \tag{2.11}$$

Como $\gamma'(r) \neq 0$ para todo r, vemos que $\nabla f(q) \neq 0$ qualquer que seja $q \in B_p(\pi)$. Afirmamos que $\exp_p$ restrita a $B(0, \pi) \subset T_pM$ é injetiva. Com efeito, suponha que existam $v_1, v_2 \in B(0, \pi)$ tais que $\exp_p v_1 = \exp_p v_2 = q$. Neste caso, existem geodésicas normalizadas $\gamma_1 : [0, l_1] \to M$ e $\gamma_2 : [0, l_2] \to M$ ligando p a q tais que $\gamma_1'(0) = v_1$ e $\gamma_2'(0) = v_2$. Logo

$$\nabla f(q) = -\operatorname{sen} l_1 \gamma'(l_1)$$

e

$$\nabla f(q) = -\operatorname{sen} l_2 \gamma'(l_2).$$

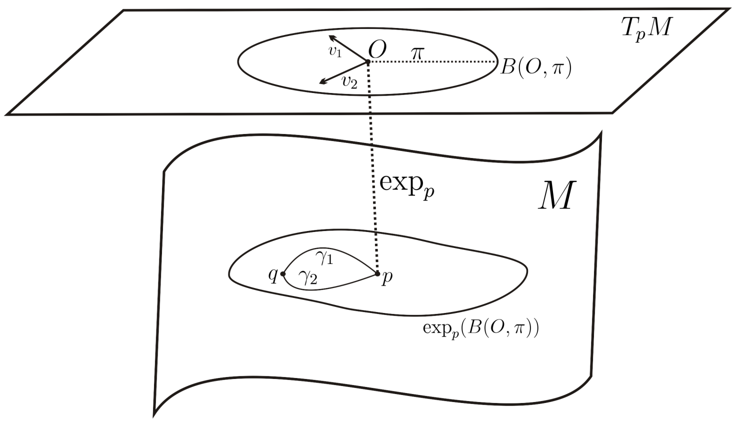

Figura 2.1: Ilustração referente ao 3º passo.

Visto que $|\gamma'(l_1)| = |\gamma_2'(l_2)| = 1$, temos

$$\operatorname{sen} l_1 = \operatorname{sen} l_2.$$

Isto implica que $\gamma_1'(l_1) = \gamma_2'(l_2)$. Aplicando o transporte paralelo de q até p, obtemos $v_1 = v_2$. Assim, $\exp_p |_{B_p(\pi)}$ é injetiva. Como M é completa, a aplicação exponencial é sobrejetiva. Portanto

$$\exp_p : B(0,\pi) \subset T_pM \to B_p(\pi) \subset M$$

é uma bijeção.

4º Passo. Cálculo dos campos de Jacobi de M. A aplicação $\exp_p : B(0,\pi) \to B_p(\pi)$ *é um difeomorfismo.*

As propriedades da aplicação exponencial estão intimamente relacionadas com os campos de Jacobi. A expressão obtida para f nos permitirá, de certa forma, conhecer os campos de Jacobi sobre a variedade M.

Sejam $\gamma : [0,l] \to M$ uma geodésica tal que $\gamma(0) = p$ e J um campo de Jacobi ao longo de γ satisfazendo $J(0) = 0$ e $\gamma'(s) \perp J(s)$. Fixemos $s_0 \in [0,l]$ e seja $\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ uma geodésica com parâmetro t tal que $\alpha(0) = \gamma(s_0)$ e $\alpha'(0) = J(s_0)$. Inicialmente, iremos supor que $|J(s_0)| = 1$. Consideremos uma família de geodésicas γ_t ligando p a $\alpha(t)$ tal que $\gamma_0 = \gamma$ e parametrizada de tal modo que o domínio de γ_t seja o intervalo $[0,s_0]$.

Observemos que esta família define uma variação ϕ satisfazendo $\phi(s,0) = \gamma(s)$, $\phi(s_0,t) = \alpha(t)$ e $\phi(0,t) = p$, que pode ser considerada como uma geodésica constante. Aplicaremos a segunda fórmula de variação do comprimento de arco para

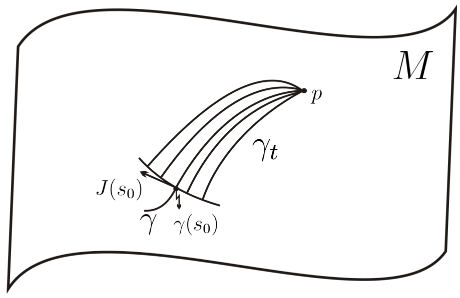

Figura 2.2: Ilustração referente ao 4º passo.

$$X(s,t) = \gamma_t'(s) \ \text{ e } \ Y(s,t) = J_t(s),$$

onde $J_t(s)$ é uma campo de Jacobi ao longo de γ_t satisfazendo $J_t(0) = 0$, $J_t(s_0) = \alpha'(t)$. Assim, para $t = 0$, temos

$$X(s,0) = \gamma'(s) \ \text{ e } \ Y(s,0) = J(s).$$

Deste modo, a segunda fórmula de variação do comprimento de arco torna-se

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d^2L(\gamma_t)}{dt^2}\right|_{t=0} &= \int_0^{s_0} [|Y'|^2 - \langle R(X,Y)X,Y\rangle - \langle X,Y'\rangle^2] ds \\
&= \int_0^{s_0} \left[\left|\frac{DJ}{ds}(s)\right|^2 - \langle R(\gamma'(s),J(s))\gamma'(s),J(s)\rangle - \left\langle \gamma'(s), \frac{DJ}{ds}(s)\right\rangle^2\right] ds \\
&= \int_0^{s_0} \left[\left\langle \frac{DJ}{ds}(s), \frac{DJ}{ds}(s)\right\rangle + \left\langle \frac{D^2J}{ds^2}(s), J(s)\right\rangle - \left\langle \gamma'(s), \frac{DJ}{ds}(s)\right\rangle^2\right] ds \\
&= \int_0^{s_0} \left[\frac{\partial}{\partial s}\left\langle J(s), \frac{DJ}{ds}(s)\right\rangle - \left\langle \frac{D^2J}{ds^2}(s), J(s)\right\rangle + \left\langle \frac{D^2J}{ds^2}(s), J(s)\right\rangle \right.\\
&\qquad \left. - \left\langle \gamma'(s), \frac{DJ}{ds}(s)\right\rangle^2\right] ds \\
&= \left.\left\langle J(s), \frac{DJ}{ds}(s)\right\rangle\right|_0^{s_0} - \int_0^{s_0} \left\langle \gamma'(s), \frac{DJ}{ds}(s)\right\rangle^2 ds.
\end{aligned}$$

Como J é ortogonal a γ', obtemos

$$0 = \frac{d}{ds}\langle \gamma'(s), J(s)\rangle = \left\langle \frac{D\gamma'(s)}{ds}, J(s)\right\rangle + \left\langle \gamma'(s), \frac{DJ}{ds}(s)\right\rangle.$$

Logo
$$\left\langle \gamma'(s), \frac{DJ}{ds}(s) \right\rangle = 0,$$
pois o fato de γ ser uma geodésica implica que $\dfrac{D\gamma'}{ds} = 0$. Assim
$$\left.\frac{d^2L(\gamma_t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \left.\left\langle J(s), \frac{DJ}{ds}(s) \right\rangle\right|_0^{s_0} = \left\langle J(s_0), \frac{DJ}{ds}(s_0) \right\rangle, \tag{2.12}$$
pois $J(0) = 0$. Podemos, portanto, escrever $f \circ \alpha$ de duas maneiras distintas. A equação (2.10) fornece
$$(f \circ \alpha)(t) = \cos L(\gamma_t), \tag{2.13}$$
enquanto que a equação (2.9) mostra que
$$(f \circ \alpha)(t) = A \cos t + B \operatorname{sen} t,$$
onde os coeficientes A e B são determinados pelas condições iniciais
$$A = (f \circ \alpha)(0) = (f \circ \gamma)(s_0) = \cos s_0,$$
$$\begin{aligned} B = \left.\frac{d}{dt}(f \circ \alpha)\right|_{t=0} &= \langle \nabla f(\alpha(0)), \alpha'(0) \rangle = \langle \nabla f(\gamma(s_0)), J(s_0) \rangle \\ &= -\operatorname{sen} s_0 \langle \gamma'(s_0), J(s_0) \rangle = 0. \end{aligned}$$
Segue que
$$(f \circ \alpha)(t) = \cos s_0 \cos t. \tag{2.14}$$
Igualando (2.13) e (2.14), temos
$$\cos s_0 \cos t = \cos L(t). \tag{2.15}$$
Derivando (2.15) implicitamente com respeito a t, obtemos
$$-\cos s_0 \operatorname{sen} t = -\operatorname{sen} L(t) \frac{dL}{dt}(t).$$
Derivando novamente,
$$\cos s_0 \cos t = \cos L(t) \left(\frac{dL}{dt}(t) \right)^2 + \operatorname{sen} L(t) \frac{d^2L}{dt^2}(t).$$

Em $t = 0$, temos

$$\begin{aligned}\cos s_0 &= \operatorname{sen} L(0)\frac{d^2L}{dt}(0) = \pm\sqrt{1-\cos^2 L(0)}\,\frac{d^2L}{dt^2}(0)\\ &= \pm\sqrt{1-\cos^2 s_0}\,\frac{d^2L}{dt^2}(0) = \operatorname{sen} s_0\frac{d^2L}{dt}(0),\end{aligned}$$

pois $\dfrac{dL}{dt}(0) = 0$. Segue que

$$\left.\frac{d^2L}{dt^2}\right|_{t=0} = \frac{\cos s_0}{\operatorname{sen} s_0}.$$

Portanto,

$$\left\langle J(s_0), \frac{DJ}{ds}(s_0)\right\rangle = \frac{\cos s_0}{\operatorname{sen} s_0}.$$

Visto que, em geral, o vetor $J(s_0)$ não é unitário, obtemos

$$\frac{\langle J(s_0), \frac{DJ}{ds}(s_0)\rangle}{|J(s_0)|^2} = \frac{\cos s_0}{\operatorname{sen} s_0}. \tag{2.16}$$

Observemos que a equação (2.16) acima pode ser reescrita da forma

$$\left.\frac{d}{ds}\log|J(s)|\right|_{s=s_0} = \left.\frac{d}{ds}\log(\operatorname{sen} s)\right|_{s=s_0}.$$

Integrando a expressão acima de ε a s_0 e usando a injetividade do logarítimo,

$$\log\frac{|J(s_0)|}{|J(\varepsilon)|} = \log\frac{\operatorname{sen} s_0}{\operatorname{sen}\varepsilon} \Rightarrow \frac{|J(s_0)|}{|J(\varepsilon)|} = \frac{\operatorname{sen} s_0}{\operatorname{sen}\varepsilon}.$$

Usando a expansão de Taylor de $|J(\varepsilon)|$ para $|J'(0)| = 1$ e lembrando que o resto da expansão de Taylor satisfaz

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{R(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0,$$

obtemos

$$\begin{gathered}\frac{|J(\varepsilon)|}{\operatorname{sen}\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\operatorname{sen}\varepsilon} + \frac{R(\varepsilon)}{\varepsilon}\frac{\varepsilon}{\operatorname{sen}\varepsilon} \Rightarrow\\ \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{|J(\varepsilon)|}{\operatorname{sen}\varepsilon} = 1.\end{gathered}$$

Assim,

$$|J(s_0)| = \operatorname{sen} s_0.$$

Em geral,

$$|J(s_0)| = \operatorname{sen} s_0 |J'(0)|.$$

Como $s_0 \in (0, \pi)$ foi fixado arbitrariamente, segue que

$$|J(s)| = \operatorname{sen} s |J'(0)|. \tag{2.17}$$

A igualdade (2.17) expressa que a derivada da aplicação exponencial em p satisfaz

$$|d(\exp_p)_{s\gamma'(0)}(sJ'(0))| = \operatorname{sen} s|J'(0)| \Rightarrow |d(\exp_p)_{s\gamma'(0)}(J'(0))| = \frac{\operatorname{sen} s}{s}|J'(0)|. \tag{2.18}$$

Isto mostra que $\exp_p : B(0, \pi) \subset T_pM \to B_p(\pi) \subset M$ é, além de bijeção, um difeomorfismo.

5º Passo. Construção da Isometria.

Seja $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ a esfera unitária. Provaremos a seguir que, se $\psi : T_pM \to T_{p_0}\mathbb{S}^m$ é uma isometria qualquer, então $\varphi = (\exp_{p_0}) \circ \psi \circ (\exp_p)^{-1}$ é uma isometria entre $B_p(\pi)$ e sua imagem $B_{p_0}(\pi) \subset \mathbb{S}^m$. De fato, os campos de Jacobi na esfera $\mathbb{S}^m$ são da forma

$$J(s) = d(\exp_{p_0})_{s\beta'(0)} sJ'(0) = \operatorname{sen} s J'(0) \Rightarrow d(\exp_{p_0})_{s\beta'(0)} J'(0) = \frac{\operatorname{sen} s}{s} J'(0)$$

para qualquer geodésica β de $\mathbb{S}^m$ satisfazendo $\beta(0) = p_0$. Por outro lado, se $q \in B_p(\pi)$, então

$$d\varphi_q = d(\exp_{p_0})_{\psi\circ(\exp_p)^{-1}(q)} \circ d\psi_{(\exp_p)^{-1}(q)} \circ d[(\exp_p)^{-1}]_q.$$

Logo, se $v, w \in T_pM$, então

$$|d(\exp_p)^{-1}_w(v)| = \frac{|w|}{\operatorname{sen} |w|}|v|$$

e para $x, y \in T_{p_0}\mathbb{S}^m$, tem-se

$$|d(\exp_{p_0})|_x(y)| = \frac{\operatorname{sen} |x|}{|x|}|y|.$$

Portanto

$$|d\varphi_p(v)| = |v|,$$

isto é, $d\varphi_p$ é uma isometria linear. Assim, φ é uma isometria local. Como φ é um difeomorfismo, vemos que φ é uma isometria.

6º Passo. A fronteira $\partial B_p(\pi)$ reduz-se a um único ponto $p' \in M$.

Observemos que os campos de Jacobi ao longo de qualquer geodésica normalizada α, partindo de p, se anulam em $\alpha(\pi)$. Sejam α_1 e α_2 duas destas geodésicas e considere $p_1 = \alpha_1(\pi)$ e $p_2 = \alpha_2(\pi)$. Estas duas geodésicas formam uma família de geodésicas $\{\alpha_t\}_{t\in(0,\pi)}$ geradas pela família de vetores $\alpha_t'(0) = \cos t\alpha_1'(0) + \operatorname{sen} t\alpha_2'(0)$.

Os pontos $\alpha_t(\pi)$ formam uma curva β cujo vetor tangente é igual ao vetor de algum campo de Jacobi associado à família $\{\alpha_t\}$. Com efeito, como a imagem de β está contida em $\partial B_p(\pi)$, o Lema de Gauss implica que $\langle \beta'(t), \alpha_t'(t)\rangle = 0$. Deste modo, $\beta'(t) = 0$ para todo $t \in (0,\pi)$ e isto implica que β é constante, donde $p_1 = p_2 = p'$.

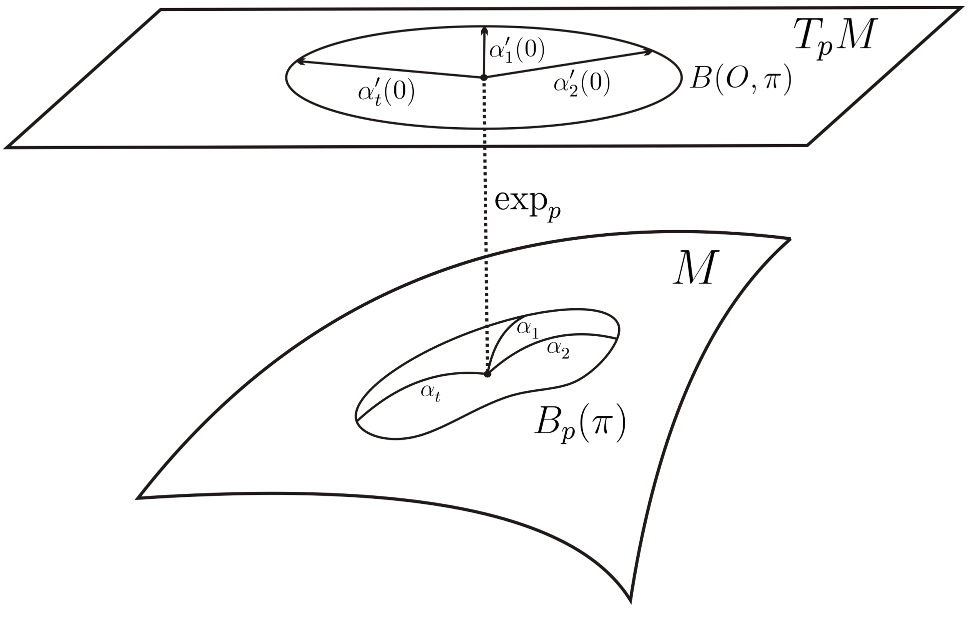

Figura 2.3: Ilustração referente ao 6º passo.

7º Passo. $M = \overline{B_p(\pi)}$.

Observemos que f atinge um mínimo absoluto em p' e $f(p') = -1$. Reproduzindo os argumentos usados até agora para p' no lugar de p, vemos que, exceto por p, todos os pontos de M estão a uma distância menor que π de p'. Isto significa que $M = B_p(\pi) \cup \{p'\} = \overline{B_p(\pi)}$.

8º Passo. Conclusão: M é isométrica a $\mathbb{S}^m$.

Defina agora a aplicação $\tilde{\varphi} : M \to \mathbb{S}^m$ por $\tilde{\varphi}(p') = p_0'$, onde p_0' é o ponto antípoda de p_0 em $\mathbb{S}^m$ e $\tilde{\varphi}(p) = \varphi(p)$ em $B_p(\pi)$. Usando a continuidade da parametrização da variedade M, vemos que $\tilde{\varphi}$ é um homeomorfismo. Como φ é uma isometria, segue que $B_p(\pi)$ tem curvatura seccional constante igual a 1. Usando a continuidade da métrica, vemos que M também possui a mesma propriedade.

Seja $q \in M$ tal que $\varphi(q) \neq p_0$ e $\varphi(q) \neq p_0'$. Sejam $q_0 = \varphi(q)$, q_0' o ponto antípoda de q_0 e $q' = \varphi^{-1}(q_0')$. Seja $\psi' = d\varphi_q$ e definamos $\varphi' : M \backslash \{q'\} \to \mathbb{S}^m$ por

$$\varphi' = \exp_{q_0} \circ \psi' \circ (\exp_q)^{-1}.$$

Observemos que o conjunto $W = M \backslash \{p, p'\}$ é conexo e $q \in W$. Além disso, $\varphi'(q) = q_0 = \varphi(q)$ e, usando o Teorema de Cartan, $d\varphi_q' = \psi' = d\varphi_q$. Logo, pela Proposição 1.9.1, temos que $\varphi' = \varphi$ em W.

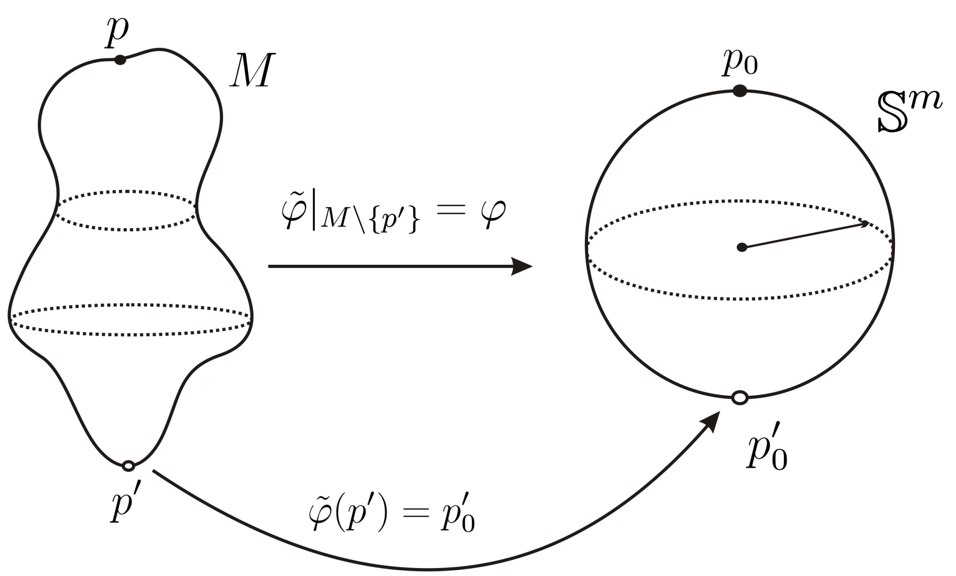

Figura 2.4: Ilustração referente ao 8º passo.

Definamos $\Phi : M \to \mathbb{S}^m$ por

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{se} \quad x \in M\backslash\{p'\} \\ \\ \varphi'(x) & \text{se} \quad x \in M\backslash\{q\} \end{cases}$$

Assim, Φ é uma isometria local, logo um difeomorfismo local. Por outro lado, a continuidade de Φ implica que $\Phi \equiv \tilde{\varphi}$. Logo, Φ é um difeomorfismo global e, portanto, uma isometria. $\square$

2.2 Fórmula de Reilly e o Teorema de Alexandrov

Nesta seção iremos demonstrar o Teorema de Alexandrov usando uma versão integral da fórmula de Ricci-Bochner-Lichnerowicz, obtida por R. Reilly em [13]. Antes disso, precisaremos de mais alguns resultados preliminares. Esta seção, incluindo as demonstrações da fórmula de Reilly e do Teorema de Alexandrov, está baseada em [7].

Lema 2.2.1. *Seja (M, ∇) uma variedade Riemanniana de dimensão m imersa numa variedade Riemanniana $(N, \overline{\nabla})$ de dimensão $n > m$. Sejam X, Y campos de vetores tangentes a M. Então*

$$\operatorname{Hess}_N f(X,Y) = \operatorname{Hess}_M f(X,Y) - B(X,Y)f$$

e

$$\Delta_N f = \Delta_M f + \vec{H} f.$$

Demonstração. Com efeito,

$$\begin{aligned} \operatorname{Hess}_N f(X,Y) &= (XY - \overline{\nabla}_X Y)f = XYf - (\nabla_X Y)f - (\overline{\nabla}_X Y)^N f \\ &= \operatorname{Hess}_M f(X,Y) - B(X,Y)f. \end{aligned}$$

□

Corolário 2.2.1. *Sejam $u_1, \ldots, u_{n+1}$ as funções coordenadas de $\mathbb{R}^{n+1}$. Então*

$$\Delta_M u_i = -\vec{H} u_i.$$

Em particular, uma subvariedade M de $\mathbb{R}^{n+1}$ é mínima se, e somente se, suas funções coordenadas são harmônicas na métrica induzida.

Demonstração. De fato, se $\overline{\nabla}$ é a conexão usual de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $u_1, \ldots, u_{n+1}$ são as funções coordenadas de $\mathbb{R}^{n+1}$, então $\operatorname{Hess}_{\mathbb{R}^{n+1}} u_i \equiv 0$. Deste modo,

$$\Delta_M u_i = -\vec{H} u_i.$$

□

Seja $X = (u_1, \ldots, u_{n+1})$ o vetor posição de $\mathbb{R}^{n+1}$. As seguintes notações serão úteis:

$$\Delta_M X = \sum_{i=1}^{n+1} (\Delta_M u_i) E_i, \ \operatorname{Hess}_M (X) = \sum_{i=1}^{n+1} (\operatorname{Hess}_M u_i) E_i,$$

onde $E_i = \dfrac{\partial}{\partial u_i}$ é o referencial usual de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Lema 2.2.2. *Seja M uma subvariedade de dimensão m de $\mathbb{S}^n$. Então M é mínima se, e somente se, o vetor posição $X = (u_1, \ldots, u_{n+1})$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ satisfaz*

$$\Delta_M X = -mX.$$

Demonstração. Orientemos $\mathbb{S}^n$ de tal modo que o vetor posição de $\mathbb{R}^{n+1}$ coincida com o vetor normal de $\mathbb{S}^n$. Deste modo, se ∇^* é a conexão de $\mathbb{S}^n$, então

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}_{\mathbb{R}^{n+1}}(X)(Y,Z) &= \sum_{i=1}^{n+1}(YZ - \overline{\nabla}_Y Z)u_i E_i \\
&= \sum_{i=1}^{n+1}(YZ - \nabla^*_Y Z)u_i E_i - \sum_{i=1}^{n+1}(\overline{\nabla}_Y Z)^N u_i E_i \\
&= \mathrm{Hess}_{\mathbb{S}^n}(X)(Y,Z) - \sum_{i=1}^{n+1}\langle(\overline{\nabla}_Y Z)^N, \eta\rangle \eta u_i E_i \\
&= \mathrm{Hess}_{\mathbb{S}^n}(X)(Y,Z) - \langle(\overline{\nabla}_Y Z)^N, \eta\rangle \sum_{i=1}^{n+1} X u_i E_i \\
&= \mathrm{Hess}_{\mathbb{S}^n}(X)(Y,Z) - \langle(\overline{\nabla}_Y Z)^N, \eta\rangle \eta \\
&= \mathrm{Hess}_{\mathbb{S}^n}(X)(Y,Z) - (\overline{\nabla}_Y Z)^N \\
&= \mathrm{Hess}_{\mathbb{S}^n}(X)(Y,Z) - B(Y,Z),
\end{aligned}$$

pois

$$Xu_i = \sum_{j=1}^{n+1} u_j \frac{\partial u_i}{\partial u_j} = \sum_{j=1}^{n+1} u_j \delta_{ij} = u_i.$$

Como o operador de Weingarten de $\mathbb{S}^n$ é dado por $A_\eta = -id$, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}_{\mathbb{S}^n}(X)(E_i, E_j) &= \langle B(E_i, E_j), \eta\rangle \eta = \langle A_\eta(E_i), E_j\rangle \eta \\
&= -\langle E_i, E_j\rangle X = -\delta_{ij} X.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\mathrm{Hess}_{\mathbb{S}^n} u_i(Y,Z) = \mathrm{Hess}_M u_i(Y,Z) + B(X,Y)u_i \Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hess}_{\mathbb{S}^n}(X)(Y,Z) &= \mathrm{Hess}_M(X)(Y,Z) + \sum_{i=1}^{n+1} B(Y,Z)u_iE_i \\
&= \mathrm{Hess}_M(X)(Y,Z) + \sum_{i=1}^{n+1} \langle B(Y,Z),\eta\rangle \eta u_iE_i \\
&= \mathrm{Hess}_M(X)(Y,Z) + \langle B(Y,Z),\eta\rangle \sum_{i=1}^{n+1} Xu_iE_i \\
&= \mathrm{Hess}_M(X)(Y,Z) + \langle B(Y,Z),\eta\rangle \eta \\
&= \mathrm{Hess}_M(X)(Y,Z) + B(Y,Z).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
-mX &= \sum_{i=1}^{n+1} \mathrm{Hess}_{\mathbb{S}^n}(X)(E_i,E_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathrm{Hess}_M(E_i,E_i) + \sum_{i=1}^{n+1} B(E_i,E_i) \\
&= \Delta_M X + \vec{H}_M,
\end{aligned}
$$

onde $\{E_1,\ldots,E_{n+1}\}$ é um referencial ortonormal de $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $E_1,\ldots,E_m$ são tangentes a M e $E_{n+1} = X/|X|$. □

Teorema 2.2.1 (Fórmula de Reilly, [13])**.** *Seja D uma variedade Riemanniana de dimensão $m+1$, orientada, cujo bordo é dado por uma variedade Riemanniana M de dimensão m. Seja $f \in \mathcal{D}(D)$ satisfazendo o problema de Dirichlet*

$$\Delta f = g \text{ em } D$$

e

$$f = u \text{ em } M,$$

onde $g \in \mathcal{D}(D)$ e $u \in \mathcal{D}(M)$. Então

$$\frac{m}{m+1}\int_D g^2 \geq \int_M Hf_\eta^2 + \int_M f_\eta \Delta_M u + \int_M \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} h_{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta + \int_D \mathrm{Ric}(\nabla f,\nabla f),$$

onde H e $h_{\alpha\beta}$ denotam a curvatura média da segunda forma fundamental de M com respeito ao normal η apontando para o exterior de M na orientação de D e Ric *é o tensor de Ricci de D. Além disso, a igualdade vale se, e somente se,*

$$f_{ij} = \frac{g\delta_{ij}}{m+1}$$

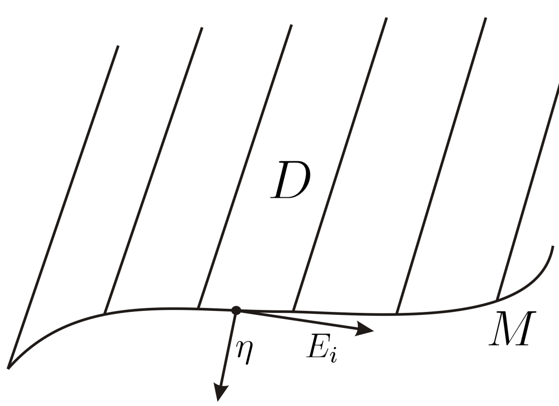

Figura 2.5: Ilustração referente ao Teorema de Reilly.

em D.

Demonstração. Consideremos a fórmula de Bocnher-Lichnerowicz

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) &= |\operatorname{Hess} f|^2 + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f)\\ &= |\operatorname{Hess} f|^2 + \langle \nabla f, \nabla g\rangle + \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f).\end{aligned}$$

Usando a desigualdade

$$|\operatorname{Hess} f|^2 = \sum_{i,j=1}^{m+1} f_{ij}^2 \geq \sum_{i=1}^{m+1} f_{ii}^2 \geq \frac{1}{m+1}\left(\sum_{i=1}^{m+1} f_{ii}\right)^2 = \frac{1}{m+1}(\Delta f)^2 = \frac{g^2}{m+1},$$

obtemos

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) \geq \frac{g^2}{m+1} + \langle \nabla f, \nabla g\rangle + \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f).$$

Integrando por partes o segundo termo do lado direito da desigualdade anterior,

$$\int_D \langle \nabla f, \nabla g\rangle = -\int_D g\Delta f + \int_M g f_n = -\int_D g^2 + \int_M g f_\eta.$$

Assim

$$\frac{1}{2}\int_D \Delta(|\nabla f|^2) \geq \frac{-m}{m+1}\int_D g^2 + \int_M g f_\eta + \int_D \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f). \tag{2.19}$$

Por outro lado, se $\{E_1, \ldots, E_{m+1}\}$ é um referencial ortonormal em D tal que $E_1, \ldots, E_m$ são tangentes a M e $E_{n+1} = \eta$ é o vetor unitário, normal a M, apontando para o exterior, então o Teorema da Divergência implica

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_D \Delta(|\nabla f|^2) &= \frac{1}{2}\int_D \operatorname{div}(\nabla|\nabla f|^2) = \frac{1}{2}\int_M \langle\nabla(|\nabla f|^2), \eta\rangle \\
&= \frac{1}{2}\int_M \sum_{i=1}^{m+1}\langle\nabla(f_i^2), \eta\rangle = \int_M \sum_{i=1}^{m+1}\langle f_i\nabla f_i, \eta\rangle \\
&= \int_M \sum_{i,j=1}^{m+1} f_i\langle(f_i)_j E_j, \eta\rangle = \int_M \sum_{i=1}^{m+1} f_i(f_i)_{m+1} \\
&= \int_M \sum_{i=1}^{m+1} E_i(f)E_{m+1}E_i(f).
\end{aligned}$$

Usando as condições de bordo e escolhendo o referencial tal que $\nabla_{E_{m+1}}E_{m+1} \equiv 0$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m+1} E_i(f)E_{m+1}E_i(f) &= E_{m+1}(f)E_{m+1}E_{m+1}(f) + \sum_{\alpha=1}^{m} E_\alpha(f)E_{m+1}E_\alpha(f) \\
&= E_{m+1}(f)\left(\Delta f - \sum_{\alpha=1}^{m} f_{\alpha\alpha}\right) + \sum_{\alpha=1}^{m} E_\alpha(f)E_{m+1}E_\alpha(f) \\
&= f_\eta(g - \vec{H}f - \Delta_M f) + \sum_{\alpha=1}^{m} E_\alpha(f)E_{m+1}E_\alpha(f) \\
&= f_\eta(g - Hf_\eta - \Delta_M u) + \sum_{\alpha=1}^{m} E_\alpha(f)E_{m+1}E_\alpha(f),
\end{aligned}$$

pois

$$\vec{H}f = \sum_{i=1}^{m}\langle B(E_i, E_j), \eta\rangle\eta f = \sum_{i=1}^{m}\langle B(E_i, E_j), \eta\rangle f_\eta = Hf_\eta.$$

Usando o fato que

$$V = \sum_{i=1}^{m}\langle V, E_i\rangle E_i + \langle V, E_{m+1}\rangle E_{m+1}$$

e as equações

$$\begin{cases} \langle E_{m+1}E_\alpha, E_{m+1}\rangle = -\langle E_\alpha, \nabla_{E_{m+1}}E_{m+1}\rangle = 0 \\ \\ \langle \nabla_{E_\alpha}E_{m+1}, E_{m+1}\rangle = \dfrac{1}{2}E_\alpha\langle E_{m+1}, E_{m+1}\rangle = 0, \end{cases}$$

obtemos

$$\begin{aligned} E_{m+1}E_\alpha(f) &= E_\alpha E_{m+1}(f) + (\nabla_{E_{m+1}}E_\alpha)f - (\nabla_{E_\alpha}E_{m+1})f \\ &= E_\alpha E_{m+1}(f) + \sum_{\beta=1}^{m}\langle \nabla_{E_{m+1}}E_\alpha, E_\beta\rangle E_\beta(f) \\ &\quad + \langle \nabla_{E_{m+1}}E_\alpha, E_{m+1}\rangle E_{m+1}(f) - \sum_{\beta=1}^{m}\langle \nabla_{E_\alpha}E_{m+1}, E_\beta\rangle E_\beta(f) \\ &\quad - \langle \nabla_{E_\alpha}E_{m+1}, E_{m+1}\rangle E_{m+1}(f) \\ &= E_\alpha E_{m+1}(f) + \sum_{\beta=1}^{m}\langle \nabla_{E_{m+1}}E_\alpha, E_\beta\rangle E_\beta(f) \\ &\quad - \sum_{\beta=1}^{m}\langle \nabla_{E_\alpha}E_{m+1}, E_\beta\rangle E_\beta(f). \end{aligned}$$

Como

$$\langle \nabla_{E_\alpha}E_{m+1}, E_\beta\rangle = -\langle E_{m+1}, \nabla_{E_\alpha}E_\beta\rangle = h_{\alpha\beta},$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_D \Delta(|\nabla f|^2) &= \int_M g f_\eta - \int_M H f_\eta^2 - \int_M f_\eta \Delta_M u \\ &\quad + \int_M \sum_{\alpha=1}^{m} E_\alpha(f)E_\alpha E_{m+1}(f) \\ &\quad + \int_M \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \langle \nabla_{E_{m+1}}E_\alpha, E_\beta\rangle E_\beta(f)E_\alpha(f) \\ &\quad - \int_M \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} h_{\alpha\beta}E_\alpha(u)E_\beta(u). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\int_M \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \langle \nabla_{E_{m+1}} E_\alpha, E_\beta \rangle E_\alpha(f) E_\beta(f) &= -\int_M \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \langle E_\alpha, \nabla_{E_{m+1}} E_\beta \rangle E_\alpha(f) E_\beta(f) \\
&= -\int_M \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \langle E_\beta, \nabla_{E_{m+1}} E_\alpha \rangle E_\beta(f) E_\alpha(f),
\end{aligned}
$$

onde na última igualdade fizemos uma permutação de todos os índices α e β. Deste modo

$$
\int_M \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \langle \nabla_{E_{m+1}} E_\alpha, E_\beta \rangle E_\alpha(f) E_\beta(f) = 0.
$$

Integrando por partes,

$$
\begin{aligned}
\int_M \sum_{\alpha=1}^{m} E_\alpha(f) E_\alpha E_{m+1}(f) &= \int_M \sum_{\alpha=1}^{m} E_\alpha(f) E_\alpha(f_\eta) = \int_M \langle \nabla f, \nabla f_\eta \rangle \\
&= -\int_M f_\eta \Delta_M f = -\int_M f_\eta \Delta_M u.
\end{aligned}
$$

Deste modo,

$$
\frac{1}{2}\int_M \Delta(|\nabla f|^2) = \int_M g f_\eta - \int_M H (f_\eta)^2 - 2\int_M f_\eta \Delta_M u - \int_M \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} h_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta.
$$

Combinando a identidade acima com (2.19), temos o resultado desejado. □

Teorema 2.2.2 (Alexandrov). *As únicas hipersuperfícies compactas, conexas, de curvatura média constante, mergulhadas em $\mathbb{R}^{m+1}$ são as esferas.*

Demonstração. Seja M^m uma hipersuperfície compacta em $\mathbb{R}^{m+1}$ com curvatura média constante H. Como H é constante, podemos orientar M de tal modo que $H > 0$. O vetor normal a M correspondente a essa orientação será representado por η.

Multiplicando a métrica por uma constante $c > 0$, a curvatura média também fica multiplicada por c. Assim, podemos assumir que $H = m$. A hipóstese de M ser mergulhada implica que M é o bordo de um domínio limitado D em $\mathbb{R}^{m+1}$. Este resultado é conhecido como o Teorema de Jordan-Brouwer e, para uma demonstração ver, por exemplo, [10]. Consideremos a função f solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta f = -1 \quad \text{em} \quad D \\ \\ \quad f = 0 \quad \text{em} \quad M = \partial D. \end{cases}$$

Aplicando a Fórmula de Reilly a f e observando que Ric $\equiv 0$ em $\mathbb{R}^{m+1}$, obtemos

$$\frac{m}{m+1}V(D) \geq \int_M h f_\eta^2 \Rightarrow \frac{V(D)}{m+1} \geq \int_M f_\eta^2, \tag{2.20}$$

onde $V(D)$ denota o volume de D. A desigualdade de Cauchy-Schwarz e o Teorema da Divergência aplicados às funções f_η e 1, implicam

$$\begin{aligned} A(M)\int_M f_\eta^2 &\geq \left(\int_M f_\eta\right)^2 = \left(\int_M \eta f\right)^2 \\ &= \left(\int_M \langle \nabla f, \eta\rangle\right)^2 = \left(\int_D \Delta f\right)^2 = V(D)^2, \end{aligned}$$

onde $A(M)$ é área de M. Logo, (2.20) implica que

$$\frac{V(D)}{m+1} \geq \int_M f_\eta^2 \geq \frac{V(D)^2}{A(M)} \Rightarrow A(M) \geq (m+1)V(D).$$

Por outro lado, se $X = (u_1, \ldots, u_{m+1})$ é o vetor posição de $\mathbb{R}^{m+1}$ referente ao referencial ortonormal $\{E_1, \ldots, E_m, \eta\}$ então $\mathrm{Hess}_{\mathbb{R}^{m+1}}(X) \equiv 0$, donde

$$-\Delta_M u_i = \vec{H} u_i = H\eta u_i = H u_{i\eta}.$$

Isto implica

$$\begin{aligned} -\Delta_M(X) &= \sum_{i=1}^{m+1}(\Delta_M u_i)E_i = \sum_{i=1}^{m+1}(H u_{i;\eta})E_i = H\sum_{i=1}^{m+1}\eta(u_i)E_i \\ &= H\sum_{i=1}^{m+1}\langle \eta, \nabla u_i\rangle E_i = H\sum_{i=1}^{m+1}\langle \eta, E_i\rangle E_i \\ &= H\eta = m\eta. \end{aligned}$$

Escrevendo

$$\Delta(X) = \sum_{i=1}^{m+1}(\Delta u_i)E_i, \;\; |\nabla X|^2 = \sum_{i=1}^{m+1}|\nabla u_i|^2 \text{ e } X_\eta = \sum_{i=1}^{m+1}\eta(u_i)E_i,$$

a fórmula da integração por partes torna-se

$$\begin{aligned}
\int_D \langle X, \Delta X\rangle &= \sum_{i=1}^{m+1} \int_D u_i \Delta u_i \\
&= -\sum_{i=1}^{m+1} \int_D \langle \nabla u_i, \nabla u_i\rangle + \sum_{i=1}^{m+1} \int_M u_i \eta(u_i) \\
&= -\int_M |\nabla X|^2 + \int_M \langle X, X_\eta\rangle.
\end{aligned}$$

Como $\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}}(X) \equiv 0$,

$$\begin{aligned}
0 = \int_D \langle X, \Delta X\rangle &= -\int_D |\nabla X|^2 + \int_M \langle X, X_\eta\rangle \\
&= -(m+1)V(D) + \int_M \langle X, \eta\rangle \\
&= -(m+1)V(D) - \frac{1}{m}\int_M \langle X, \Delta_M X\rangle \\
&= -(m+1)V(D) - \frac{1}{m}\int_M |\nabla_M X|^2 \\
&= -(m+1)V(D) + A(M),
\end{aligned}$$

pois $|\nabla X|^2 = \sum_{i=1}^{m+1} |\nabla u_i|^2 = \sum_{i=1}^{m+1} |E_i|^2 = m+1$ e $|\nabla_M X|^2 = m$ pelo mesmo motivo. Logo, todas as desigualdades obtidas até agora tornam-se igualdades. Em particular, o caso da igualdade na Fórmula de Reilly implica

$$f_{ij} = \frac{-\delta_{ij}}{m+1} \tag{2.21}$$

em D e f_{m+1} constante em M. Observemos também que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}_D\, f(E_i, E_j) - \mathrm{Hess}_M\, f(E_i, E_j) &= (E_i E_j - \overline{\nabla}_{E_i} E_j) f - (E_i E_j - \nabla_{E_i} E_j) f \\
&= (\nabla_{E_i} E_j)^N f = \langle (\overline{\nabla}_{E_i} E_j), \eta\rangle \eta f.
\end{aligned}$$

Como $f|_M \equiv 0$, obtemos

$$f_{ij} = h_{ij} f_{m+1}.$$

Aplicando em (2.21),

$$\frac{-\delta_{ij}}{m+1} = h_{ij} f_{m+1}.$$

Assim

$$m = H = \sum_{i=1}^{m} h_{ii} = \frac{-1}{(m+1)f_{m+1}} \sum_{i=1}^{m} \delta_{ii} = \frac{-m}{(m+1)f_{m+1}} \Rightarrow f_{m+1} = \frac{-1}{m+1}$$

e, portanto,

$$h_{ij} = \delta_{ij}.$$

O Teorema 1.7.1, nos dá

$$K(E_i, E_j) - \overline{K}(E_i, E_j) = h_{ii}h_{jj} - h_{ij}^2 = 1,$$

donde M tem curvatura seccional constante igual a 1. Isto implica que $\mathrm{Ric}_p(x) = K$ para todo $p \in M$ e todo $x \in T_pM$. Em particular, o Teorema de Lichnerowicz implica

$$\lambda_1(M) \geq m.$$

Anteriormente, vimos que

$$\Delta_M X = -mX_{m+1} = -mE_{m+1}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} mA(M) &= \int_M |\nabla_M X|^2 = \int_M \langle X, -\Delta_M X\rangle = m\int_M \langle X, E_{m+1}\rangle \\ &\leq m\left(\int_M |X|^2\right)^{1/2}\left(\int_M |E_{m+1}|^2\right)^{1/2} \qquad (2.22) \\ &= \left(\int_M |X|^2\right)^{1/2}\sqrt{A(M)}. \end{aligned}$$

Escolhendo a origem de $\mathbb{R}^{m+1}$ como centro de gravidade de M, isto é, $\displaystyle\int_M X = 0$, temos

$$\int_M |\nabla_M X|^2 = -\int_M \langle X, \Delta_M X\rangle = \int_M \langle X, -\Delta_M X\rangle \geq \lambda_1(M)\int_M |X|^2,$$

pelo princípio do Min-Max. Assim,

$$A(M) \leq \int_M |X|^2 \leq \frac{1}{\lambda_1}\int_M |\nabla_M X|^2 \leq \frac{1}{m}\int_M m = A(M). \qquad (2.23)$$

Logo, todas as desigualdades acima tornam-se igualdades. Em particular,

$$\lambda_1(M) = m.$$

Assim, o Teorema de Obata implica que M é isométrica a uma esfera. Além disso, a igualdade em (2.22) implica que $X = \alpha E_{m+1}, \ \alpha \in \mathbb{R}$, enquanto que a igualdade

$$A(M) = \int_M |X|^2$$

em (2.23) implica que $\alpha^2 = 1$. Portanto, $|X| = 1$ em M, ou seja, M é a esfera unitária. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] ALEXANDROV, A. D. *Uniqueness Theorems for Surfaces in the Large V,* Vestnik Leningrad University. **13** 1958 nº 19, 5-8. (Tradução para o inglês: American Mathematical Society Translations, Ser. 2, **21**, 1962, 412-415).

[2] BACHMAN, G. & NARICI, L. *Functional Analysis* Academic Press, New York, 1966.

[3] BERARD, P. H. *Lectures on Spectral Geometry*, 15º Colóquio Brasileiro de Matemática, SBM, Poços de Caldas, 1985.

[4] BERGER, M & GAUDUCHON, P. & MAZET, E. *Le Spèctre d'Une Variété Riemannienne*, Lecture Notes in Mathematics, nº 194, 1971.

[5] HICKS, N. J. *Notes on Differential Geometry*, Van Nostrand Reinhold company, New York, 1965.

[6] DO CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*, 3ª ed., Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.

[7] LI, P. *Lecture Notes on Geometric Analisis*, University of California, Irvine, 1996. Distribuição livre na internet através do link math.uci.edu/ pli/lecture.pdf

[8] LICHNEROWICZ, A. *Geométrie des Groupes de Transformations*, Dunod, 1958.

[9] LIMA, E. L. *Análise Real Volume 3: Análise Vetorial*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2007.

[10] LIMA, E. L. *Duas Novas Demonstrações do Teorema de Jordan-Brouwer no Caso Diferenciável*, Revista Matemática Universitária, nº 4, 1986, 89-105.

[11] OBATA, M. *Certain Conditions for a Riemannian Manifold to be Isometric with a Sphere*, Jornal of Mathmatical Society of Japan **14**, 1962, 333-340.

[12] MORITA, S. *Translations of Mathematical Monographs, Volume 201: Geometry of Differential Forms*, Providence. American Mathematical Society, 2001.

[13] REILLY, R. *Applications of the Hessian Operator in a Riemannian Manifold*, Indianna University Mathematical Journal **23** 1977, 459-472.

[14] REED, M. & SIMON, B. *Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators*, Academic Press, 1978.

[15] SCHOEN R. & YAU S.T. *Lectures on Differential Geometry*, International Press, Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, volume I, USA, 1994.

Índice Remissivo