UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

O PROBLEMA DE CAUCHY PARA A EQUAÇÃO KURAMOTO-VELARDE E PARA O SISTEMA SUPER KDV.

Autor: Leandro Favacho da Costa

Orientador: Prof. Dr. Amauri da Silva Barros

Maceió

Fevereiro, 2009

Leandro Favacho da Costa

O Problema de Cauchy para a equação Kuramoto-Velarde e para o sistema super KdV

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Análise submetida em 05 de fevereiro de 2009 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Amauri da Silva Barros

Maceió

Fevereiro, 2009

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

C837p Costa, Leandro Favacho da.
O problema de Cauchy para a equação Kuramoto-Velarde e para o sistema super KDV / Leandro Favacho da Costa. – Maceió, 2009.
70f.

Orientador: Amauri da Silva Barros.
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2009.

Bibliografia: f. 60-70.

1. Cauchy, problemas de. 2. Efeitos regularizadores . 3. Kuramoto-Velarde, Equação de. 4. Sistema super KDV. 5. Boa colocação. I. Título.

CDU: 517.955

O Problema de Cauchy para a equação Kuramoto-Velarde e para o sistema super KdV

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Análise submetida em 05 de fevereiro de 2009 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Carlos Matheus Silva Santos

Prof. Dr. Adán Jose Corcho Fernández

Prof Dr. Amauri da Silva Barros (Orientador)

Aos meus pais Laércio Favacho da Costa
e Maria das Graças Costa.

Agradecimentos

- Ao Professor Doutor Amauri da Silva Barros por, desde a época de minha graduação, ter acreditado em meu potencial e me dado oportunidades para elevar meus conhecimentos em Matemática e alcançar meus objetivos. Agradeço também pelos conselhos e pela amizade durante todos esses anos.

- À todos os professores que contribuíram direta ou indiretamente em minha formação acadêmica. Em especial ao Professor Doutor Ediel de Azevedo Guerra, pela orientação em meu T.C.C. e pela grande contribuição dada ao trabalho, e ao Professor Mestre Francisco Vieira Barros, por ter me dado minha primeira oportunidade na graduação, me ajudando a desenvolver minhas habilidades na monitoria de Cálculo I. Agradeço também pela amizade de ambos. Não poderia esquecer também do Professor Mestre Adroaldo Dorvillé e do Professor Doutor José Adonai pelos excelentes cursos ministrados em minha graduação. Também ao Professor Doutor Adán José Corcho por ter participação decisiva neste trabalho.

- À toda minha família, em especial minha esposa Edvane por estar do meu lado até hoje me ajudando a crescer cada vez mais como pessoa e como profissional. Sem ela não teria conseguido tantas vitórias.

- Aos meus amigos André Pizzaia, Daniel Lemos, Darliton Romão, Everson Fernando e Marcius Petrúcio, por todos esses anos de companherismo e amizade. Também por estarem ao meu lado nos desafios que se apresentaram até hoje desde o início da graduação.

- Aos colegas do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFAL. Em especial à Eduardo Santana pelos grandes ensinamentos passados à mim com maestria.

- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela concessão de bolsa de iniciação científica pelo projeto institulado “Transformada de Fourier e Aplicações”orientado pelo Professor Doutor Amauri da Silva Barros. À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Alagoas (FAPEAL) e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela concessão de bolsa de mestrado pelo projeto intitulado “Estudo do Problema de Cauchy para Modelos que Generalizam a Equação de Korteweg de Vries”orientado pelo Professor Doutor Amauri da Silva Barros.

- A Deus por tudo...

Resumo

Neste trabalho, mostramos que o problema de Cauchy com dado inicial pequeno associado à equação Kuramoto-Velarde generalizada com dispersão sem o termo dissipativo

$$\begin{cases} \partial_t u + \alpha\ \partial_x^3 u + \gamma\left(\partial_x u\right)^2 + \delta u^p\ \partial_x^2 u = 0 \\ u(0) = \phi \end{cases},$$

é localmente bem-posto em $H^s\left(\mathbb{R}\right) \cap H^3\left(\mathbb{R}; x^2 dx\right), \quad s \geq 5$. Mostramos também que o problema de Cauchy associado ao sistema super KdV

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \frac{1}{2}\partial_x u^2 + \frac{1}{2}\partial_x^2 v^2 = 0 \\ \partial_t v + \partial_x^3 v + \partial_x\left(uv\right) = 0, \quad x, t \in \mathbb{R} \\ \left(u\left(x,0\right), v\left(x,0\right)\right) = \left(\varphi\left(x\right), \psi\left(x\right)\right) \end{cases},$$

é localmente bem-posto nos espaços de Sobolev $X_{s,3} = \left(H^s\left(\mathbb{R}\right) \cap H^3\left(\mathbb{R}; x^2 dx\right)\right)$ $\times \left(H^s\left(\mathbb{R}\right) \cap H^3\left(\mathbb{R}; x^2 dx\right)\right)$, com $s \geq 5$. Em ambos os casos, usamos os efeitos regularizantes do tipo Kato e o Princípio de Contração.

Palavras-chave: Boa-colocação, efeitos regularizantes, equação Kuramoto-Velarde, sistema super KdV.

Abstract

In this work, we show that the Cauchy problem with small initial data associated to the generalized Kuramoto-Velarde equation with dispersion without a dissipative term

$$\begin{cases} \partial_t u + \alpha\ \partial_x^3 u + \gamma\left(\partial_x u\right)^2 + \delta u^p\ \partial_x^2 u = 0 \\ u(0) = \phi \end{cases},$$

is locally well-posed on $H^s(\mathbb{R}) \cap H^3(\mathbb{R}; x^2dx)$, $\quad s \geq 5$. We show too that the Cauchy problem associated to the super KdV system

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \frac{1}{2}\partial_x u^2 + \frac{1}{2}\partial_x^2 v^2 = 0 \\ \partial_t v + \partial_x^3 v + \partial_x(uv) = 0, \quad x, t \in \mathbb{R} \\ (u(x,0), v(x,0)) = (\varphi(x), \psi(x)) \end{cases},$$

is locally well-posed on the Sobolev spaces $X_{s,3} = \left(H^s(\mathbb{R}) \cap H^3(\mathbb{R}; x^2dx)\right)$ $\times \left(H^s(\mathbb{R}) \cap H^3(\mathbb{R}; x^2dx)\right)$, com $s \geq 5$. Both of cases, we use the smoothing effects of Kato type and the contraction principle.

Key-words: Well-posedness, smoothing effects, Kuramoto-Velarde equation, super KdV system.

Sumário

Introdução

Em nosso trabalho, vamos estudar a boa colocação local para dois problemas de Cauchy. Diremos que um problema de valor inicial é localmente bem-posto em algum espaço funcional X, se para todo dado inicial $\phi \in X$, existe um tempo $T > 0$ e uma única solução u da equação integral associada ao PVI (existência e unicidade), tal que $u \in C([0,T]; X)$ (persistência) e a aplicação fluxo dado-solução é ao menos contínua de uma vizinhança de $\phi \in X$ para $C([0,T]; X)$ (dependência contínua).

Começamos com o problema de Cauchy associado à equação Kuramoto-Velarde generalizada com dispersão

$$\begin{cases} \partial_t u + \alpha\, \partial_x^3 u + \nu\left(\partial_x^2 u + \partial_x^4 u\right) + \gamma\left(\partial_x u\right)^2 + \delta u^p\, \partial_x^2 u = 0 \\ u(0) = \phi \end{cases}, \tag{0.1}$$

na ausência de dissipação ($\nu = 0$), onde $\alpha, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ e $p \geq 1$ é um inteiro.

O problema de valor inicial (PVI) (0.1) é um caso particular da família de PVIs

$$\begin{cases} \partial_t u + \ \partial_x^{2j+1} u = P\left(u, \partial_x u, ..., \partial_x^{2j} u\right), \quad x, t \in \mathbb{R}, \quad j \in \mathbb{N} \\ u(0) = \phi \end{cases}, \tag{0.2}$$

onde

$$P : \mathbb{C}^{2j+1} \to \mathbb{C}$$

é um polinômio sem termos constantes ou termos lineares.

Vamos obter como resultado principal a boa colocação local com dado inicial pequeno de (0.1) (sem dissipação) nos espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R}) \cap H^3(\mathbb{R}; x^2 dx)$, $\quad s \geq 5$. Tal resultado foi obtido por Argento em [2]. A técnica utilizada aqui é a mesma. Vamos utilizar os chamados efeitos regularizantes locais do tipo Kato presentes no grupo $W(t)$, o qual descreve a solução do problema linear homogêneo associado à

$$\begin{cases} \partial_t u + \alpha\ \partial_x^3 u = g(x,t) \\ u(0) = \phi \end{cases}, \tag{0.3}$$

e o lema da contração.

O segundo problema trabalhado nesta monografia é o problema de Cauchy com dado inicial pequeno associado ao sistema super KdV

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \frac{1}{2}\partial_x u^2 + \frac{1}{2}\partial_x^2 v^2 = 0 \\ \partial_t v + \partial_x^3 v + \partial_x (uv) = 0, \quad x, t \in \mathbb{R} \\ (u(x,0), v(x,0)) = (\varphi(x), \psi(x)) \end{cases}, \tag{0.4}$$

onde $u = u(x,t)$ e $v = v(x,t)$ são funções de valor real. Com a mesma técnica utilizada por Barros em [3], provamos que o problema (0.4) é localmente bem-posto nos espaços de Sobolev $X_{s,3} = (H^s(\mathbb{R}) \cap H^3(\mathbb{R}; x^2dx)) \times (H^s(\mathbb{R}) \cap H^3(\mathbb{R}; x^2dx))$, com $s \geq 5$. A técnica é essencialmente a mesma utilizada no estudo do problema (0.1).

O sistema super KdV é um caso particular da família de sistemas

$$\begin{cases} \partial_t u_k + \partial_x^{2j+1} u_k + P_k(u_1, ..., u_n, ..., \partial_x^{2j} u_1, ..., \partial_x^{2j} u_n) = 0 \\ u_k(x,0) = u_k^0(x), \quad x, t \in \mathbb{R}, \end{cases}, \tag{0.5}$$

onde $k = 1, 2, ..., n$, $u_k(x,t)$ é uma função de valor real ou complexo e $P_k : \mathbb{C}^{n(2j+1)} \to \mathbb{C}$ é um polinômio que não possui termos lineares ou constantes, isto é,

$$P_k(z) = \sum_{|\alpha| \geq \rho}^{N} a_\alpha^k z^\alpha, \quad \rho \geq 2$$

para $z = \left(z_1^0, ..., z_n^0, ..., z_1^{2j}, ..., z_n^{2j}\right)$.

O sistema (0.5) generaliza vários modelos presentes na Física e na Matemática. Em particular, ele contém toda a hierarquia da equação de Korteweg-de Vries (KdV), modelos de ordem superior em problemas de onda de água, média elástica, entre outros (veja [10]).

A equação KdV possui uma série de propriedades (ingredientes) relevantes que auxiliam no estudo da boa colocação local e global em espaços de Sobolev como existência e estabilidade de soluções tipo onda solitárias, infinitas leis de conservação, solução do tipo escala (scaling) entre outras. Nosso interesse agora é saber quais dessas propriedades continuam válidas para o sistema super KdV. É de nosso conhecimento que dentre estas boas propriedades, apenas a existência de um argumento do tipo scaling destaca-se. Tal argumento sugere que (0.4) não é bem posto em $X^{r,s} = H^r(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ para todo $r < -3/2$ e $s < -1$, com $r, s \in \mathbb{R}$ (veja [3]). Mais sobre estas propriedades o leitor encontrará no último capítulo deste trabalho denominado "Considerações Finais".

Organizamos o presente trabalho da seguinte maneira:

No Capítulo 1, exibimos os alicerces para tudo que faremos ao longo do trabalho. Destacamos na seção 1.1 as desigualdades de Minkowski e Hölder; na seção 1.2 a Identidade de Parseval e a Fórmula de Inversão da Transformada de Fourier no espaço das distribuições; na seção 1.3 o Lema de Imersão de Sobolev e na seção 1.5 os Teorema do Ponto fixo de Banach e da Função Implícita.

No Capítulo 2, mostramos que o problema de Cauchy para a equação de Kuramoto-Velarde sem o termo dissipativo

$$\begin{cases} \partial_t u + \alpha\, \partial_x^3 u + \gamma\,(\partial_x u)^2 + \delta u^p\, \partial_x^2 u = 0 \\ u(0) = \phi \end{cases}, \tag{0.6}$$

com o dado inicial pequeno é localmente bem posto em $H^s(\mathbb{R}) \cap H^3(\mathbb{R}; x^2 dx)\,, \quad s \geq 5$. Para isso usamos os efeitos regularizantes do tipo Kato associados ao grupo $W(t)$ presente na solução da parte linear do problema (0.6) e o Princípio da Contração.

No Capítulo 3, mostramos que o problema (0.4) com dado inicial pequeno é localmente bem posto em $X_{s,3} = (H^s(\mathbb{R}) \cap H^3(\mathbb{R}; x^2 dx)) \times (H^s(\mathbb{R}) \cap H^3(\mathbb{R}; x^2 dx))$, com $s \geq 5$.

Finalmente no capítulo 4, fazemos algumas considerações sobre os principais pontos abordados no trabalho, complementando com informações relevantes sobre a teoria desenvolvida. Em especial, vamos encontrar referências de outras técnicas desenvolvidas no estudo da boa colocação dos problemas aqui abordados bem como propriedades dos mesmos.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Espaços L^p e Propriedades

Nesta seção, vamos apresentar alguns resultados e propriedades referentes aos espaços L^p. Vamos supor que o leitor esteja familiarizado com os principais conceitos de medida e integração, como por exemplo os conceitos de função mensurável, integrabilidade, conjuntos de medida nula, entre outros.

Definição 1.1. *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}$. Definimos $L^1(\Omega)$ como sendo o espaço das funções integráveis sobre Ω com valores em $\mathbb{R}$ e escrevemos*

$$\|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f(x)|\, dx.$$

Definição 1.2. *Seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < \infty$; define-se*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \text{ mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega) \right\}$$

e escreve-se

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p\, dx \right]^{1/p}.$$

Teorema 1.1. *(Desigualdade de Young) Sejam $x, y \geq 0$ e $1 \leq p < \infty$. Então*

$$xy \leq \frac{1}{p}\, x^p + \frac{1}{q}\, y^q$$

com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Demonstração. Como a função log é côncava sobre $(0, \infty)$, temos que

$$\log\left(\frac{1}{p}\ x^p + \frac{1}{q}\ y^q\right) \geq \frac{1}{p}\log\ x^p + \frac{1}{q}\log\ y^q = \log\ xy,$$

e assim o teorema está demonstrado. □

Teorema 1.2. *(Desigualdade de Hölder) Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^q$ onde $p > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1$ e $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$.*

Demonstração. A conclusão é clara se $p = 1$ e se $p = \infty$. Suponhamos então que $1 < p < \infty$. Então, pela desigualdade de Young (Teorema 1.1), temos que

$$|f(x)|\,|g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q, \quad q.t.p, x \in \Omega.$$

Daí, resulta que $fg \in L^1$ e

$$\int |fg| \leq \frac{1}{p}\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{q}\|g\|_{L^q}^q.$$

Substituindo na desigualdade acima f por λf $(\lambda > 0)$ temos que

$$\int |fg| \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p}\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{\lambda q}\|g\|_{L^q}^q.$$

Escolhendo $\lambda = \|f\|_{L^p}^{-1}\|g\|_{L^q}^{q/p}$, obtemos a desigualdade presente no Teorema, o que conclui a demonstração.

□

Teorema 1.3. *(Desigualdade de Minkowski) Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $F(x,y)$ mensurável no espaço-produto de medida sigma-finito $X \times Y$. Então*

$$\left\{\int_Y\left(\int_X |F(x,y)|\,dx\right)^p dy\right\}^{\frac{1}{p}} \leq \int_X\left(\int_Y |F(x,y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}} dx.$$

Demonstração. Veja o apêndice de [15]. □

Teorema 1.4. *L^p é um espaço de Banach para todo $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Veja [6] pág. 57. □

1.2 Transformada de Fourier

Nesta seção exibiremos alguns resultados sobre a Transformada de Fourier. Tais resultados foram escolhidos pela importância que estes apresentam principalmente para a resolução do problema de Cauchy associado a KdV linear. (Para mais detalhes veja [13]. Outros resultados a cerca da teoria da Transformada de Fourier podem ser encontrados com detalhes em [7].

Definição 1.3. *A Transformada de Fourier de uma função $f \in L^1(\mathbb{R})$, denotada por $\widehat{f}$, é definida como*

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \ , \ \xi \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Apesar de ser possível desenvolver a teoria da Transformada de Fourier tomando $L^1(\mathbb{R})$ como "base de operações", é extremamente conveniente introduzir um espaço de funções "muito bem comportadas"para estudar a aplicação $f \to \widehat{f}$ e várias questões relacionadas. Tal espaço é definido como segue

Definição 1.4. *O espaço de Schwartz (ou das funções C^∞ rapidamente decrescentes), denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, é a coleção das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tais que,*

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}) \tag{1.2}$$

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^\alpha f^\beta(x) \right| < \infty \tag{1.3}$$

para todo par $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Teorema 1.5.

1. *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então $f^{(\alpha)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}$ e*

$$\left(f^{(\alpha)}\right)\hat{}(\xi) = i^\alpha \xi^\alpha \hat{f}(\xi) \ , \ \xi \in \mathbb{R}; \tag{1.4}$$

2. *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e vale a fórmula de inversão*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \tag{1.5}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$(\hat{f})\check{} = f = (\check{f})\hat{} \tag{1.6}$$

para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

3. *Se* $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, *então* $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *e*

$$(f * g)\widehat{\ }(\xi) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\xi)\,\hat{g}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \tag{1.7}$$

onde $*$ *denota a convolução de* f *por* g.

4. *Se* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, *então*

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left\|\widehat{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R})} (identidade\ de\ Parseval\ em\ \mathcal{S}(\mathbb{R})). \tag{1.8}$$

Demonstração. : Ver [7] capítulo V seção III. □

Veremos agora algumas propriedades da Transformada de Fourier no espaço das distribuições, definido como segue

Definição 1.5. *Uma distribuição temperada é um funcional linear* $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ *com a propriedade que existe uma sequência* $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *tal que,*

$$T(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x)\,\varphi(x)\,dx \tag{1.9}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

A coleção de todas as distribuições temperadas forma um espaço vetorial sobre os complexos o qual é denotado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Teorema 1.6.

1. *A aplicação* $f \in L^p \to T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$ *é contínua no sentido de* L^p.

2. *A aplicação* $\widehat{\ } : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *é injetiva e sobrejetiva, e valem as fórmulas*

$$(\hat{f})\check{\ } = f = (\check{f})\hat{\ }. \tag{1.10}$$

3. *Se* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *então*

$$\left(f^{(\alpha)}\right)\widehat{\ } = i^{\alpha}\xi^{\alpha}\hat{f} \tag{1.11}$$

e

$$\left(\hat{f}\right)^{(\alpha)} = (-i)^{\alpha}\,(x^{\alpha}f)\widehat{\ }. \tag{1.12}$$

Demonstração. Ver [7] capítulo V seção V. □

1.3 Espaços de Sobolev e Propriedades

Seja $s \in \mathbb{R}$. Os espaços de Sobolev (de tipo L^2) em $\mathbb{R}$ são os seguintes subconjuntos de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$:

$$H^s(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) : \left(1+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}} \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}) \right\}.$$

O espaço $H^s(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$, é de Hilbert quando munido do produto interno

$$(f|g)_s = \int_{\mathbb{R}} d\xi \left(1+\xi^2\right)^s \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)}. \tag{1.13}$$

A norma proveniente deste produto interno é

$$\|f\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}} d\xi \left(1+\xi^2\right)^s \left|\hat{f}(\xi)\right|^2. \tag{1.14}$$

Em particular, $H^0(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R})$. No caso de $s \in \mathbb{N}$, temos que

$$\|f\|_s^2 = \sum_{j=0}^{s} \left\|\partial_x^j f\right\|_0^2, \tag{1.15}$$

onde $\|\cdot\|_0$ denota a norma em $L^2(\mathbb{R})$.

Também utilizaremos os espaços de Sobolev homogêneos, definidos para $s \in \mathbb{R}$ por

$$\dot{H}^s := \dot{H}^s(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) ; D^s f \in L^2(\mathbb{R}) \right\},$$

com

$$\|f\|_{\dot{H}^s} = \left\|\widehat{D^s f}\right\|_0, \tag{1.16}$$

onde $\widehat{D^s f}$ é como em (1.4). Note que se $f \in H^s(\mathbb{R})$, então

$$\|f\|_{\dot{H}^s} = \left\|\widehat{D^s f}\right\|_0 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^{\frac{s}{2}} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Logo, concluímos que $H^s(\mathbb{R}) \subseteq \dot{H}^s(\mathbb{R})$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Já o espaço de Sobolev com peso $H^s(\mathbb{R}; x^2 dx)$, para $s \in \mathbb{N}$, é definido por

$$H^s\left(\mathbb{R}; x^2 dx\right) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) ; x\partial_x^i f \in L^2(\mathbb{R}) \ , \ 0 \leq i \leq s \right\},$$

cuja norma é

$$\|f\|_{s,2}^2 := \|f\|_{H^s(x^2dx)}^2 = \sum_{i=0}^{s} \left\|x\partial_x^i f\right\|_0^2. \tag{1.17}$$

Exibiremos agora alguns resultados acerca dos espaços de Sobolev definidos anteriormente. Algumas demonstrações serão omitidas por conveniência, seguindo várias referências onde se podem encontrá-las.

Proposição 1.1.

(a) Se $s > \frac{1}{2}$, *então* $H^s(\mathbb{R})$ *é uma álgebra de Banach com relação à multiplicação de funções. Além disso, para* $f, g \in H^s(\mathbb{R})$ *vale a desigualdade*

$$\|fg\|_s \leq c(s)\,\|f\|_s\,\|g\|_s\,;$$

(b) Sejam $s \in \mathbb{R}$ *e* $k \in \mathbb{N}$ *com* $s > \frac{1}{2} + k$, *então* $H^s(\mathbb{R}) \hookrightarrow C_\infty^k(\mathbb{R})$*(Imersão de Sobolev).*

Demonstração. Veja [1]. $\square$

Lema 1.1. $H^1(\mathbb{R}) \subseteq \widehat{L^1}(\mathbb{R})$. *Além disso, se* $g \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}; x^2dx)$ *vale a desigualdade*

$$\|g\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq c\left(\|g\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|xg\|_{L^2(\mathbb{R})}\right).$$

Demonstração. Seja $f \in H^1(\mathbb{R})$. Então, utilizando a desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned}
\left\|\hat{f}\right\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} \left|\hat{f}(\xi)\right| d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{(1+\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+\xi^2)^{\frac{1}{2}}} \left|\hat{f}(\xi)\right| d\xi \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right) \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+\xi^2)} d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c\,\|f\|_{H^1(\mathbb{R})},
\end{aligned}$$

onde $c := \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+\xi^2)} d\xi\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$. Dessa forma, concluímos que $H^1(\mathbb{R}) \subseteq \widehat{L^1}(\mathbb{R})$.

Denotando agora $g := \widehat{(\check{g})}$ temos, usando a primeira parte da demonstração e a identidade de Parseval, que

$$\begin{aligned}
\|g\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq c\left(\|\check{g}\|_{H^1(\mathbb{R})}\right) \\
&\leq c\left(\|\check{g}\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\partial_x \check{g}\|_{L^2(\mathbb{R})}\right) \\
&\leq c\left(\|\check{g}\|_{L^2(\mathbb{R})} + \left\|(xg)\check{}\right\|_{L^2(\mathbb{R})}\right) \\
&\leq c\left(\|g\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|(xg)\|_{L^2(\mathbb{R})}\right),
\end{aligned}$$

e isto conclui a demonstração do lema. $\square$

Corolario 1.1. *Para $s, r \in \mathbb{Z}$ com $r > 0$ temos que $H^s(\mathbb{R}) \cap H^r(\mathbb{R}; x^2 dx) \subseteq H^s(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$.*

Demonstração. Vamos mostrar que $H^r(\mathbb{R}; x^2 dx) \subseteq L^1(\mathbb{R})$, e daí o resultado é imediato. Observe inicialmente que se $f \in H^r(\mathbb{R}; x^2 dx)$, $r \geq 1$, então $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}; x^2 dx)$, pois $H^r(\mathbb{R}; x^2 dx) \subset H^0(\mathbb{R}; x^2 dx) = L^2(\mathbb{R}; x^2 dx)$, para todo $r \geq 1$.
Assim, podemos aplicar o lema anterior para f, ou seja,

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq c\left(\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|(xf)\|_{L^2(\mathbb{R})}\right) < \infty,$$

pois $f \in H^r(\mathbb{R}; x^2 dx)$ implica $xf \in L^2(\mathbb{R})$, para todo $r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 1$. $\square$

1.4 Espaços de Banach Mistos e Propriedades

Para $1 \leq p, q < \infty$, $L^p_x L^q_T$ é o espaço de Banach misto definido por

$$L^p_x L^q_T := \left\{ f : \mathbb{R} \times [-T, T] \to \mathbb{R};\ \|f\|_{L^p_x L^q_T} < +\infty \right\},$$

onde

$$\|f\|_{L^p_x L^q_T} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-T}^{T} |f(x,t)|^q \, dt \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.18}$$

Quando $p = \infty$ ou $q = \infty$, usaremos as seguintes definiçõs adaptadas de (1.18):

$$\|f\|_{L^p_x L^\infty_T} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sup_{t \in [-T,T]} |f(x,t)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}; \tag{1.19}$$

$$\|f\|_{L_x^\infty L_T^q} = \sup_x \left(\int_{-T}^{T} |f(x,t)|^q \, dt \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.20}$$

Se escrevermos $T = t$ em (1.18), significa que

$$\|f\|_{L_x^p L_t^q} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,t)|^q \, dt \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.21}$$

Vamos agora demonstrar um lema utilizado ao longo do trabalho.

Lema 1.2. *Sejam $f \in L_x^2 L_T^\infty$ e $g \in L_x^\infty L_T^2$, então $fg \in L_x^2 L_T^2$ e vale*

$$\|fg\|_{L_x^2 L_T^2} \leq \|f\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|g\|_{L_x^\infty L_T^2}.$$

Demonstração. Pela desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{L_x^2 L_T^2}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-T}^{T} |fg(x,t)|^2 \, dt \right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-T}^{T} |f(x,t)|^2 \, |g(x,t)|^2 \, dt \right) dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sup_{[-T,T]} |f|^2 \int_{-T}^{T} |g|^2 \, dt \right) dx \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sup_{[-T,T]} |f|^2 \, dx \right) \left(\sup_x \int_{-T}^{T} |g|^2 \, dt \right) \\
&= \|f\|_{L_x^2 L_T^\infty}^2 \|g\|_{L_x^\infty L_T^2}^2,
\end{aligned}$$

o que prova o lema. □

1.5 Resultados Técnicos

Guardamos para o fim deste capítulo alguns resultados técnicos utilizados no trabalho.

Teorema 1.7. *(Teorema do Ponto Fixo de Banach) Considere um espaço métrico $X = (X,d)$, onde $X \neq \emptyset$. Suponha que X é completo e seja $T : X \to X$ uma contração em X. Então T tem precisamente um ponto fixo.*

Demonstração. A idéia da demonstração é a seguinte: Construimos uma sequência (x_n) e mostramos que esta é de Cauchy, e então convergente em um espaço completo X. A seguir, provamos que o limite x desta sequência é um ponto fixo de T, e T não tem pontos fixos adicionais.

Comecemos escolhendo $x_0 \in X$ de forma arbitrária. Então, construimos a sequência

$$x_0, \quad x_1 = Tx_0, \quad x_2 = Tx_1 = T^2x_0, ..., \quad x_n = T^n x_0, ...$$

Note que tal sequência nada mais é que a sequência obtida por repetidas aplicações de T à x_0. Mostremos que esta sequência é de Cauchy.
Observe que

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(Tx_m, Tx_{m-1}) \\ &\leq \alpha d(x_m, x_{m-1}) \\ &= \alpha d(Tx_{m-1}, x_{m-2}) \\ &\leq \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}) \\ ... &\leq \alpha^m d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Assim, usando a desigualdade triangular e a fórmula para soma dos termos de uma P.G. finita, obtemos, para $n > m$,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq \alpha^m \cdot d(x_0, x_1) + \alpha^{m+1} \cdot d(x_0, x_1) + \cdots + \alpha^{n-1} \cdot d(x_0, x_1) \\ &= [\alpha^m + \alpha^{m+1} + \cdots + \alpha^{n-1}] \cdot d(x_0, x_1) \\ &\leq \alpha^m \cdot \frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha} \cdot d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Como $0 \leq \alpha < 1$, temos que $1 - \alpha^{n-m} < 1$, e então,

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_1, x_0).$$

Também pelo fato de $0 \leq \alpha < 1$, $\alpha^m \to 0$ quando $m \to 0$ ($1 - \alpha$ e $d(x_1, x_0)$ são fixos). Logo, o lado direito da desigualdade acima se torna tão pequeno quanto desejamos fazendo $m \to 0$. Assim, concluímos que (x_n) é de Cauchy. Como X é completo, (x_n) converge, digamos para x. Vamos mostrar que x é um ponto fixo de T.

Pela desigualdade triangular, temos que

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &\leq d(x, x_m) + d(x_m, Tx) \\ &= d(x, x_m) + d(Tx_{m-1}, Tx) \\ &\leq d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x), \end{aligned}$$

e o lado direito da desigualdade acima vai a zero quando $m \to 0$, pois $x_m \to x$. Logo, $d(x, Tx) \equiv 0$, e consequentemente, $Tx = x$. Assim, mostramos que x é um ponto fixo de T.

Suponha agora que $Tx = x$ e $Ty = y$. Então

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y),$$

e como $\alpha < 1$, seque que $d(x, y) \equiv 0$, o que nos dá $x = y$. Isto conclui a demonstração. $\square$

Teorema 1.8. *(Teorema da Função Implícita) Sejam $U \subset E$, $V \subset F$ abertos (E e F espaços de Banach) e $f : U \times V \to G$ uma aplicação de classe C^k. Considere $(a, b) \in U \times V$ e assuma que $D_2 f(a, b) : F \to G$ é um isomorfismo. Se $f(a, b) = 0$, então existe uma aplicação contínua $g : U_0 \to V$, onde $U_0 \subset U$ é uma vizinhança aberta de a tal que $g(a) = b$ e $f(x, g(x)) = 0$, para todo $x \in U_0$. Além disso, se U_0 é uma bola suficientemente pequena, então g é determinada de maneira única e é de classe C^k.*

Demonstração. Veja [12]. $\square$

Teorema 1.9. *Sejam E um espaço de Banach e $T \in \mathcal{B}(E)$ tal que $\|T\| < 1$. Então, $(I - T)$ é inversível e seu inverso é dado pela série de Neumann*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n,$$

onde a convergência vale na norma de $\mathcal{B}(E)$. Além disso,

$$\left\|(I - T)^{-1}\right\| \leq (1 - \|T\|)^{-1}.$$

Demonstração. Veja [7]. $\square$

Definição 1.6. *Seja $\mathcal{F}$ a faixa definida por $\mathcal{F} = \{z = x + iy : 0 \leq x \leq 1\}$. Suponhamos que para cada $z \in \mathcal{F}$ corresponde um operador linear T_z. A família de operadores $\{T_z\}$ é chamada admissível se a aplicação*

$$z \mapsto \int_Y (T_Z f) g d\nu$$

é analítica no interior de $\mathcal{F}$, contínua sobre $\mathcal{F}$ e existe uma constante $a < \pi$ tal que

$$e^{-a|y|} \log \left| \int_Y (T_Z f) g d\nu \right|$$

é uniformemente limitada na faixa F.

Teorema 1.10 (Stein). *Supondo que* $\{T_z\}, z \in \mathcal{F}$, *seja uma família admissível de operadores satisfazendo*

$$\|T_{iy}f\|_{q_0} \leq M_0(y)\,\|f\|_{p_0} \quad e \quad \|T_{1+iy}f\|_{q_1} \leq M_1(y)\,\|f\|_{p_1}$$

para todas funções simples $f \in L^{p_1}$ *, onde* $1 \leq p_j,\ q_j \leq \infty,\ M_j(y),\ j = 0, 1,$ *são independentes de* f *e satisfazem a desigualdade*

$$\sup_{-\infty<y<\infty} e^{b|y|} \log M_j(y) < \infty,$$

para algum $b < \pi$*. Se* $0 \leq t \leq 1$*, existe uma constante* M_t *tal que*

$$\|T_t f\|_{q_t} \leq M_t\,\|f\|_{p_t},$$

para toda funcão simples f *e*

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

Demonstração. Veja [16]. □

Capítulo 2

Equação de Kuramoto-Velarde Generalizada com Dispersão

2.1 Introdução

O presente capítulo tem como objetivo estudar o problema de Cauchy para a **Equação de *Kuramoto-Velarde* com dispersão** sem o termo dissipativo, isto é,

$$\begin{cases} \partial_t u + \alpha\ \partial_x^3 u + \gamma \left(\partial_x u\right)^2 + \delta u^p\ \partial_x^2 u = 0 \\ u(0) = \phi \end{cases}, \tag{2.1}$$

onde $x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+,\ u$ é uma função que toma valores reais e, vamos supor que $\alpha,\ \gamma$ e δ são constantes reais não nulas.

Será explorado diretamente o caráter dispersivo da equação, desconsiderando suas propriedades dissipativas (veja [2]). O efeito da dispersão é traduzido pelos chamados efeitos regularizantes locais do tipo Kato, presentes no grupo unitário $\{W\,(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, o qual descreve a solução do problema linear homogêneo associado à

$$\begin{cases} \partial_t u + \alpha\ \partial_x^3 u = g\,(x,t) \\ u(0) = \phi. \end{cases} \tag{2.2}$$

Tal solução, obtida com a utilização da Transformada de Fourier (veja [13]), é dada por

$$u\,(x,t) = W\,(t)\,\phi\,(x) = S_t * \phi\,(x)\,, \tag{2.3}$$

onde $W(t) = e^{-\alpha t \partial_x^3}$ e S_t é a integral oscilatória

$$S_t(x) = c \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} e^{it\alpha\xi^3} d\xi. \tag{2.4}$$

O desenvolvimento do método de solução aqui empregado se deve principalmente a Kenig, Ponce e Vega.

2.2 Estimativas Lineares

Nesta seção vamos estabelecer as estimativas lineares necessárias à obtenção da solução de (2.1). Tais estimativas aparecem demonstradas nos dois lemas seguintes.

Lema 2.1. *(Estimativas lineares homogêneas) Se* $\varphi \in L_x^2(\mathbb{R})$*, então*
(i)

$$\left\| \partial_x^s \left(\partial_x W(t) \varphi \right) \right\|_{L_x^\infty L_t^2} \leq c \left\| \partial_x^s \varphi \right\|_0, \; s \in \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

(ii) Para $T > 0$*,*

$$\left\| W(t) \varphi \right\|_{L_x^2 L_T^\infty} \leq c (1+T)^\rho \left\| \varphi \right\|_r, \tag{2.6}$$

para $r, \rho > \frac{3}{4}$.

Demonstração. (i): Seja $\varphi \in L_x^2(\mathbb{R})$. Então temos que

$$\begin{aligned} W(t)\varphi(x) &= (S_t * \varphi)(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_t(x-y)\varphi(y)\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(c \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)\xi} e^{it\xi^3} d\xi \right) \varphi(y)\,dy \\ &= c \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(t\xi^3 + x\xi\right)} \hat{\varphi}(\xi)\,d\xi. \end{aligned}$$

Assim, $\partial_x W(t)\varphi(x) = c\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(t\xi^3+x\xi\right)}\ \xi\ \hat{\varphi}(\xi)\,d\xi.$
Faça então $\xi = \eta^{1/3}$. Logo,

$$\begin{aligned}\partial_x W(t)\varphi(x) &= c\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(t\eta+x\eta^{1/3}\right)}\hat{\varphi}\left(\eta^{1/3}\right)\eta^{1/3}\ \frac{1}{3}\ \eta^{-2/3}d\eta\\ &= c\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(t\eta+x\eta^{1/3}\right)}\hat{\varphi}\left(\eta^{1/3}\right)\eta^{-1/3}d\eta.\end{aligned}$$

Usando a identidade de Parseval na variável t, temos que para cada $x\in\mathbb{R}$ vale

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\partial_x W(t)\varphi(x)\right|^2 dt &= c\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\eta}e^{ix\eta^{1/3}}\hat{\varphi}\left(\eta^{1/3}\right)\eta^{-1/3}d\eta\right|^2 dt\\ &= c\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\,e^{it\eta}d\eta\right|^2 dt\\ &= c\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(\eta)\right|^2 d\eta\\ &= c\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{ix\eta^{1/3}}\hat{\varphi}\left(\eta^{1/3}\right)\eta^{-1/3}\right|^2 d\eta\\ &= c\int_{-\infty}^{\infty}|\eta|^{-2/3}\left|\hat{\varphi}\left(\eta^{1/3}\right)\right|^2 d\eta\\ &= c\int_{-\infty}^{\infty}\left(\xi^3\right)^{-2/3}\left|\hat{\varphi}(\xi)\right|^2 3\xi^2 d\xi\\ &= c\left\|\varphi\right\|_0^2.\end{aligned}$$

Agora afirmamos que $\partial_x^s\left[\partial_x W(t)\varphi(x)\right] = \partial_x\left[W(t)\partial_x^s\varphi(x)\right]$. De fato, temos que:

$$\begin{aligned}\partial_x\left[W(t)\partial_x^s\varphi(x)\right] &= \partial_x\left[\left(S_t*\partial_x^s\varphi\right)(x)\right]\\ &= \left(\partial_x S_t*\partial_x^s\varphi\right)(x),\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}\partial_x^s\left[\partial_x W(t)\varphi(x)\right] &= \partial_x^s\left[\partial_x\left(S_t*\varphi(x)\right)\right]\\ &= \partial_x^s\left[\left(\partial_x S_t*\varphi\right)(x)\right]\\ &= \left(\partial_x^s\varphi*\partial_x S_t\right)(x)\\ &= \left(\partial_x S_t*\partial_x^s\varphi\right)(x),\end{aligned}$$

e assim obtemos a igualdade. Finalmente

$$\begin{aligned}
\left\| \partial_x^s \left(\partial_x W\left(t\right) \varphi \right) \right\|_{L_x^\infty L_t^2}^2 &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \partial_x^s \left(\partial_x W\left(t\right) \varphi\left(x\right) \right) \right|^2 dt \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \partial_x^s \left(W\left(t\right) \partial_x^s \varphi\left(x\right) \right) \right|^2 dt \\
&\leq c \int_{-\infty}^{\infty} \left| \partial_x \left(W\left(t\right) \partial_x^s \varphi\left(x\right) \right) \right|^2 dt \\
&= c \left\| \partial_x^s \varphi \right\|_0^2 ,
\end{aligned}$$

o que encerra a demonstração de (i).

Para a demonstração de (ii), veja [3]. □

Lema 2.2. *(Estimativas lineares não-homogêneas) Se* $g \in L_x^1 L_t^2$ *e* $T > 0$*, então valem:*

$$(i) \left\| \partial_x \int_0^t W\left(t-\tau\right) g\left(x,\tau\right) d\tau \right\|_{L_T^\infty L_x^2} \leq c \left\| g \right\|_{L_x^1 L_t^2} , \tag{2.7}$$

$$(ii) \left\| \partial_x^2 \int_0^t W\left(t-\tau\right) g\left(x,\tau\right) d\tau \right\|_{L_x^\infty L_t^2} \leq c \left\| g \right\|_{L_x^1 L_t^2} . \tag{2.8}$$

Demonstração. (i): Inicialmente afirmamos que

$$\left\| \partial_x \int_{-\infty}^{\infty} W\left(-t'\right) g\left(x,t'\right) dt' \right\|_0 \leq c \left\| g \right\|_{L_x^1 L_t^2} . \tag{2.9}$$

De fato, por dualidade, temos

$$\left\| \partial_x \int_{-\infty}^{\infty} W\left(-t'\right) g\left(x,t'\right) dt' \right\|_0$$

$$= \sup \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\partial_x \int_{-\infty}^{\infty} W\left(-t'\right) g\left(x,t'\right) dt' \right) f\left(x\right) dx ; \forall f \in L_x^2, \left\| f \right\|_0 = 1 \right\} .$$

Integrando por partes, usando a desigualdade de Hölder e o item (i) do lema anterior, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\partial_x\int_{-\infty}^{\infty}W\left(-t'\right)g\left(x,t'\right)dt'\right)f\left(x\right)dx\right|\\
&=\left|-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g\left(x,t'\right)\partial_xW\left(-t'\right)f\left(x\right)dt'dx\right|\\
&\leq\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|g\left(x,t'\right)\partial_xW\left(-t'\right)f\left(x\right)\right|dt'dx\\
&\leq\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|g\left(x,t'\right)\right|^2dt'\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\partial_xW\left(-t'\right)f\left(x\right)\right|^2dt'\right)^{1/2}\right]dx\\
&\leq\sup_x\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\partial_xW\left(-t'\right)f\left(x\right)\right|^2dt'\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|g\left(x,t'\right)\right|^2dt'\right)^{1/2}dx\\
&=\left\|\partial_xW\left(-t'\right)f\right\|_{L_x^\infty L_t^2}\left\|g\right\|_{L_x^1L_t^2}\\
&\leq c\left\|f\right\|_0\left\|g\right\|_{L_x^1L_t^2},
\end{aligned}
$$

donde concluímos a afirmação aplicando o sup em ambos os membros, com $\|f\|_0 = 1$.
Agora, usando (2.9) e o fato de o grupo $W(t)$ preservar a norma em $L^2(\mathbb{R})$, temos

$$
\begin{aligned}
\left\|\partial_x\int_0^tW\left(t-t'\right)g\left(x,t'\right)dt'\right\|_{L_T^\infty L_x^2}&=\left\|\partial_x\int_0^tW\left(t\right)W\left(-t'\right)g\left(x,t'\right)dt'\right\|_{L_T^\infty L_x^2}\\
&=\left\|W\left(t\right)\partial_x\int_0^tW\left(-t'\right)g\left(x,t'\right)dt'\right\|_{L_T^\infty L_x^2}\\
&=\sup_{t\in[0,T]}\left\|W\left(t\right)\partial_x\int_0^tW\left(-t'\right)g\left(x,t'\right)dt'\right\|_0\\
&=\sup_{t\in[0,T]}\left\|\partial_x\int_0^tW\left(-t'\right)g\left(x,t'\right)dt'\right\|_0\\
&\leq c\left\|g\right\|_{L_x^1L_t^2},
\end{aligned}
$$

e o item (i) está demonstrado.

(ii): Dizemos que uma função $f\in D_\otimes\left(\mathbb{R}^2\right)$ se podemos escrevê-la como $f(x,t)=\sum_{i=1}^N f_i(x)\tilde{f}_i(t)$, com f_i , $\tilde{f}_i\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, para $i=1,2,...,N$. Pode-se demonstrar que $\overline{D_\otimes\left(\mathbb{R}^2\right)}=L_x^pL_t^q$ e $\overline{D_\otimes\left(\mathbb{R}^2\right)}=L_t^qL_x^p$, para $p,q\in[1,\infty)$(veja [10]).
Afirmamos agora que

$$
\left\|\partial_x^2\int_{-\infty}^{\infty}W\left(t-t'\right)g\left(x,t'\right)dt'\right\|_{L_x^\infty L_T^2}\leq c\left\|g\right\|_{L_x^1L_t^2}.
$$

De fato, para $f \in D_{\otimes}(\mathbb{R}^2)$ com $\|f\|_{L_x^1 L_t^2} = 1$ temos que

$$\left\| \partial_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} W(t-t')\, g(x,t')\, dt' \right\|_{L_x^\infty L_T^2}$$

$$= \sup \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\partial_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} W(t-t')\, g(x,t')\, dt' \right) f(x,t)\, dxdt;\ \|f\|_{L_x^1 L_t^2} = 1 \right\}.$$

Note que como $D_{\otimes}(\mathbb{R}^2) \subset \overline{D_{\otimes}(\mathbb{R}^2)} = L_x^p L_t^q$, temos que $f \in L_x^1 L_t^2$ e assim $\|f\|_{L_x^1 L_t^2}$ está bem definida. Aplicando Fubini, as propriedades do grupo $W(t)$, integração por partes, a desigualdade de Hölder e o item (i) do lema, temos que

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\partial_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} W(t-t')\, g(x,t')\, dt' \right) f(x,t)\, dxdt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\partial_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} W(-t')\, g(x,t')\, dt' \right) W(t)\, f(x,t)\, dtdx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \left(\partial_x \int_{-\infty}^{\infty} W(-t')\, g(x,t')\, dt' \right) \left(\partial_x \int_{-\infty}^{\infty} W(t)\, f(x,t)\, dt \right) dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\partial_x \int_{-\infty}^{\infty} W(-t')\, g(x,t')\, dt' \right) \left(\partial_x \int_{-\infty}^{\infty} W(-t)\, f(x,t)\, dt \right) \right| dx \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \partial_x \int_{-\infty}^{\infty} W(-t')\, g(x,t')\, dt' \right|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \partial_x \int_{-\infty}^{\infty} W(-t)\, f(x,t)\, dt \right|^2 dx \right)^{1/2} \\
&= \left\| \partial_x \int_{-\infty}^{\infty} W(-t')\, g(x,t')\, dt' \right\|_{L_x^2} \left\| \partial_x \int_{-\infty}^{\infty} W(-t)\, f(x,t)\, dt \right\|_{L_x^2} \\
&\leq c\, \|g\|_{L_x^1 L_t^2} \|f\|_{L_x^1 L_t^2},
\end{aligned}$$

e assim, considerando o sup em ambos os membros da desigualdade acima, com $\|f\|_{L_x^1 L_t^2}$, temos a afirmação.

Agora, afirmamos que

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\tau} \left(\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,\tau)\, \hat{g}^{(t)}(y,\tau)\, dy \right) d\tau \right\|_{L_x^\infty L_t^2} \leq c\, \|g\|_{L_x^1 L_t^2},$$

onde $K(z,\tau) := \lim_{\epsilon \to 0} \displaystyle\int_{\epsilon < |\xi^3 - \tau| < \frac{1}{\epsilon}} e^{iz\xi} \frac{\xi^2}{\xi^3 - \tau} d\xi$ (veja [10]).
De fato, usando a identidade de Parserval, a desigualdade de Minkowsky, e o fato de

$K \in L^{\infty}(\mathbb{R}^2)$, temos

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\tau} \left(\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,\tau)\, \hat{g}^{(t)}(y,\tau)\, dy \right) d\tau \right\|_{L_x^{\infty} L_t^2}$$

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{it\tau} d\tau \right|^2 dt \right)^{1/2}$$

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)|^2\, d\tau \right)^{1/2}$$

$$\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| K(x-y,\tau)\, \hat{g}^{(t)}(y,\tau) \right|^2 d\tau \right)^{1/2} dy$$

$$\leq c \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(y,\tau)|^2\, d\tau \right)^{1/2} dy$$

$$= c\, \|g\|_{L_x^1 L_t^2}.$$

Com essa afirmação e utilizando as proposições 3.2 e 3.3 e o lema 3.4 de [10] concluímos a demonstração do item (ii). $\square$

2.3 Boa Colocação

O objetivo desta seção é demonstrar dois teoremas que tratam da boa colocação local com dado inicial pequeno para o problema de Cauchy (2.1). Eis o primeiro:

Teorema 2.1. *Seja $\phi \in H^s(\mathbb{R}) \cap H^3(\mathbb{R}; x^2 dx)$, com $s \geq 5$ inteiro. Então, existe $\eta > 0$ tal que, se*

$$\|\phi\|_5 + \|\phi\|_{3,2} < \eta,$$

o problema (2.1) com $p = 1$ tem uma única solução $u(\cdot)$ definida no intervalo $[0,T]$, onde $T = T\left(\|\phi\|_5 + \|\phi\|_{3,2}\right) > 0$ com $T(\theta) \to \infty$ quando $\theta \to 0$, satisfazendo

$$u \in C\left([0,T]; H^s(\mathbb{R}) \cap H^3\left(\mathbb{R}; x^2 dx\right)\right) \equiv Z_T^s$$

e

$$u \in \left\{ v : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R}; \partial_x^{s+1} v \in L^{\infty}\left(\mathbb{R}; L^2[0,T]\right) \right\} \equiv Y_T^s.$$

Além disso, qualquer que seja $T' \in (0,T)$, existe uma vizinhança V_ϕ de ϕ em $H^s(\mathbb{R}) \cap H^3(\mathbb{R}; x^2 dx)$, tal que a aplicação $\tilde{\phi} \to \tilde{u}(t)$ de V_ϕ em $Z_{T'}^s \cap Y_{T'}^s$ é Lipschitziana.

Demonstração. Faremos a demonstração do caso em que $s = 5$, o qual corresponde ao índice de Sobolev mais baixo. A demonstração para o caso geral é feita de maneira análoga e ficará a cargo do leitor. (veja a observação no fim da demonstração, a qual exibe as normas necessárias à obtenção da demonstração no caso $s \geq 6$).

Inicialmente, definiremos um espaço métrico completo conveniente, o qual será denotado por χ_T^a. Para $\phi \in H^5(\mathbb{R}) \cap H^3(\mathbb{R}; x^2dx)$ fixo, denotaremos por $Av = A_\phi(v)$ a solução do problema linear não homogêneo

$$\begin{cases} \partial_t u + \alpha\, \partial_x^3 u + \gamma\, (\partial_x v)^2 + \delta\, \partial_x^2 (v^2) = 0 \\ u(0) = \phi \end{cases}, \tag{2.10}$$

em sua versão integral, onde $v \in \chi_T^a$. A seguir, mostraremos que existem $\eta > 0$, $a > 0$ e $T = T\left(\|\phi\|_5 + \|\phi\|_{3,2}\right) > 0$, tais que se $\|\phi\|_5 + \|\phi\|_{3,2} < \eta$, então $v \in \chi_T^a$ implica $Av \in \chi_T^a$ e $A : \chi_T^a \to \chi_T^a$ é uma contração. Neste caso, o ponto fixo de A em χ_T^a é solução de (2.1) em sua versão integral.

Observação 2.1. *Como $\partial_x^2(v^2) = 2(v_x^2 + vv_{xx})$, reescrevemos a equação original em (2.1) na forma (2.10), para o caso $p = 1$. Tal opção foi feita apenas para simplificar a notação nas demonstrações seguintes.*

Agora, para $v : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R}$, definimos

$$\lambda_1^T(v) = \sup_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_5, \tag{2.11}$$

$$\lambda_2^T(v) = \sup_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_{3,2}, \tag{2.12}$$

$$\lambda_3^T(v) = (1+T)^{-2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sup_{t\in[0,T]} v^2(x,t)\, dx\right)^{1/2}, \tag{2.13}$$

$$\lambda_4^T(v) = (1+T)^{-2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sup_{t\in[0,T]} v_x^2(x,t)\, dx\right)^{1/2}, \tag{2.14}$$

$$\lambda_5^T(v) = (1+T)^{-2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sup_{t\in[0,T]} |v(x,t)|\, dx\right), \tag{2.15}$$

$$\lambda_6^T(v) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_0^T \left(\partial_x^5 v_x(x,t)\right)^2 dt\right)^{1/2}, \tag{2.16}$$

onde

$$H^3\left(\mathbb{R}; x^2dx\right) := \left\{\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ \|\phi\|_{3,2} := \sum_{j=0}^{3} \left\|x\partial_x^j\right\|_0 < \infty\right\} \tag{2.17}$$

e

$$\chi_T := \left\{ v : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R};\ \Lambda^T(v) := \max_{1\le j\le 6} \lambda_j^T(v) < \infty \right\}$$

Seja o espaço métrico completo dado por

$$\chi_T^a := \left\{ v \in \chi_T;\ \Lambda^T(v) \le a \right\}, \tag{2.18}$$

onde $d(u,v) := \Lambda^T(u-v)$.

Vamos demonstrar a seguir proposições que tratam das estimativas, em termos de $\Lambda^T(v)$, das partes homogênea e não homogênea de $u = Av$, na versão integral

$$u(t) = Av(t) = W(t)\phi - \int_0^t W(t-\tau)\left[\gamma v_x^2 + \delta\ \partial_x^2 v^2\right] d\tau. \tag{2.19}$$

Proposição 2.1.

$$(i) \qquad \left\| \int_0^t W(t-\tau)\, v_x^2 d\tau \right\|_0 \le cT \sup_{t\in[0,T]} \|v\|_2^2. \tag{2.20}$$

$$(ii) \qquad \left\| \int_0^t W(t-\tau)\, \partial_x^2 v^2 d\tau \right\|_0 \le cT \sup_{t\in[0,T]} \|v\|_2^2. \tag{2.21}$$

$$(iii) \qquad \left\| \partial_x^5 \int_0^t W(t-\tau)\, v_x^2 d\tau \right\|_0 \le cT\left[\lambda_1^T(v)\right]^2 + cT^{1/2}(1+T)^2 \lambda_4^T(v)\,\lambda_6^T(v) \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}(iv) \qquad \left\| \partial_x^5 \int_0^t W(t-\tau)\, \partial_x^2 v^2 d\tau \right\|_0 &\le cT\left[\lambda_1^T(v)\right]^2 + c(1+T)^2 \lambda_5^T(v)\,\lambda_6^T(v) \\ &+ cT^{1/2}(1+T)^2 \lambda_1^T(v)\,\lambda_4^T(v).\end{aligned} \tag{2.23}$$

Demonstração. (i): Utilizando as desigualdades de Minkowsky e de Hölder e o lema de imersão de Sobolev, temos que

$$
\begin{aligned}
\left\| \int_0^t W(t-\tau)\, v_x^2(x,\tau)\, d\tau \right\|_0 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^t W(t-\tau)\, v_x^2(x,\tau)\, d\tau \right|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\leq \int_0^T \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| W(t-\tau)\, v_x^2(x,\tau) \right|^2 dx \right)^{1/2} d\tau \\
&= \int_0^T \left\| W(t-\tau)\, v_x^2(x,\tau) \right\|_0 d\tau \\
&= \int_0^T \left\| v_x^2(x,\tau) \right\|_0 d\tau \\
&= \int_0^T \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(v_x^2(x,\tau) \right)^2 dx \right)^{1/2} d\tau \\
&\leq \left(\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} v_x^4(x,\tau)\, dx d\tau \right)^{1/2} \left(\int_0^T d\tau \right)^{1/2} \\
&\leq T^{1/2} \left[\int_0^T \sup_{x\in\mathbb{R}} v_x^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 dx \right) d\tau \right]^{1/2} \\
&\leq T^{1/2} \left[\left(\sup_{t\in[0,T]} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 dx \right) \left(\int_0^T \sup_x v_x^2 d\tau \right) \right]^{1/2} \\
&\leq T^{1/2} \left(\sup_{t\in[0,T]} \|v_x\|_0^2 \right)^{1/2} \left(\int_0^T \left\| v_x^2 \right\|_\infty^2 d\tau \right)^{1/2} \\
&\leq T \sup_{t\in[0,T]} \|v_x\|_0 \sup_{t\in[0,T]} \|v_x\|_\infty \\
&\leq cT \sup_{t\in[0,T]} \|v\|_2 \sup_{t\in[0,T]} \|v_x\|_0 \\
&\leq cT \sup_{t\in[0,T]} \|v\|_2^2,
\end{aligned}
$$

o que demonstra (i).

(ii): Combinando as desigualdades de Hölder e Minkowsky, obtemos

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^t W(t-\tau)\,\partial_x^2 v^2 d\tau\right\|_0 &\leq \int_0^T \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|W(t-\tau)\,\partial_x^2 v^2\right|^2 dx\right)^{1/2} d\tau \\
&= \int_0^T \left\|W(t-\tau)\,\partial_x^2 v^2\right\|_0 d\tau \\
&= \int_0^T \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\partial_x^2 v^2\right|^2 dx\right)^{1/2} dt \\
&\leq T^{1/2}\left(\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \left|\partial_x^2 v^2\right|^2 dxdt\right)^{1/2} \\
&\leq T \sup_{t\in[0,T]} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\partial_x^2 v^2\right|^2 dx\right)^{1/2} \\
&= T \sup_{t\in[0,T]} \left\|\partial_x^2 v^2\right\|_0 \\
&\leq cT \sup_{t\in[0,T]} \|v\|_2^2 .
\end{aligned}$$

(iii): Pelas desigualdades de Hölder e Minkowsky, temos

$$\begin{aligned}
\left\|\partial_x^5 \int_0^t W(t-\tau)\,v_x^2 d\tau\right\|_0 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\int_0^t W(t-\tau)\,\partial_x^5 v_x^2 d\tau\right|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\leq \int_0^T \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|W(t-\tau)\,\partial_x^5 v_x^2\right|^2 dx\right)^{1/2} d\tau \\
&= \int_0^T \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\partial_x^5 v_x^2\right|^2 dx\right)^{1/2} dt \\
&\leq T^{1/2}\left(\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \left(\partial_x^5 v_x^2\right)^2 dxdt\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Pela regra de Leibniz, temos

$$\partial_x^5 v_x^2 = 20\partial_x^3 v\ \partial_x^4 v + 10\partial_x^2 v\ \partial_x^5 v + 2\partial_x v\ \partial_x^6 v,$$

e isso mostra que

$$\left\|\partial_x^5 \int_0^t W(t-\tau)\,v_x^2 d\tau\right\|_0 \leq T^{1/2} \sum_{j=1}^{6} c_j \left(\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \left(\partial_x^j v\right)^2 \left(\partial_x^{7-j} v\right)^2 dxdt\right)^{1/2}. \quad (2.24)$$

Observe que na desigualdade (2.24), o termo que envolve a maior derivada de v é

$v_x\partial_x^6 v$ e pode ser estimado por

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(v_x)^2\left(\partial_x^6 v\right)^2 dxdt\right)^{1/2} &\le \left(\int_{-\infty}^{\infty}\sup_{t\in[0,T]}(v_x)^2\int_0^T\left(\partial_x^6 v\right)^2 dtdx\right)^{1/2}\\
&\le \left(\sup_{x\in\mathbb{R}}\int_0^T\left(\partial_x^6 v\right)^2 dt\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\sup_{t\in[0,T]} v_x^2 dx\right)^{1/2} \quad (2.25)\\
&= (1+T)^2\lambda_4^T(v)\,\lambda_6^T(v)\,.
\end{aligned}$$

Observe também que, utilizando a desigualdade de Hölder e o lema de imersão de Sobolev, o termo que envolve $\partial_x^2 v\partial_x^5 v$ pode ser estimado por

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\left(\partial_x^2 v\right)^2\left(\partial_x^5 v\right)^2 dxdt\right)^{1/2} &\le \left(\int_0^T\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\partial_x^2 v\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\left(\partial_x^5 v\right)^2 dxdt\right)^{1/2}\\
&= \left(\int_0^T\left\|\partial_x^2 v\right\|_{\infty}^2\left\|\partial_x^5 v\right\|_0^2 dt\right)^{1/2}\\
&\le T^{1/2}\sup_{t\in[0,T]}\left\|\partial_x^2 v\right\|_{\infty}\left\|\partial_x^5 v\right\|_0\\
&\le cT^{1/2}\sup_{t\in[0,T]}\left\|\partial_x^2 v\right\|_1\sup_{t\in[0,T]}\left\|\partial_x^5 v\right\|_0\\
&\le cT^{1/2}\sup_{t\in[0,T]}\left(\left\|\partial_x^2 v\right\|_0+\left\|\partial_x^3 v\right\|_0\right)\left\|\partial_x^5 v\right\|_0\\
&\le cT^{1/2}\left(\lambda_1^T(v)\right)^2.
\end{aligned}$$

Analogamente, os demais termos podem ser estimados, usando a desigualdade de Hölder e o lema de imersão de Sobolev, por $cT^{1/2}\left(\lambda_1^T(v)\right)^2$. Utilizando este fato, bem como as estimativas (2.24) e (2.25), concluímos a demonstração de (iii).

(iv): Pela regra de Leibniz, temos que

$$\partial_x^6\left(v^2\right)=c_1\left(\partial_x^3 v\right)^2+c_2\partial_x^2 v\partial_x^4 v+c_3\partial_x v\partial_x^5 v+c_4 v\partial_x^6 v,$$

e assim,

$$\begin{aligned}
\left\|\partial_x^5\int_0^t W(t-\tau)\,\partial_x^2 v^2 d\tau\right\|_0 &= \left\|\partial_x\int_0^t W(t-\tau)\,\partial_x^6 v^2 d\tau\right\|_0\\
&\le \sum_{j=0}^{6} c_j\left\|\partial_x\int_0^t W(t-\tau)\,\partial_x^j v\partial_x^{6-j} v d\tau\right\|_0. \quad (2.26)
\end{aligned}$$

Analisando a parcela correspondente a $j=2$ em (2.26), vemos que podemos estimá-la, usando as desigualdades de Hölder e de Minkowsky, e a proposição 1.1 item (a), da seguinte maneira

$$
\begin{aligned}
\left\| \int_0^t W(t-\tau)\,\partial_x\left(\partial_x^2 v \partial_x^4 v\right) d\tau \right\|_0 &\leq \int_0^T \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| W(t-\tau)\,\partial_x\left(\partial_x^2 v \partial_x^4 v\right)\right|^2 dx \right)^{1/2} dt \\
&\leq T \sup_{t\in[0,T]} \left\| \partial_x\left(\partial_x^2 v \partial_x^4 v\right) \right\|_0 \\
&\leq T \sup_{t\in[0,T]} \left\| \partial_x^2 v \partial_x^4 v \right\|_1 \\
&\leq cT \sup_{t\in[0,T]} \left\| v(t) \right\|_5^2 \\
&= cT \left(\lambda_1^T(v)\right)^2 .
\end{aligned}
$$

Procedendo da mesma forma para $j = 3$ e $j = 4$, podemos obter estimativa similar, ou seja,

$$
\left\| \int_0^t W(t-\tau)\left[\partial_x^{j+1} v \partial_x^{6-j} v + \partial_x^j v \partial_x^{7-j} v\right] d\tau \right\|_0 \leq cT \left[\lambda_1^T(v)\right]^2 , \tag{2.27}
$$

para $j = 2, 3$ e 4. Podemos estimar o termo associado a $j = 0, 6$ combinando o efeito regularizante (2.7) e as normas (2.15) e (2.16). De fato,

$$
\begin{aligned}
\left\| \partial_x \int_0^t W(t-\tau)\, v \partial_x^6 v d\tau \right\|_0 &\leq c \left\| v \partial_x^6 v \right\|_{L_x^1 L_T^2} \\
&= c \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^T v^2 \left(\partial_x^6 v\right)^2 dt \right)^{1/2} dx \\
&\leq c \int_{-\infty}^{\infty} \sup_{t\in[0,T]} |v| \left(\int_0^T \left(\partial_x^6 v\right)^2 dt \right)^{1/2} dx \\
&\leq c \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_0^T \left(\partial_x^6 v\right)^2 dt \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \sup_{t\in[0,T]} |v|\, dx \\
&= c\,(1+T)^2\, \lambda_5^T(v)\, \lambda_6^T(v) .
\end{aligned} \tag{2.28}
$$

Para finalizar a demonstração, fazendo uso de (2.7), (2.14), da desigualdade de Hölder e do Teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned}
\left\| \partial_x \int_0^t W(t-\tau) v_x \partial_x^5 v d\tau \right\|_0 &\leq c \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^T v_x^2 \left(\partial_x^5 v\right)^2 d\tau \right)^{1/2} dx \\
&\leq c \int_{-\infty}^{\infty} \sup_{t\in[0,T]} |v_x| \left(\int_0^T \left(\partial_x^5 v\right)^2 d\tau \right)^{1/2} dx \\
&\leq c \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sup_{t\in[0,T]} (v_x)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T \left(\partial_x^5 v\right)^2 d\tau dx \right)^{1/2} \\
&= c \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sup_{t\in[0,T]} (v_x)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^T \left\|\partial_x^5 v\right\|_0^2 dt \right)^{1/2} \\
&\leq cT^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sup_{t\in[0,T]} (v_x)^2 dx \right)^{1/2} \sup_{t\in[0,T]} \left\|\partial_x^5 v\right\|_0 \\
&\leq cT^{1/2} (1+T)^2 \lambda_4^T(v) \lambda_1^T(v),
\end{aligned} \tag{2.29}$$

e dessa forma, o resultado segue das estimativas (2.26)-(2.29). □

Proposição 2.2.

$$(i) \quad \left\| \int_0^t W(t-\tau) v_x^2 d\tau \right\|_{L_x^2 L_T^\infty} \leq cT(1+T)^2 \sup_{t\in[0,T]} \|v\|_2^2 . \tag{2.30}$$

$$(ii) \quad \left\| \int_0^t W(t-\tau) \partial_x^2 v^2 d\tau \right\|_{L_x^2 L_T^\infty} \leq cT(1+T)^2 \sup_{t\in[0,T]} \|v\|_3^2 . \tag{2.31}$$

$$(iii) \quad \left\| \partial_x \int_0^t W(t-\tau) v_x^2 d\tau \right\|_{L_x^2 L_T^\infty} \leq cT(1+T)^2 \sup_{t\in[0,T]} \|v\|_3^2 . \tag{2.32}$$

$$(iv) \quad \left\| \partial_x \int_0^t W(t-\tau) \partial_x^2 v^2 d\tau \right\|_{L_x^2 L_T^\infty} \leq cT(1+T)^2 \sup_{t\in[0,T]} \|v\|_4^2 . \tag{2.33}$$

Demonstração. (i): Observe que

$$\int_0^t W(t-\tau) v_x^2 d\tau = \int_0^t W(t) W(-\tau) v_x^2 d\tau = W(t) \int_0^t W(-\tau) v_x^2 d\tau.$$

Portanto, aplicando a estimativa (2.6) com $r=1$ e $\rho=2$, temos que

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^t W(t-\tau)\, v_x^2 d\tau\right\|_{L_x^2 L_T^\infty} &\le c\,(1+T)^2 \left\|\int_0^t W(-\tau)\, v_x^2 d\tau\right\|_1 \\
&\le c\,(1+T)^2 \left(\left\|\int_0^t W(-\tau)\, v_x^2 d\tau\right\|_0 + \left\|\partial_x \int_0^t W(-\tau)\, v_x^2 d\tau\right\|_0\right) \\
&\le c\,(1+T)^2 \left(\int_0^T \left\|v_x^2\right\|_0 d\tau + \int_0^T \left\|\partial_x v_x^2\right\|_0 d\tau\right) \\
&\le c\,(1+T)^2 \int_0^T \left\|v_x^2\right\|_1 d\tau \\
&\le cT\,(1+T)^2 \sup_{t\in[0,T]} \|v\|_2^2,
\end{aligned}$$

e com isso, encerramos a demonstração de (i).

(ii):

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^t W(t-\tau)\, \partial_x^2 v^2 d\tau\right\|_{L_x^2 L_T^\infty} &\le c\,(1+T)^2 \left\|\int_0^t W(-\tau)\, \partial_x^2 v^2 d\tau\right\|_1 \\
&\le c\,(1+T)^2 \int_0^T \left\|\partial_x^2 v^2\right\|_1 d\tau \\
&\le cT\,(1+T)^2 \sup_{t\in[0,T]} \left\|\partial_x^2 v^2\right\|_1 \\
&\le cT\,(1+T)^2 \sup_{t\in[0,T]} \|v\|_3^2 .
\end{aligned}$$

Analogamente, demonstra-se (iii) e (iv). □

Proposição 2.3.

$$(i)\ \|W(t)\,\phi\|_{L_x^1 L_T^\infty} \le c\,(1+T)^2 \left(\|\phi\|_5 + \|\phi\|_{3,2}\right). \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}
(ii) \left\|\int_0^t W(t-\tau)\, v_x^2 d\tau\right\|_{L_x^1 L_T^\infty} &\le c\,(1+T)^2 \big(T\left[\lambda_1^T(v)\right]^2 + T^{3/2}(1+T)^2 \lambda_4^T(v)\,\lambda_1^T(v) \\
&\quad + T^{1/2}(1+T)^2 \lambda_4^T(v)\,\lambda_1^T(v) + T\lambda_1^T(v)\,\lambda_2^T(v) \\
&\quad + T^2\left[\lambda_1^T(v)\right]^2\big).
\end{aligned} \tag{2.35}$$

$$(iii) \left\| \int_0^t W(t-\tau)\,\partial_x^2 v^2 d\tau \right\|_{L_x^1 L_T^\infty} \leq c\,(1+T)^2 \Big(T\lambda_1^T(v)\,\lambda_2^T(v) + T^2 \left[\lambda_1^T(v)\right]^2$$
$$+ T\left[\lambda_1^T(v)\right]^2 + T^{3/2}(1+T)^2\lambda_4^T(v)\,\lambda_6^T(v)$$
$$+ T^{3/2}(1+T)^2\lambda_3^T(v)\,\lambda_6^T(v) + (1+T)^2\lambda_5^T(v)\,\lambda_6^T(v)$$
$$+ T^{1/2}(1+T)^2\lambda_4^T(v)\,\lambda_1^T(v) + T(1+T)^2\lambda_3^T(v)\,\lambda_6^T(v)\Big). \tag{2.36}$$

Demonstração. (i): Observe que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sup_{t\in[0,T]} |W(t)\phi|\,dx \leq \frac{1}{T}\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} |W(t)\phi|\,dxdt + c\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} |W(t)\phi'''|\,dxdt. \tag{2.37}$$

De fato, pelo Teorema do Valor Médio para integrais, existe $t_0 \in (0,T)$, tal que $W(t_0)\phi = \frac{1}{T}\int_0^T W(t)\phi\ dt$. Além disso, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$W(t)\phi = W(t_0)\phi + \int_{t_0}^t \partial_\tau W(\tau)\phi\ d\tau.$$

Logo

$$\begin{aligned} |W(t)\phi| &\leq \left|\frac{1}{T}\int_0^T W(\tau)\phi\ d\tau\right| + \left|\int_{t_0}^t \partial_\tau W(\tau)\phi\ d\tau\right| \\ &\leq \frac{1}{T}\int_0^T |W(\tau)\phi|\,d\tau + \int_{t_0}^t |\partial_\tau W(\tau)\phi|\,d\tau. \end{aligned}$$

Aplicando o sup com relação a t em ambos os membros da desigualdade anterior, obtemos

$$\sup_{t\in[0,T]} |W(t)\phi| \leq \frac{1}{T}\int_0^T |W(\tau)\phi|\,d\tau + \int_0^T |\partial_\tau W(\tau)\phi|\,d\tau.$$

Portanto, integrando, usando o Teorema de Fubini e o fato de que $W(t)\phi$ é solução do problema linear associado a (2.10), obtemos (2.37).

Para estimar os dois termos à direita de (2.37), usamos a desigualdade presente no lema 1.1 seção 1.3. Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \sup_{t\in[0,T]} |W(t)\phi|\,dx &\leq \frac{1}{T}\int_0^T \|\phi\|_0\,dt + \frac{1}{T}\int_0^T \|xW(t)\phi\|_0\,dt \\ &\quad + c\int_0^T \|\phi'''\|_0\,dt + c\int_0^T \|xW(t)\phi'''\|_0\,dt \\ &= \|\phi\|_0 + cT\|\phi'''\|_0 + \frac{1}{T}\int_0^T \|xW(t)\phi\|_0\,dt \\ &\quad + c\int_0^T \|xW(t)\phi'''\|_0\,dt. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Mostremos agora que o operador $L=\partial_t+\alpha\partial_x^3$ comuta com $\Gamma(x,t)=x-3\alpha t\partial_x^2$. De fato:

$$\begin{aligned}(L\circ\Gamma)f&=\left(\partial_t+\alpha\partial_x^3\right)\left(xf-3\alpha t\partial_x^2 f\right)\\&=\partial_t(xf)-3\alpha\partial_t\left(t\partial_x^2 f\right)+\alpha\partial_x^3(xf)-3\alpha^2 t\partial_x^5 f\\&=x\partial_t f-3\alpha\left(\partial_x^2 f+t\partial_t\partial_x^2 f\right)+\alpha\left(3\partial_x^2 f+x\partial_x^3 f\right)-3\alpha^2 t\partial_x^5 f\\&=x\partial_t f-3\alpha\partial_x^2 f-3\alpha t\partial_t\partial_x^2 f+3\alpha\partial_x^2 f+\alpha x\partial_x^3 f-3\alpha^2 t\partial_x^5 f\\&=x\partial_t f-3\alpha t\partial_x^2\partial_t f+\alpha x\partial_x^3 f-3\alpha^2 t\partial_x^5 f\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(\Gamma\circ L)&=\Gamma\left(\partial_t f+\alpha\partial_x^3 f\right)\\&=x\partial_t f+\alpha x\partial_x^3 f-3\alpha t\partial_x^2\partial_t f-3\alpha^2 t\partial_x^5 f.\end{aligned}$$

Dessa forma, $L\circ\Gamma=\Gamma\circ L$, ou seja, L comuta com Γ.

Logo, como $W(t)\phi$ é solução do problema linear associado à (2.10), $L(\Gamma W(t)\phi)=\Gamma(LW(t)\phi)=0$, isto é, $\Gamma W(t)\phi$ é solução do problema linear associado à (2.10) com dado inicial $x\phi$. Portanto, $\Gamma W(t)\phi=W(t)x\phi$, ou seja, temos as igualdades

$$xW(t)\phi=W(t)x\phi+3\alpha tW(t)(\phi'') \tag{2.39}$$

e

$$xW(t)\phi'''=W(t)x\phi'''+3\alpha tW(t)\phi^{(v)}. \tag{2.40}$$

Utilizando (2.39) e (2.40) em (2.38), temos que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\sup_{t\in[0,T]}|W(t)\phi|\,dx&\leq\|\phi\|_0+cT\|\phi'''\|_0+\frac{1}{T}\int_0^T\|x\phi\|_0\,dt+c\int_0^T t\|\phi''\|_0\,dt\\&\quad+c\int_0^T\|x\phi'''\|_0\,dt+c\int_0^T t\left\|\phi^{(v)}\right\|_0 dt\\&=\|\phi\|_0+cT\|\phi'''\|_0+\|x\phi\|_0+cT^2\|\phi''\|_0+cT\|x\phi'''\|_0+cT^2\left\|\phi^{(v)}\right\|_0\\&\leq c(1+T)^2\left(\|\phi\|_5+\|\phi\|_{3,2}\right),\end{aligned}$$

e daí concluímos a demonstração de (i).

(ii): Na demonstração de (ii), utilizamos a seguinte igualdade

$$\left\|\int_0^t W(t-\tau)v_x^2 d\tau\right\|_{L_x^1L_t^\infty}=\left\|W(t)\int_0^t W(-\tau)v_x^2 d\tau\right\|_{L_x^1L_t^\infty}$$

e usamos a estimativa linear (2.34), para obter

$$
\begin{aligned}
&\left\|\int_0^t W(t-\tau)\, v_x^2 d\tau\right\|_{L_x^1 L_t^\infty} \\
&\leq c(1+T)^2\left[\left\|\int_0^t W(-\tau)\, v_x^2 d\tau\right\|_5+\left\|\int_0^t W(-\tau)\, v_x^2 d\tau\right\|_{3,2}\right].
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

Estimamos o primeiro termo de (2.41) da seguinte maneira

$$
\begin{aligned}
\left\|\int_0^t W(-\tau)\, v_x^2 d\tau\right\|_5 &= \left\|\int_0^t W(-\tau)\, v_x^2 d\tau\right\|_0+\left\|\partial_x^5\int_0^t W(-\tau)\, v_x^2 d\tau\right\|_0 \\
&\leq \int_0^T \left\|v_x^2\right\|_0 d\tau+\sum_{j=0}^{4} c_j\left\|\partial_x\int_0^t W(-\tau)\,\partial_x^{j+1}v\partial_x^{5-j}v d\tau\right\|_0 \\
&\leq T\sup_{t\in[0,T]}\|v\|_1^2+\sum_{j=1}^{3}\left\|\partial_x\int_0^t W(-\tau)\,\partial_x^{j+1}v\partial_x^{5-j}v d\tau\right\|_0 \\
&+c\left\|W(t)\,\partial_x\int_0^t W(-\tau)\, v_x\partial_x^5 v d\tau\right\|_0 \\
&\leq T\sup_{t\in[0,T]}\|v\|_1^2+T^{1/2}\sum_{j=1}^{3} c_j(\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\left|\partial_x^{j+2}v\right|^2\left|\partial_x^{5-j}v\right|^2 \\
&+\left|\partial_x^{j+1}v\right|^2\left|\partial_x^{6-j}v\right|^2 dx d\tau)^{1/2} \\
&+c\left\|\partial_x\int_0^t W(t-\tau)\, v_x\partial_x^5 v d\tau\right\|_0 .
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

Note que que na segunda desigualdade acima fizemos o uso do seguinte resultado sobre interpolação:

$$
\left\|f^2\right\|_0=\|f\|_{L^4}^2\leq\left(\|f\|_{L^2}^{3/4}\|\nabla f\|_{L^2}^{1/4}\right)^2 .
$$

Utilizando o efeito regularizante (2.7), o Teorema de Fubini e a desigualdade de Hölder, podemos estimar o último termo de (2.42) como segue

$$\begin{aligned}
\left\|\partial_x \int_0^t W(t-\tau)\, v_x \partial_x^5 v d\tau\right\|_0 &\leq \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T \left|v_x \partial_x^5 v\right|^2 d\tau\right)^{1/2} dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sup_{t\in[0,T]} |v_x|^2 \int_0^T \left|\partial_x^5 v\right|^2 d\tau\right)^{1/2} dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \sup_{t\in[0,T]} |v_x| \left(\int_0^T \left|\partial_x^5 v\right|^2 d\tau\right)^{1/2} dx \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sup_{t\in[0,T]} |v_x|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^T \left|\partial_x^5 v\right|^2 d\tau dx\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sup_{t\in[0,T]} |v_x|^2 dx\right)^{1/2} T^{1/2} \sup_{t\in[0,T]} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\partial_x^5 v\right|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\leq T^{1/2}(1+T)^2 \lambda_4^T(v)\, \lambda_1^T(v).
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Logo, segue de (2.42) e (2.43) que

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^t W(-\tau)\, v_x^2 d\tau\right\|_5 \leq T \sup_{t\in[0,T]} \|v\|_1^2 + T^{1/2} \sum_{j=1}^{3} c_j (\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \left|\partial_x^{j+2} v\right|^2 \left|\partial_x^{5-j} v\right|^2 \\
+ \left|\partial_x^{j+1} v\right|^2 \left|\partial_x^{6-j} v\right|^2 dx d\tau)^{1/2} + cT^{1/2}(1+T)^2 \lambda_4^T(v)\, \lambda_1^T(v).
\end{aligned}$$

Observe que, para $j=1$, usando a desigualdade de Hölder e o lema de imersão de Sobolev, temos que

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \left|\partial_x^3 v\right|^2 \left|\partial_x^4 v\right|^2 + \left|\partial_x^2 v\right|^2 \left|\partial_x^5 v\right|^2 dx d\tau\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_0^T \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\partial_x^3 v\right|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left|\partial_x^4 v\right|^2 dx d\tau\right)^{1/2} + \left(\int_0^T \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\partial_x^2 v\right|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left|\partial_x^5 v\right|^2 dx d\tau\right)^{1/2} \\
&\leq \left[\sup_{t\in[0,T]} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\partial_x^4 v\right|^2 dx \int_0^T \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\partial_x^3 v\right|^2 d\tau\right]^{1/2} + \left[\sup_{t\in[0,T]} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\partial_x^5 v\right|^2 dx \int_0^T \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\partial_x^2 v\right|^2 d\tau\right]^{1/2} \\
&\leq T^{1/2} \sup_{t\in[0,T]} \left\|\partial_x^4 v\right\|_0 \sup_{t\in[0,T]} \left\|\partial_x^3 v\right\|_\infty + T^{1/2} \sup_{t\in[0,T]} \left\|\partial_x^5 v\right\|_0 \sup_{t\in[0,T]} \left\|\partial_x^2 v\right\|_\infty \\
&\leq cT^{1/2}\left[\lambda_1^T(v)\right]^2.
\end{aligned}$$

Analogamente, para $j=2,3$, podemos obter estimativa semelhante, ou seja,

$$\sum_{j=1}^{3} c_j (\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \left|\partial_x^{j+2} v\right|^2 \left|\partial_x^{5-j} v\right|^2 + \left|\partial_x^{j+1} v\right|^2 \left|\partial_x^{6-j} v\right|^2 dx d\tau)^{1/2} \leq cT\left[\lambda_1^T(v)\right]^2.$$

Logo,

$$\left\| \int_0^t W(-\tau)\, v_x^2 d\tau \right\|_5 \leq T \sup_{t\in[0,T]} \|v\|_1^2 + cT\left[\lambda_1^T(v)\right]^2 + cT^{1/2}(1+T)^2 \lambda_4^T(v)\,\lambda_1^T(v)\,. \tag{2.44}$$

Para estimar o segundo termo de (2.41), combinamos a definição (2.17) e a igualdade (2.39). Assim

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t W(-\tau)\, v_x^2 d\tau \right\|_{3,2} &= \sum_{j=0}^{3} \left\| W(t)\, x \int_0^t W(-\tau)\, \partial_x^j v_x^2 d\tau \right\|_0 \\
&\leq \sum_{j=0}^{3} \left\| xW(t) \int_0^t W(-\tau)\, \partial_x^j v_x^2 d\tau \right\|_0 \\
&+ 3\,|\alpha| \sum_{j=0}^{3} \left\| tW(t) \int_0^t W(-\tau)\, \partial_x^{j+2} v_x^2 d\tau \right\|_0 \\
&\leq \sum_{j=0}^{3} \left[\int_0^T \left\| x\partial_x^j v_x^2 \right\|_0 d\tau + 3\,|\alpha| \left\| \int_0^t \tau W(-\tau)\, \partial_x^{j+2} v_x^2 d\tau \right\|_0 \right].
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Observe que, podemos estimar o termo referente à $j=0$ em (2.45), da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left\| x v_x^2 \right\|_0 d\tau + 3\,|\alpha| \left\| \int_0^t \tau W(-\tau)\, \partial_x^2 v_x^2 d\tau \right\|_0 &\leq cT \sup_{t\in[0,T]} \|xv_x\|_1 \sup_{t\in[0,T]} \|v_x\|_1 \\
&+ 3\,|\alpha| \int_0^T \left\| \tau \partial_x^2 v_x^2 \right\|_0 d\tau \\
&\leq cT\lambda_1^T(v) \sup_{t\in[0,T]} \|v\|_{2,2} \\
&+ c\,|\alpha|\, T^2 \sup_{t\in[0,T]} \left\| \partial_x^2 v_x^2 \right\|_0 \\
&\leq cT\lambda_1^T(v) \sup_{t\in[0,T]} \|v\|_{2,2} \\
&+ c\,|\alpha|\, T^2 \left[\lambda_1^T(v)\right]^2 .
\end{aligned}$$

Analogamente, usando as desigualdades de Hölder, Minkowsky, e o lema de imersão de Sobolev, podemos estimar todos os termos de (2.45), exceto o termo correspondente a $j=3$, da seguinte forma

$$\left\| \int_0^t W(-\tau)\, v_x^2\; d\tau \right\|_{3,2} \leq cT\lambda_1^T(v) \sup_{t\in[0,T]} \|v\|_{2,2} + c\,|\alpha|\, T^2 \left[\lambda_1^T(v)\right]^2 + 3\,|\alpha| \left\| \partial_x^5 \int_0^t \tau W(-\tau)\, v_x^2\; d\tau \right\|_0 . \tag{2.46}$$

Para finalizar a demonstração de (ii), usamos o mesmo raciocínio empregado em (2.42) e (2.43) ao último termo de (2.46). Portanto,

$$\left\| \int_0^t W(-\tau)\, v_x^2\, d\tau \right\|_{3,2} \leq cT\lambda_1^T(v)\,\lambda_2^T(v) + cT^2\left[\lambda_1^T(v)\right]^2 + cT^{3/2}(1+T)^2\lambda_4^T(v)\,\lambda_1^T(v), \tag{2.47}$$

e assim, de (2.41), (2.44) e (2.47), concluímos a verificação de (ii).

(iii): Comecemos aplicando (2.34) ao lado esquerdo de (2.36). Então

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^t W(t-\tau)\,\partial_x^2 v^2 d\tau \right\|_{L_x^1 L_T^\infty} \\
&\leq c(1+T)^2\left[\left\| \int_0^t W(-\tau)\,\partial_x^2 v^2 d\tau \right\|_5 + \left\| \int_0^t W(-\tau)\,\partial_x^2 v^2 d\tau \right\|_{3,2} \right] \\
&\leq c(1+T)^2\left[\left\| \int_0^t W(-\tau)\,\partial_x^2 v^2 d\tau \right\|_0 + \left\| \partial_x^5 \int_0^t W(-\tau)\,\partial_x^2 v^2 d\tau \right\|_0 \right. \\
&\left. + \left\| \int_0^t W(-\tau)\,\partial_x^2 v^2 d\tau \right\|_{3,2} \right].
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Estimemos então cada termo de (2.48).

Utilizando as desigualdades de Minkowsky e Hölder, o primeiro termo pode ser estimado por

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t W(-\tau)\,\partial_x^2 v^2 d\tau \right\|_0 &\leq \int_0^T \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\partial_x^2 v^2\right|^2 dx \right)^{1/2} d\tau \\
&\leq T^{1/2}\left(\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \left|\partial_x^2 v^2\right|^2 dx dt \right)^{1/2} \\
&\leq T \sup_{t\in[0,T]} \left\|\partial_x^2 v^2\right\|_0 \\
&\leq cT \sup_{t\in[0,T]} \|v\|_2^2 .
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Aplicamos ao segundo termo de (2.48) a regra de Leibniz. Então

$$\begin{aligned}
\left\| \partial_x^5 \int_0^t W(-\tau)\,\partial_x^2 v^2 d\tau \right\|_0 &= \left\| \partial_x^5 \int_0^t W(t-\tau)\,\partial_x^2 v^2 d\tau \right\|_0 \\
&= \left\| \partial_x \int_0^t W(t-\tau)\,\partial_x^6 v^2 d\tau \right\|_0 \\
&\leq \sum_{j=0}^{6} c_j \left\| \partial_x \int_0^t W(t-\tau)\,\partial_x^j v \partial_x^{6-j} v d\tau \right\|_0 .
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Para $j = 2, 3, 4$, usamos as desigualdades de Hölder e Minkowsky e o lema de imersão de Sobolev e chegamos à estimativa

$$\left\| \int_0^t W(t-\tau)\left(\partial_x^{j+1} v \partial_x^{6-j} v + \partial_x^j v \partial_x^{7-j} v\right) d\tau \right\|_0 \leq T\left[\lambda_1^T(v)\right]^2. \tag{2.51}$$

Note que (2.51) foi essencialmente estimado em (2.44). Quando $j = 0, 1$ (analogamente $j = 5, 6$), utilizamos o efeito regularizante (2.7), e obtemos

$$\begin{aligned}
\left\| \partial_x \int_0^t W(t-\tau)\, \partial_x^j v \partial_x^{6-j} v d\tau \right\|_0 &\leq c \left\| \partial_x^j v \partial_x^{6-j} v \right\|_{L_x^1 L_T^2} \\
&= c \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^T \left| \partial_x^j v \partial_x^{6-j} v \right|^2 dt \right)^{1/2} dx \\
&\leq c \int_{-\infty}^{\infty} \sup_{t\in[0,T]} \left| \partial_x^j v \right| \left(\int_0^T \left| \partial_x^{6-j} v \right|^2 dt \right)^{1/2} dx.
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Observe que, se $j = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\left\| \partial_x \int_0^t W(t-\tau)\, v \partial_x^6 v d\tau \right\|_0 &\leq c \int_{-\infty}^{\infty} \sup_{t\in[0,T]} |v| \left(\int_0^T \left| \partial_x^6 v \right|^2 dt \right)^{1/2} dx \\
&\leq c \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \int_0^T \left| \partial_x^6 v \right|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sup_{t\in[0,T]} |v|\, dx \right) \\
&= c(1+T)^2 \lambda_5^T(v)\, \lambda_6^T(v),
\end{aligned} \tag{2.53}$$

e para $j = 1$, usando a desigualdade de Hölder e o Teorema de Fubini em (2.52), segue que

$$\begin{aligned}
\left\| \partial_x \int_0^t W(t-\tau)\, v_x \partial_x^5 v d\tau \right\|_0 &\leq c \int_{-\infty}^{\infty} \sup_{t\in[0,T]} |v_x| \left(\int_0^T \left| \partial_x^5 v \right|^2 dt \right)^{1/2} dx \\
&\leq c \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sup_{t\in[0,T]} |v_x|^2 \right)^{1/2} \left(\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \left| \partial_x^5 v \right|^2 dx dt \right)^{1/2} \\
&\leq c T^{1/2} (1+T)^2 \lambda_4^T(v)\, \lambda_1^T(v).
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Note que (2.54) foi estimado com detalhes em (2.43).

Falta apenas estimar o último termo de (2.48). Começamos empregando a definição de $\|\cdot\|_{3,2}$, juntamente com a igualdade (2.39), para obter

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^t W(-\tau)\,\partial_x^2 v^2 d\tau\right\|_{3,2} &= \sum_{j=0}^{3}\left\|x\partial_x^j \int_0^t W(-\tau)\,\partial_x^2 v^2 d\tau\right\|_0 \\
&= \sum_{j=0}^{3}\left\|xW(t)\int_0^t W(-\tau)\,\partial_x^{j+2} v^2 d\tau\right\|_0 \\
&\leq \sum_{j=0}^{3}\left\|\int_0^t W(-\tau)\,x\partial_x^{j+2} v^2 d\tau\right\|_0 + c\left\|\int_0^t \tau W(-\tau)\,\partial_x^{j+4} v^2 d\tau\right\|_0 .
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Note que, utilizando as desigualdades de Minkowsky e de Hölder, bem como o lema de imersão de Sobolev, obtemos a sequência de estimativas para cada termo de (2.55)

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_0^t W(-\tau)\,x\partial_x^2 v^2 d\tau\right\|_0 \\
&= \left\|\int_0^t W(-\tau)\,2\left(xv_x^2 + xvv_{xx}\right) d\tau\right\|_0 \\
&\leq \int_0^T \left\|2\left(xv_x^2\right)\right\|_0 dt + \int_0^T \left\|2xvv_{xx}\right\|_0 dt \\
&\leq 2T^{1/2}\left(\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\left|xv_x^2\right|^2 dxdt\right)^{1/2} + 2T^{1/2}\left(\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\left|xvv_{xx}\right|^2 dxdt\right)^{1/2} \\
&\leq 2T^{1/2}\left(\int_0^T \left\|x^2v_x^4\right\|_1 dt\right)^{1/2} + 2T^{1/2}\left(\int_0^T \left\|x^2v^2v_{xx}^2\right\|_1 dt\right)^{1/2} \\
&\leq 2T^{1/2}\left(\int_0^T \left\|x^2v_x^2\right\|_1\left\|v_x^2\right\|_1 dt\right)^{1/2} + 2T^{1/2}\left(\int_0^T \left\|x^2v^2\right\|_1\left\|v_{xx}^2\right\|_1 dt\right)^{1/2} \\
&\leq 2T^{1/2}\sup_{t\in[0,T]}\left\|v_x\right\|_1\left(\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\left|xv_x\right|^2 dxdt\right)^{1/2} \\
&+ 2T^{1/2}\sup_{t\in[0,T]}\left\|v_{xx}\right\|_1\left(\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\left|xv\right|^2 dxdt\right)^{1/2} \\
&\leq 2T\sup_{t\in[0,T]}\left\|v_x\right\|_1\sup_{t\in[0,T]}\left\|xv_x\right\|_0 + 2T\sup_{t\in[0,T]}\left\|v_{xx}\right\|_1\sup_{t\in[0,T]}\left\|xv\right\|_0 \\
&\leq 4T\sup_{t\in[0,T]}\left\|v\right\|_3\sup_{t\in[0,T]}\left\|v\right\|_{1,2},
\end{aligned} \tag{2.56}$$

$$
\begin{aligned}
&\left\|\int_0^t W(-\tau)\, x\partial_x^3 v^2 d\tau\right\|_0 \\
&\le \int_0^T \|c\,(xv_x v_{xx})\|_0\, dt + \int_0^T \|c\,(xvv_{xxx})\|_0\, dt \\
&\le cT^{1/2}\left(\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty} |xv_x v_{xx}|^2\, dxdt\right)^{1/2} + cT^{1/2}\left(\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty} |xvv_{xxx}|^2\, dxdt\right)^{1/2} \\
&\le cT^{1/2}\left(\int_0^T \left\|x^2 v_x^2\right\|_1 \left\|v_{xx}^2\right\|_1 dt\right)^{1/2} + cT^{1/2}\left(\int_0^T \left\|x^2 v^2\right\|_1 \left\|v_{xx}^2\right\|_1 dt\right)^{1/2} \\
&\le cT^{1/2}\sup_{t\in[0,T]}\|v_{xx}\|_1\left(\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty} |xv_x|^2\, dxdt\right)^{1/2} \\
&+ cT^{1/2}\sup_{t\in[0,T]}\|v_{xx}\|_1\left(\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty} |xv|^2\, dxdt\right)^{1/2} \\
&\le cT\sup_{t\in[0,T]}\|v_{xx}\|_1\sup_{t\in[0,T]}\|xv_x\|_0 + cT\sup_{t\in[0,T]}\|v_{xx}\|_1\sup_{t\in[0,T]}\|xv\|_0 \\
&\le cT\sup_{t\in[0,T]}\|v\|_4\sup_{t\in[0,T]}\|v\|_{1,2}\,,
\end{aligned} \tag{2.57}
$$

$$
\left\|\int_0^t W(-\tau)\, x\partial_x^4 v^2 d\tau\right\|_0 \le cT\sup_{t\in[0,T]}\|v\|_5\sup_{t\in[0,T]}\|v\|_{2,2}\,, \tag{2.58}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\|\int_0^t \tau W(-\tau)\, x\partial_x^4 v^2 d\tau\right\|_0 &\le \int_0^T t\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\partial_x^4 v^2\right|^2 dx\right)^{1/2} dt \\
&\le cT^2\sup_{t\in[0,T]}\left\|\partial_x^4 v^2\right\|_0 \\
&\le cT^2\sup_{t\in[0,T]}\|v\|_4^2\,,
\end{aligned} \tag{2.59}
$$

$$
\left\|\int_0^t \tau W(-\tau)\, x\partial_x^5 v^2 d\tau\right\|_0 \le cT^2\sup_{t\in[0,T]}\|v\|_5^2\,. \tag{2.60}
$$

Além disso, aplicando a regra de Leibniz a $\partial_x^6 v^2$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\left\|\int_0^t \tau W(-\tau)\,\partial_x^6 v^2 d\tau\right\|_0 &\le \sum_{j=0}^{6} c_j\left\|\int_0^t \tau W(-\tau)\,\partial_x^j v\partial_x^{6-j} v d\tau\right\|_0 \\
&= c\left\|\int_0^t \tau W(-\tau)\, v\partial_x^6 v d\tau\right\|_0 \\
&+ \sum_{j=1}^{5} c_j\left\|\int_0^t \tau W(-\tau)\,\partial_x^j v\partial_x^{6-j} v d\tau\right\|_0 .
\end{aligned} \tag{2.61}
$$

A primeira parcela de (2.61) é estimada usando as desigualdades de Minkowsky e Hölder, como segue

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^t \tau W(-\tau)\, v\partial_x^6 v d\tau\right\|_0 &\leq \int_0^T t\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|v\partial_x^6 v\right|^2 dx\right)^{1/2} dt \\ &\leq T^{3/2}\left(\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}|v|^2\left|\partial_x^6 v\right|^2 dxdt\right)^{1/2}.\end{aligned} \tag{2.62}$$

Já a segunda parcela de (2.61) é estimada da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{5} c_j\left\|\int_0^t \tau W(-\tau)\,\partial_x^j v\partial_x^{6-j} v d\tau\right\|_0 &\leq \sum_{j=1}^{5} c_j\left[\int_0^T t\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\partial_x^j v\partial_x^{6-j}v\right|^2 dx\right)^{1/2} dt\right] \\ &\leq cT^2\sum_{j=1}^{5}\sup_{t\in[0,T]}\left\|\partial_x^j v\partial_x^{6-j}v\right\|_0 \\ &\leq cT^2\sup_{t\in[0,T]}\|v\|_5^2.\end{aligned} \tag{2.63}$$

Assim,

$$\begin{aligned}&\left\|\int_0^t \tau W(-\tau)\,\partial_x^6 v^2 d\tau\right\|_0 \\ &\leq cT^2\sup_{t\in[0,T]}\|v\|_5^2 + T^{3/2}\left(\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}|v|^2\left|\partial_x^6 v\right|^2 dxdt\right)^{1/2} \\ &\leq cT^2\sup_{t\in[0,T]}\|v\|_5^2 + T^{3/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\sup_{t\in[0,T]}|v|^2\int_0^T\left|\partial_x^6 v\right|^2 dtdx\right)^{1/2} \\ &\leq cT^2\sup_{t\in[0,T]}\|v\|_5^2 + T^{3/2}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}\int_0^T\left|\partial_x^6 v\right|^2 dt\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\sup_{t\in[0,T]}|v|^2 dx\right)^{1/2} \\ &\leq cT^2\left[\lambda_1^T(v)\right]^2 + T^{3/2}(1+T)^2\lambda_3^T(v)\,\lambda_6^T(v)\end{aligned} \tag{2.64}$$

e, aplicando a regra de Leibniz ao termo $\partial_x^7 v$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left\|\partial_x \int_0^t \tau W(-\tau)\,\partial_x^6 v^2 d\tau\right\|_0 \\
&\le \sum_{j=1}^{5} c_j \left\|\int_0^t \tau W(-\tau)\,\partial_x^{j+1} v \partial_x^{6-j} v d\tau\right\|_0 \\
&+ c\left\|\partial_x \int_0^t \tau W(-\tau)\, v\partial_x^6 v d\tau\right\|_0 + \left\|\int_0^t \tau W(-\tau)\, v_x \partial_x^6 v d\tau\right\|_0 \\
&\le cT^2 \sup_{t\in[0,T]} \|v\|_5^2 + c\left\|W(t)\,\partial_x \int_0^t \tau W(-\tau)\, v\partial_x^6 v d\tau\right\|_0 \\
&+ \int_0^T t\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|v_x \partial_x^6 v\right|^2 dx\right)^{1/2} dt \\
&\le cT^2 \sup_{t\in[0,T]} \|v\|_5^2 + c\left\|W(t)\,\partial_x \int_0^t \tau W(-\tau)\, v\partial_x^6 v d\tau\right\|_0 \\
&+ cT^{3/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^T \left|v_x \partial_x^6 v\right|^2 dt dx\right)^{1/2} \qquad (2.65) \\
&\le cT^2 \sup_{t\in[0,T]} \|v\|_5^2 + c\left\|\partial_x \int_0^t \tau W(t-\tau)\, v\partial_x^6 v d\tau\right\|_0 \\
&+ cT^{3/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \sup_{t\in[0,T]} |v_x|^2 dx\right)^{1/2} \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\int_0^T \left|\partial_x^6 v\right|^2 dt\right)^{1/2} \\
&\le cT^2 \sup_{t\in[0,T]} \|v\|_5^2 + \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T \left|\tau v\partial_x^6 v\right|^2 d\tau\right)^{1/2} dx + cT^{3/2}(1+T)^2 \lambda_4^T(v)\,\lambda_6^T(v) \\
&\le cT^2\left[\lambda_1^T(v)\right]^2 + T\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\int_0^T \left|\partial_x^6 v\right|^2 dt\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \sup_{t\in[0,T]} |v|^2 dx\right)^{1/2} \\
&+ cT^{3/2}(1+T)^2 \lambda_4^T(v)\,\lambda_6^T(v) \\
&= cT^2\left[\lambda_1^T(v)\right]^2 + T(1+T)^2 \lambda_3^T(v)\,\lambda_6^T(v) + cT^{3/2}(1+T)^2 \lambda_4^T(v)\,\lambda_6^T(v).
\end{aligned}$$

Note que, para obtermos (2.65) fizemos uso das desigualdades de Minkowsky e Hölder, bem como do efeito regularizante (2.7).

Finalmente, temos pelas desigualdades de Minkowsky e de Hölder, bem como pelo lema de imersão de Sobolev que

$$
\begin{aligned}
&\left\|\int_0^t W(-\tau)\, x\partial_x^5 v^2 d\tau\right\|_0 \\
&\leq \left\|\int_0^t W(-\tau)\, xS\left(v_x,...,\partial_x^4 v\right) d\tau\right\|_0 + \left\|\int_0^t W(-\tau)\, xv\partial_x^5 v d\tau\right\|_0 \\
&\leq T^{1/2}\left(\int_0^T \left\|xS\left(v_x,...,\partial_x^4 v\right)\right\|_0^2 d\tau\right)^{1/2} + T^{1/2}\left(\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty} |xv|^2 \left|\partial_x^5 v\right|^2 dxd\tau\right)^{1/2} \\
&\leq T\sup_{t\in[0,T]}\left\|xS\left(v_x,...,\partial_x^4 v\right)\right\|_0 + T^{1/2}\left(\int_0^T \sup_{x\in\mathbb{R}}|xv|^2\int_{-\infty}^{\infty}\left|\partial_x^5 v\right|^2 dxd\tau\right)^{1/2} \\
&\leq T\sup_{t\in[0,T]}\|v\|_5 \sup_{t\in[0,T]}\|v\|_{3,2} + T^{1/2}\left(\int_0^T \|xv\|_\infty^2 \int_{-\infty}^{\infty}\left|\partial_x^5 v\right|^2 dxd\tau\right)^{1/2} \qquad (2.66)\\
&\leq T\lambda_1^T(v)\,\lambda_2^T(v) + T^{1/2}\sup_{t\in[0,T]}\|xv\|_\infty\left(\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\left|\partial_x^5 v\right|^2 dxd\tau\right)^{1/2} \\
&\leq T\lambda_1^T(v)\,\lambda_2^T(v) + T\sup_{t\in[0,T]}\|xv\|_1 \sup_{t\in[0,T]}\left\|\partial_x^5 v\right\|_0 \\
&\leq T\lambda_1^T(v)\,\lambda_2^T(v) + T\sup_{t\in[0,T]}\left(\|v\|_{1,2}+\|v\|_0\right)\lambda_1^T(v) \\
&\leq 2T\lambda_1^T(v)\,\lambda_2^T(v) + T\left[\lambda_1^T(v)\right]^2,
\end{aligned}
$$

onde $S(v_x,...,\partial_x^4 v) = \sum_{j=1}^4 c_j\partial_x^j v\partial_x^{5-j} v$. Note que para obtermos (2.66), foi necessário o uso da seguinte desigualdade

$$
\begin{aligned}
\|xv\|_1 &\leq \|xv\|_0 + \|\partial_x(xv)\|_0 \\
&\leq \|xv\|_0 + \|xv\|_0 + \|v\|_0 \\
&= \|v\|_{1,2} + \|v\|_0 .
\end{aligned}
$$

Portanto, juntas as estimativas (2.48)-(2.66), nos dão o resultado procurado. □

Proposição 2.4.

$$(i)\ \|W(t)\,\phi\|_{3,2} \leq \|\phi\|_{3,2} + cT\|\phi\|_5 . \qquad (2.67)$$

$$
\begin{aligned}
(ii)\ \left\|\int_0^t W(t-\tau)\, v_x^2 d\tau\right\|_{3,2} &\leq cT\lambda_1^T(v)\,\lambda_2^T(v) \\
&\quad + cT^2\left[\lambda_1^T(v)\right]^2 \qquad (2.68)\\
&\quad + cT^{3/2}(1+T)^2\,\lambda_4^T(v)\,\lambda_1^T(v) .
\end{aligned}
$$

$$(iii)\left\|\int_0^t W(t-\tau)\,\partial_x^2 v^2 d\tau\right\|_{3,2} \leq cT\lambda_1^T(v)\,\lambda_2^T(v) + cT^2\left[\lambda_1^T(v)\right]^2 + cT\left[\lambda_1^T(v)\right]^2 + T^{3/2}(1+T)^2\lambda_3^T(v)\,\lambda_6^T(v) + T(1+T)^2\lambda_3^T(v)\,\lambda_6^T(v) + cT^{3/2}(1+T)^2\lambda_4^T(v)\,\lambda_6^T(v)\,. \tag{2.69}$$

Demonstração. (i): Usando a identidade (2.39), obtemos

$$\begin{aligned}\|W(t)\,\phi\|_{3,2} &= \sum_{j=0}^{3}\left\|xW(t)\,\partial_x^j\phi\right\|_0\\ &\leq \sum_{j=0}^{3}\left\|W(t)\,x\partial_x^j\phi\right\|_0 + cT\sum_{j=0}^{3}\left\|W(t)\,\partial_x^{j+2}\phi\right\|_0\\ &\leq \|\phi\|_{3,2} + cT\,\|\phi\|_5\,.\end{aligned}$$

(ii) e (iii): Observe que (2.68) e (2.69) já foram demonstradas respectivamente em (2.45) a (2.47) e (2.55) a (2.66). □

Proposição 2.5.

$$(i)\left\|\partial_x^6\int_0^t W(t-\tau)\,v_x^2 d\tau\right\|_{L_x^\infty L_T^2} \leq cT\left[\lambda_1^T(v)\right]^2 + cT^{1/2}(1+T)^2\lambda_4^T(v)\,\lambda_6^T(v)\,. \tag{2.70}$$

$$(ii)\left\|\partial_x^6\int_0^t W(t-\tau)\,\partial_x^2 v^2 d\tau\right\|_{L_x^\infty L_T^2} \leq 2(1+T)^2\lambda_6^T(v)\,\lambda_5^T(v) + 2T^{1/2}\lambda_4^T(v)\,\lambda_1^T(v) + cT\left[\lambda_1^T(v)\right]^2. \tag{2.71}$$

Demonstração. Aplicando o efeito regularizante (2.5), as desigualdades de Minkowsky e de Hölder e o lema de imersão de Sobolev, temos que

$$
\begin{aligned}
\left\|\partial_x^6\int_0^t W(t-\tau)\,v_x^2 d\tau\right\|_{L_x^\infty L_T^2} &\le c\left\|\int_0^T W(-\tau)\,\partial_x^5(v_x)^2\,d\tau\right\|_0\\
&\le c\int_0^T\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\partial_x^5(v_x)^2\right)^2 dx\right)^{1/2} dt\\
&\le cT^{1/2}\left(\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\left(\partial_x^5(v_x)^2\right)^2 dxdt\right)^{1/2}\\
&\le T^{1/2}\left(\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\left[S\left(v_{xx},...,\partial_x^5 v\right)\right]^2 dxdt\right)^{1/2}\\
&+cT^{1/2}\left(\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}(v_x)^2\left(\partial_x^6 v\right)^2 dxdt\right)^{1/2}\\
&\le T\sup_{t\in[0,T]}\left\|S\left(v_{xx},...,\partial_x^5 v\right)\right\|_0\\
&+cT^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\sup_{t\in[0,T]}(v_x)^2\int_0^T\left(\partial_x^6 v\right)^2 dxdt\right)^{1/2}\\
&\le cT\left[\lambda_1^T(v)\right]^2+cT^{1/2}(1+T)^2\lambda_4^T(v)\,\lambda_6^T(v)\,,
\end{aligned}
$$

onde $S\left(v_{xx},...,\partial_x^5 v\right)=\sum_{j=1}^4 c_j\partial_x^{j+1}v\partial_x^{6-j}v$. Isto encerra a demonstração de (i).

(ii): Escrevemos $\partial_x^6 v=\sum_{j=0}^6 c_j\partial_x^j v\partial_x^{6-j}v$, então

$$
\begin{aligned}
\left\|\partial_x^6\int_0^t W(t-\tau)\,\partial_x^2 v^2 d\tau\right\|_{L_x^\infty L_T^2} &= \left\|\partial_x^2\int_0^t W(t-\tau)\,\partial_x^6 v^2 d\tau\right\|_{L_x^\infty L_T^2}\\
&\le 2\left\|\partial_x^2\int_0^t W(t-\tau)\left(v\partial_x^6 v+v_x\partial_x^5 v\right)d\tau\right\|_{L_x^\infty L_T^2}\\
&+\left\|\partial_x W(t)\int_0^t W(-\tau)\,\partial_x S\left(v_{xx},v_{xxx},\partial_x^4 v\right)d\tau\right\|_{L_x^\infty L_T^2}.
\end{aligned}
$$

Aplicando os efeitos regularizantes (2.5) e (2.8) e o lema de imersão de Sobolev, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left\|\partial_x^6\int_0^t W\left(t-\tau\right)\partial_x^2 v^2 d\tau\right\|_{L_x^\infty L_T^2}\\
&\leq 2\left\|v\partial_x^6 v+v_x\partial_x^5 v\right\|_{L_x^1 L_T^2}+\left\|\int_0^t W\left(-\tau\right)\partial_x S\left(v_{xx},v_{xxx},\partial_x^4 v\right)d\tau\right\|_0\\
&\leq 2\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T\left|v\partial_x^6 v\right|^2 dt\right)^{1/2}dx+2\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T\left|v_x\partial_x^5 v\right|^2 dt\right)^{1/2}dx\\
&+\int_0^T\left\|\partial_x S\left(v_{xx},v_{xxx},\partial_x^4 v\right)\right\|_0 dt\\
&\leq 2\int_{-\infty}^{\infty}\sup_{t\in[0,T]}|v|\left(\int_0^T\left|\partial_x^6 v\right|^2 dt\right)^{1/2}dx+2\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sup_{t\in[0,T]}|v_x|^2\right)^{1/2}\left(\int_0^T\left|\partial_x^5 v\right|^2 dt\right)^{1/2}dx\\
&+T\sup_{t\in[0,T]}\left\|\partial_x S\left(v_{xx},v_{xxx},\partial_x^4 v\right)\right\|_0\\
&\leq 2\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\int_0^T\left|\partial_x^6 v\right|^2 dt\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\sup_{t\in[0,T]}|v|\,dx\\
&+2\left(\int_{-\infty}^{\infty}\sup_{t\in[0,T]}|v_x|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^T\left|\partial_x^5 v\right|^2 dtdx\right)^{1/2}+cT\left[\lambda_1^T(v)\right]^2\\
&\leq 2\left(1+T\right)^2\lambda_6^T(v)\,\lambda_5^T(v)+2T^{1/2}\left(1+T\right)^2\lambda_4^T(v)\,\lambda_1^T(v)+cT\left[\lambda_1^T(v)\right]^2.
\end{aligned}$$

□

A proposição 2.1 nos fornece a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
&\left\|W(t)\phi-\int_0^t W\left(t-\tau\right)\left[\gamma v_x^2+\delta\partial_x^2 v^2\right]d\tau\right\|_5\\
&=\left\|W(t)\phi-\int_0^t W\left(t-\tau\right)\left[\gamma v_x^2+\delta\partial_x^2 v^2\right]d\tau\right\|_0\\
&+\left\|\partial_x^5\left(W(t)\phi-\int_0^t W\left(t-\tau\right)\left[\gamma v_x^2+\delta\partial_x^2 v^2\right]d\tau\right)\right\|_0\\
&\leq\|\phi\|_0+\left\|\partial_x^5\phi\right\|_0+\left\|\int_0^t W\left(t-\tau\right)\gamma v_x^2 d\tau\right\|_0+\left\|\int_0^t W\left(t-\tau\right)\delta\partial_x^2 v^2 d\tau\right\|_0\\
&+\left\|\partial_x^5\int_0^t W\left(t-\tau\right)\gamma v_x^2 d\tau\right\|_0+\left\|\partial_x^5\int_0^t W\left(t-\tau\right)\delta\partial_x^2 v^2 d\tau\right\|_0\\
&\leq\|\phi\|_5+cT\left[\lambda_1^T(v)\right]^2+cT^{1/2}\left(1+T\right)^2\lambda_4^T(v)\,\lambda_6^T(v)\\
&+c\left(1+T\right)^2\lambda_5^T(v)\,\lambda_6^T(v)+cT^{1/2}\left(1+T\right)^2\lambda_1^T(v)\,\lambda_4^T(v).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\lambda_1 (Av) \leq \|\phi\|_5 + cT \left[\lambda_1^T (v)\right]^2 + cT^{1/2} (1+T)^2 \lambda_4^T (v) \lambda_6^T (v) \\ + c (1+T)^2 \lambda_5^T (v) \lambda_6^T (v) + cT^{1/2} (1+T)^2 \lambda_1^T (v) \lambda_4^T (v) . \tag{2.72}$$

Já a proposição 2.4 nos dá a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} &\left\| W (t) \phi - \int_0^t W (t-\tau) \left[\gamma v_x^2 + \delta \partial_x^2 v^2\right] d\tau \right\|_{3,2} \\ &\leq \|W (t) \phi\|_{3,2} + \left\| \int_0^t W (t-\tau) \gamma v_x^2 d\tau \right\|_{3,2} + \left\| \int_0^t W (t-\tau) \delta \partial_x^2 v^2 d\tau \right\|_{3,2} \\ &\leq \|\phi\|_{3,2} + cT \|\phi\|_5 + cT \lambda_1^T (v) \lambda_2^T (v) + cT^2 \left[\lambda_1^T (v)\right]^2 \\ &+ cT^{3/2} (1+T)^2 \lambda_4^T (v) \lambda_1^T (v) + cT \lambda_1^T (v) \lambda_2^T (v) + cT^2 \left[\lambda_1^T (v)\right]^2 \\ &+ cT \left[\lambda_1^T (v)\right]^2 + T^{3/2} (1+T)^2 \lambda_3^T (v) \lambda_6^T (v) + T (1+T)^2 \lambda_3^T (v) \lambda_6^T (v) \\ &+ cT^{3/2} (1+T)^2 \lambda_4^T (v) \lambda_6^T (v) . \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\begin{aligned} \lambda_2 (Av) \leq\ & \|\phi\|_{3,2} + cT \|\phi\|_5 + cT \lambda_1^T (v) \lambda_2^T (v) + cT^2 \left[\lambda_1^T (v)\right]^2 \\ & + cT^{3/2} (1+T)^2 \lambda_4^T (v) \lambda_1^T (v) + cT \left[\lambda_1^T (v)\right]^2 + T^{3/2} (1+T)^2 \lambda_3^T (v) \lambda_6^T (v) \\ & + cT (1+T)^2 \lambda_3^T (v) \lambda_6^T (v) + cT^{3/2} (1+T)^2 \lambda_4^T (v) \lambda_6^T (v) . \end{aligned} \tag{2.73}$$

Combinando (2.6), (2.30) e (2.31), encontramos

$$\begin{aligned} \|Av\|_{L_x^2 L_T^\infty} &\leq \|W (t) \phi\|_{L_x^2 L_T^\infty} + \left\| \int_0^t W (t-\tau) \gamma v_x^2 d\tau \right\|_{L_x^2 L_T^\infty} \\ &+ \left\| \int_0^t W (t-\tau) \delta \partial_x^2 v^2 d\tau \right\|_{L_x^2 L_T^\infty} \\ &\leq c (1+T)^2 \|\phi\|_5 + cT (1+T)^2 \sup_{t \in [0,T]} \|v\|_2^2 \\ &+ cT (1+T)^2 \sup_{t \in [0,T]} \|v\|_3^2 . \end{aligned}$$

Logo,

$$\lambda_3 (Av) \leq c \|\phi\|_5 + cT \left[\lambda_1^T (v)\right]^2 . \tag{2.74}$$

De forma análoga, unindo (2.6), (2.32) e (2.33), obtemos

$$\lambda_4 (Av) \leq c \|\phi\|_5 + cT \left[\lambda_1^T (v)\right]^2 . \tag{2.75}$$

Pela proposição (2.3), temos

$$\begin{aligned}\lambda_5(Av) &\leq c\left(\|\phi\|_5+\|\phi\|_{3,2}\right)+cT\left[\lambda_1^T(v)\right]^2+cT^{3/2}(1+T)^2\lambda_4^T(v)\lambda_1^T(v)\\&+cT^{1/2}(1+T)^2\lambda_4^T(v)\lambda_1^T(v)+cT\lambda_1^T(v)\lambda_2^T(v)+cT^2\left[\lambda_1^T(v)\right]^2\\&+cT^{3/2}(1+T)^2\lambda_4^T(v)\lambda_6^T(v)+cT^{3/2}(1+T)^2\lambda_3^T(v)\lambda_6^T(v)\\&+c(1+T)^2\lambda_5^T(v)\lambda_6^T(v)+T^{1/2}(1+T)^2\lambda_4^T(v)\lambda_1^T(v)\\&+cT(1+T)^2\lambda_3^T(v)\lambda_6^T(v)\end{aligned}\tag{2.76}$$

e de (2.5), (2.70) e (2.71), concluímos que

$$\begin{aligned}\lambda_6(Av) &\leq \left\|\partial_x^5\partial_x W(t)\phi\right\|_{L_x^\infty L_T^2}+\left\|\partial_x^6\int_0^t W(t-\tau)\gamma v_x^2 d\tau\right\|_{L_x^\infty L_T^2}\\&+\left\|\partial_x^6\int_0^t W(t-\tau)\delta\partial_x^2 v^2 d\tau\right\|_{L_x^\infty L_T^2}\\&\leq c\left\|\partial_x^5\phi\right\|_0+cT\left[\lambda_1^T(v)\right]^2+cT^{1/2}(1+T)^2\lambda_4^T(v)\lambda_6^T(v)\\&+2(1+T)^2\lambda_6^T(v)\lambda_5^T(v)+2T^{1/2}(1+T)^2\lambda_4^T(v)\lambda_1^T(v)+cT\left[\lambda_1^T(v)\right]^2\\&\leq c\|\phi\|_5+cT\left[\lambda_1^T(v)\right]^2 cT^{1/2}(1+T)^2\lambda_4^T(v)\lambda_6^T(v)\\&+2(1+T)^2\lambda_5^T(v)\lambda_6^T(v)+2T^{1/2}(1+T)^2\lambda_1^T(v)\lambda_4^T(v).\end{aligned}\tag{2.77}$$

Então, (2.72)-(2.77) nos dão a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}\Lambda^T(Av) &\leq c\eta_0(1+T)+c\left[\Lambda^T(v)\right]^2\\&\left\{T+T^{1/2}(1+T)^2+(1+T)^2+T^2+T^{3/2}(1+T)^2+T(1+T)^2\right\}\\&\leq c\eta_0(1+T)+c(1+T)^4\left[\Lambda^T(v)\right]^2,\end{aligned}\tag{2.78}$$

onde $\eta_0=\|\phi\|_5+\|\phi\|_{3,2}<\eta$(a ser determinado) e $c>1$ constante.

Primeiro, fixamos η, tal que $16c^2\eta=1$. A seguir, escolhemos

$$a=2c(1+T)\eta_0,\tag{2.79}$$

com T satisfazendo

$$4c^2(1+T)^5\eta_0\leq 1/2.\tag{2.80}$$

Então, $\Lambda^T(Av)<a$ e portanto $Av\in\chi_T^a$ quando $v\in\chi_T^a$. Um argumento similar mostra que se

$v,w\in\chi_T^a$, temos

$$\Lambda^T\left(A_\phi(v)-A_\phi(w)\right)\leq(1+T)^4\left[\Lambda^t(v)+\Lambda^T(w)\right]\Lambda^T(v-w).\tag{2.81}$$

Além disso, para $T_0 \in (0,T)$ e $\tilde{v} \in \chi_T^a$,

$$\begin{aligned}\Lambda^{T_0}\left(A_\phi\left(v\right)-A_\phi\left(\tilde{v}\right)\right) \leq \left(1+T_0\right)\left(\left\|\phi-\tilde{\phi}\right\|_5+\left\|\phi-\tilde{\phi}\right\|_{3,2}\right)\\ +c\left(1+T_0\right)^4\left[\Lambda^{T_0}\left(v\right)+\Lambda^{T_0}\left(\tilde{v}\right)\right]\Lambda^{T_0}\left(v-\tilde{v}\right).\end{aligned} \tag{2.82}$$

De (2.80), obtemos

$$c\left(1+T\right)^4\left[\Lambda^T\left(v\right)+\Lambda^T\left(w\right)\right] \leq 4c^2\left(1+T\right)^5\eta_0<1. \tag{2.83}$$

Logo, de (2.81) e (2.83) segue que $A:\chi_T^a \to \chi_T^a$ é uma contração e portanto existe um único $u \in \chi_T^a$, tal que $A_\phi\left(u\right)=u$. De (2.80), (2.81) e (2.82), concluímos que a aplicação

$$\tilde{\phi} \in V \mapsto \tilde{u} \in \chi_{T_0}^a$$

é Lipschitziana, onde V é uma vizinhança de ϕ dependente de T_0.

Como próximo passo, vamos mostrar a continuidade de u, ou seja, vamos mostrar que $u \in C\left(\left[0,T\right];H^5\left(\mathbb{R}\right)\cap H^3\left(\mathbb{R};x^2dx\right)\right)$. Utilizaremos o mesmo argumento do Teorema 5.88 (ver [2]). Assim, basta provar a continuidade de u em $t=0$ e a unicidade da solução. Iniciaremos com a prova da continuidade em $t=0$. Pela equação integral, temos que

$$\left\|u\left(t\right)-\phi\right\|_{3,2} \leq \left\|W\left(t\right)\phi-\phi\right\|_{3,2}+\left\|\int_0^t W\left(t-\tau\right)\left[\gamma u_x^2+\delta\partial_x^2u^2\right]d\tau\right\|_{3,2}. \tag{2.84}$$

Aplicando a identidade (2.39) e a propriedade de isometria do grupo $W\left(t\right)$, obtemos

$$\begin{aligned}\left\|W\left(t\right)\phi-\phi\right\|_{3,2} &= \sum_{j=0}^{3}\left\|x\left(W\left(t\right)-I\right)\partial_x^j\phi\right\|_0\\ &\leq \sum_{j=0}^{3}\left\|\left(W\left(t\right)-I\right)x\partial_x^j\phi\right\|_0+ct\sum_{j=0}^{3}\left\|\left(W\left(t\right)-I\right)\left(\partial_x^{j+2}\phi\right)\right\|_0\\ &\leq \sum_{j=0}^{3}\left\|\left(W\left(t\right)-I\right)x\partial_x^j\phi\right\|_0+ct\left\|\phi\right\|_5.\end{aligned} \tag{2.85}$$

Combinando (2.68), (2.69) e (2.85) em (2.84), segue a continuidade de u na norma de $H^3\left(\mathbb{R};x^2dx\right)$, quando $t \to 0^+$.

As estimativas (2.20)-(2.23) e o fato de que $u \in \chi_T^a$, implicam

$$\begin{aligned}\left\|u\left(t\right)-\phi\right\|_5 &\leq \left\|W\left(t\right)\phi-\phi\right\|_5+\left\|\int_0^t W\left(t-\tau\right)\left[\gamma u_x^2+\delta\partial_x^2u^2\right]d\tau\right\|_5\\ &\leq \left\|W\left(t\right)\phi-\phi\right\|_5+ct\left[\lambda_1^t\left(u\right)\right]^2+ct^{1/2}\left(1+t\right)^2\lambda_4^t\left(u\right)\lambda_6^t\left(u\right)\\ &+c\left(1+t\right)^2\lambda_5^t\left(u\right)\lambda_6^t\left(u\right)+ct^{1/2}\left(1+t\right)^2\lambda_1^t\left(u\right)\lambda_4^t\left(u\right)\\ &\leq \left\|W\left(t\right)\phi-\phi\right\|_5+cta^2+ct^{1/2}\left(1+t\right)^2a^2+c\left(1+t\right)^2a\lambda_6^t\left(u\right).\end{aligned} \tag{2.86}$$

Para mostrar que o lado direito de (2.86) pode ser feito tão pequeno quanto se queira, quando $t \to 0^+$, devemos ter $\lambda_6^t(u) \to 0$ quando $t \to 0^+$. Para isso, usamos a equação integral, (2.70) e (2.71) para obter

$$\begin{aligned}
\lambda_6^T(u) &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_0^T \left(\partial_x^6 u\right)^2 dt \right)^{1/2} \\
&\leq \left\|\partial_x^6 W(t)\phi\right\|_{L_x^\infty L_T^2} + \left\| \partial_x^6 \int_0^T W(t-\tau)\left[\gamma u_x^2 + \delta\partial_x^2 u^2\right] d\tau \right\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_0^T \left(\partial_x^6 W(t)\phi\right)^2 dt \right)^{1/2} + cT\left[\lambda_1^T(u)\right]^2 \\
&+ cT^{1/2}(1+T)^2 \lambda_4^T(u)\lambda_6^T(u) + 2(1+T)^2\lambda_6^T(u)\lambda_5^T(u) \\
&+ 2T^{1/2}\lambda_4^T(u)\lambda_1^T(u) \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_0^T \left(\partial_x^6 W(t)\phi\right)^2 dt \right)^{1/2} + cTa^2 + cT^{1/2}(1+T)^2 a^2 \\
&+ 2(1+T)^2 a \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_0^T \left(\partial_x^6 u\right)^2 dt \right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{2.87}$$

pois $u \in \chi_T^a$. Note que, de (2.80), obtemos

$$2a(1+T)^2 = 4c(1+T)^3\eta_0 < 4c^2(1+T)^5 \leq 1/2.$$

Portanto, de (2.87), segue que

$$\frac{1}{2}\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_0^T \left(\partial_x^6 u\right)^2 dt \right)^{1/2} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_0^T \left(\partial_x^6 W(t)\phi\right)^2 dt \right)^{1/2} + cTa^2 + cT^{1/2}(1+T)^2 a^2. \tag{2.88}$$

Agora, dado $\epsilon > 0$, tome $\phi^\epsilon \in H^\infty$, tal que $\|\phi^\epsilon - \phi\|_5 < \epsilon$, então, de (2.5) e do lema de imersão de Sobolev, obtemos a estimativa

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_0^T \left|\partial_x^6 W(t)\phi\right|^2 dt \right)^{1/2} &= \left\|\partial_x^6 W(t)\phi\right\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\leq \left\|\partial_x^6 W(t)(\phi - \phi^\epsilon)\right\|_{L_x^\infty L_T^2} + \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_0^T \left|\partial_x^6 W(t)\phi^\epsilon\right|^2 dt \right)^{1/2} \\
&\leq \left\|\partial_x^5(\phi - \phi^\epsilon)\right\|_0 + T^{1/2}\left\|\partial_x^6\phi^\epsilon\right\|_\infty \\
&\leq \|\phi - \phi^\epsilon\|_5 + T^{1/2}\|\phi^\epsilon\|_7 \\
&< \epsilon + T^{1/2}\|\phi^\epsilon\|_7 .
\end{aligned} \tag{2.89}$$

De (2.88) e (2.89), temos que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\int_0^T \left(\partial_x^6 u\right)^2 dt\right)^{1/2} \to 0, \tag{2.90}$$

quando $t \to 0^+$. Este fato aplicado a (2.86) nos dá a continuidade de u na norma de H^5, em $t = 0$.

Provemos agora a unicidade.

Seja w uma solução de (2.1) no intervalo $[0, T_1]$, onde $T_1 < T$ e $\Lambda^{T_1}(w) < \infty$. Suponha que $w \in \chi_{T_1}^{a_1}$ para algum $a_1 > a = 2c(1+T)\eta_0$, com $w \in C\left([0,T_1]; H^5(\mathbb{R}) \cap H^3(\mathbb{R}; x^2dx)\right)$. Como $\eta_0 \le \sup_{t\in[0,\tau]}\left(\|w(t)\|_5 + \|w(t)\|_{3,2}\right) \le a_1$, para $\tau \in [0,T_1]$, por continuidade, existe $T_2 < T_1$ satisfazendo

$$\sup_{t\in[0,\tau]}\left(\|w(t)\|_5 + \|w(t)\|_{3,2}\right) \le a. \tag{2.91}$$

Além disso, w satisfaz a equação integral associada a (2.1). De (2.91) e estimando $\lambda_3^t(w)$, $\lambda_4^t(w)$ como em (2.74) e (2.75), encontramos

$$\lambda_j^t(w) \le c\eta_0 + cta^2 \le a, \tag{2.92}$$

para $t \in [0, T_3]$, com $T_3 < T_2$ suficientemente pequeno e $j = 3, 4$. Analogamente, como em (2.76) e usando (2.90) temos que

$$\lambda_j^T(w) \le a, \tag{2.93}$$

para $T_4 < T_3$ suficientemente pequeno e $j = 5, 6$. Portanto, acabamos de mostrar que $w \in \chi_{T_4}^a$ para $T_4 < T_1$ suficientemente pequeno, o que implica que

$$w = u, \qquad em\, [0, T_4]. \tag{2.94}$$

Reaplicando este processo um número finito de vezes, estendemos a unicidade ao intervalo $[0, T]$, e isso conclui a demonstração do Teorema (2.1) com $s = 5$.

Observação 2.2. *Para demonstrar o Teorema (2.1), onde $s \ge 6$ inteiro, utilizamos as normas (2.12) a (2.15) e*

$$\lambda_1^T(v) = \sup_{t\in[0,T]}\|v(t)\|_s, \qquad \lambda_6^T(v) = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\int_0^T \left(\partial_x^s v_x(x,t)\right)^2 dt\right)^{1/2}.$$

As estimativas necessárias à obtenção da demonstração são obtidas da mesma forma que no caso em que $s = 5$.

Vamos demonstrar agora o segundo teorema mencionado no início da seção.

Teorema 2.2. *Seja* $\phi \in H^s(\mathbb{R})$, *com* $s \geq 2$ *inteiro. Então, existe* $\eta > 0$ *tal que, se*

$$\|\phi\|_s < \eta,$$

o problema (2.1) com $p \geq 2$ *tem uma única solução* $u(\cdot)$ *definida no intervalo* $[0, T]$, *onde* $T = T(\|\phi\|_s) > 0$ *com* $T(\theta) \to \infty$ *quando* $\theta \to 0$ *satisfazendo*

$$u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R})) \equiv Z_T^s$$

e

$$u \in \left\{v : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R}; \partial_x^{s+1} v \in L^\infty\left(\mathbb{R}; L^2[0,T]\right)\right\} \equiv Y_T^s.$$

Além disso, qualquer que seja $T' \in (0, T)$, *existe uma vizinhança* V_ϕ *de* ϕ *em* $H^s(\mathbb{R})$, *tal que a aplicação* $\tilde{\phi} \to \tilde{u}(t)$ *de* V_ϕ *em* $Z_{T'}^s \cap Y_{T'}^s$ *é Lipschitziana.*

Demonstração. Considere o problema (6.1) com $s, p \geq 2$ inteiros. Neste caso, é suficiente empregar as seguintes normas

$$\lambda_1^T(v) = \sup_{t \in [0,T]} \|v(t)\|_s, \tag{2.95}$$

$$\lambda_2^T(v) = (1+T)^{-2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \sup_{t \in [0,T]} \left(v^2(x,t) + v_x^2(x,t)\right) dx\right)^{1/2}, \tag{2.96}$$

$$\lambda_3^T(v) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\int_0^T \left|\partial_x^s v_x\right|^2 dt\right)^{1/2}, \tag{2.97}$$

e definir o espaço métrico

$$\chi_T^a := \left\{v : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R};\ \Lambda^T(v) := \max_{1 \leq j \leq 3} \lambda_j^T(v) \leq a\right\}, \tag{2.98}$$

onde $d(u,v) := \Lambda^T(u - v)$.

Com a finalidade de tornar mais simples as contas, provaremos na proposição a seguir as principais estimativas não homogêneas necessárias à obtenção da demonstração do Teorema 2.2 no caso $p = s = 2$. As estimativas nos demais casos são inteiramente análogas.

Proposição 2.6.

$$(i)\ \left\|\partial_x^2\int_0^t W(t-\tau)\,v^2v_{xx}d\tau\right\|_0 \le cT^{1/2}(1+T)^2\lambda_2^T(v)\left[\lambda_1^T(v)\right]^2 + c(1+T)^2\lambda_2^T(v)\lambda_3^T(v)\equiv E_1. \tag{2.99}$$

$$(ii)\ \left\|\partial_x^2\int_0^t W(t-\tau)\,v_x^2d\tau\right\|_0 \le c(1+T)^2\lambda_2^T(v)\lambda_1^T(v)\equiv E_2. \tag{2.100}$$

$$(iii)\ \left\|\partial_x^3\int_0^t W(t-\tau)\,v^2v_{xx}d\tau\right\|_{L_x^\infty L_T^2} \le E_1. \tag{2.101}$$

$$(iv)\ \left\|\partial_x^3\int_0^t W(t-\tau)\,v_x^2d\tau\right\|_{L_x^\infty L_T^2} \le E_2. \tag{2.102}$$

$$(v)\ \left\|\partial_x\int_0^t W(t-\tau)\,v_x^2d\tau\right\|_{L_x^2 L_T^\infty} \le cT(1+T)^2\left[\lambda_1^T(v)\right]^2 + c(1+T)^2E_2. \tag{2.103}$$

$$\begin{aligned}(vi)\ \left\|\partial_x\int_0^t W(t-\tau)\,v^2v_{xx}d\tau\right\|_{L_x^2 L_T^\infty} &\le cT(1+T)^2\left[\lambda_1^T(v)\right]^3\\ &+ cT^{1/2}(1+T)^4\lambda_1^T(v)\lambda_2^T(v)\lambda_3^T(v)\\ &+ c(1+T)^2E_1.\end{aligned} \tag{2.104}$$

Demonstração. (i): Usando o efeito regularizante (2.7), o lema de imersão de Sobolev e a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
\left\|\partial_x^2\int_0^t W(t-\tau)\,v^2v_{xx}d\tau\right\|_0 &\leq \left\|\partial_x\int_0^t W(t-\tau)\,\partial_x\left(v^2v_{xx}\right)d\tau\right\|_{L_T^\infty L_x^2}\\
&\leq c\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T\left[\partial_x\left(v^2v_{xx}\right)^2\right]^2dt\right)^{1/2}dx\\
&\leq c\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T v^2v_x^2v_{xx}^2dt\right)^{1/2}dx\\
&+c\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T v^4v_{xxx}^2dt\right)^{1/2}dx\\
&\leq c\int_{-\infty}^{\infty}\sup_{t\in[0,T]}|vv_x|\left(\int_0^T v_{xx}\right)^{1/2}dx\\
&+c\int_{-\infty}^{\infty}\sup_{t\in[0,T]}v^2\left(\int_0^T v_{xxx}^2dt\right)^{1/2}dx\\
&\leq c\sup_{t\in[0,T]}\|v_x\|_\infty\int_{-\infty}^{\infty}\sup_{t\in[0,T]}|v|\left(\int_0^T v_{xx}^2dt\right)^{1/2}dx\\
&+c\int_{-\infty}^{\infty}\sup_{t\in[0,T]}v^2\left(\int_0^T v_{xxx}^2dt\right)^{1/2}dx\\
&\leq cT^{1/2}(1+T)^2\,\lambda_1^T(v)\,\lambda_2^T(v)\sup_{t\in[0,T]}\left(\int_{-\infty}^{\infty}v_{xx}^2dx\right)^{1/2}\\
&+c(1+T)^2\,\lambda_2^T(v)\,\lambda_3^T(v)\\
&\leq cT^{1/2}(1+T)^2\,\lambda_2^T(v)\left[\lambda_1^T(v)\right]^2\\
&+c(1+T)^2\,\lambda_2^T(v)\,\lambda_3^T(v)\equiv E_1.
\end{aligned}$$

(ii): Procedendo analogamente ao item (i), de (2.7) obtemos

$$\begin{aligned}
\left\|\partial_x^2\int_0^t W(t-\tau)\,v_x^2d\tau\right\|_0 &\leq c\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^T v_x^2v_{xx}^2dt\right)^{1/2}dx\\
&\leq c\int_{-\infty}^{\infty}\sup_{t\in[0,T]}|v_x|\left(\int_0^T v_{xx}^2dt\right)^{1/2}dx\\
&\leq cT^{1/2}(1+T)^2\,\lambda_2^T(v)\,\lambda_1^T(v)\equiv E_2.
\end{aligned}$$

(iii) e (iv): Combinando (2.5), o fato de $W(t)$ ser um grupo unitário em $L^2(\mathbb{R})$, e as desigualdades (2.99) e (2.100), obtemos

$$\begin{aligned}\left\|\partial_x^3\int_0^t W(t-\tau)\,v^2v_{xx}d\tau\right\|_{L_x^\infty L_T^2} &\leq c\left\|\partial_x^2\int_0^t W(-\tau)\,v^2v_{xx}d\tau\right\|_0\\ &= c\left\|\partial_x^2\int_0^t W(t-\tau)\,v^2v_{xx}d\tau\right\|_0\\ &\leq E_1\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\left\|\partial_x^3\int_0^t W(t-\tau)\,v_x^2d\tau\right\|_{L_x^\infty L_T^2} &\leq c\left\|\partial_x^2\int_0^t W(t-\tau)\,v_x^2d\tau\right\|_0\\ &\leq E_2.\end{aligned}$$

(v) e (vi): Usando (2.6) com $r=1$ e $\rho=2$, temos

$$\begin{aligned}\left\|\partial_x\int_0^t W(t-\tau)\,v_x^2d\tau\right\|_{L_x^2 L_T^\infty} &\leq c\,(1+T)^2\left\|\partial_x\int_0^t W(-\tau)\,v_x^2d\tau\right\|_1\\ &\leq c\,(1+T)^2\left\|\partial_x\int_0^t W(t-\tau)\,v_x^2d\tau\right\|_0\\ &+c\,(1+T)^2\left\|\partial_x^2\int_0^t W(t-\tau)\,v_x^2d\tau\right\|_0\\ &\leq c\,(1+T)^2\int_0^T\left(\int_{-\infty}^{\infty}v_x^2v_{xx}^2dx\right)^{1/2}dt\\ &+c\,(1+T)^2\left\|\partial_x^2\int_0^t W(t-\tau)\,v_x^2d\tau\right\|_0\\ &\leq cT^{1/2}\,(1+T)^2\left(\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}v_x^2v_{xx}^2dxdt\right)^{1/2}\\ &+c\,(1+T)^2\left\|\partial_x^2\int_0^t W(t-\tau)\,v_x^2d\tau\right\|_0\\ &\leq cT\,(1+T)^2\sup_{t\in[0,T]}\left\|v_x^2v_{xx}^2\right\|_0\\ &+c\,(1+T)^2\left\|\partial_x^2\int_0^t W(t-\tau)\,v_x^2d\tau\right\|_0\\ &\leq cT\,(1+T)^2\left[\lambda_1^T(v)\right]^2+c\,(1+T)^2E_2.\end{aligned}$$

Note que utilizamos a desigualdade de Minkowsky e o lema de imersão de Sobolev.

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\left\|\partial_x \int_0^t W(t-\tau)\, v^2 v_{xx} d\tau\right\|_{L_x^2 L_T^\infty} &\leq c(1+T)^2 \left\|\partial_x \int_0^t W(t-\tau)\, v^2 v_{xx} d\tau\right\|_0 \\
&+ c(1+T)^2 \left\|\partial_x^2 \int_0^t W(t-\tau)\, v^2 v_{xx} d\tau\right\|_0 \\
&\leq cT^{1/2}(1+T)^2 \left(\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} v^2 v_x^2 v_{xx}^2 dx dt\right)^{1/2} \\
&+ cT^{1/2}(1+T)^2 \left(\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} v^4 v_{xxx}^2 dx dt\right)^{1/2} \\
&+ c(1+T)^2 E_1 \\
&\leq cT(1+T)^2 \left[\lambda_1^T(v)\right]^3 \\
&+ cT^{1/2}(1+T)^4 \lambda_1^T(v)\, \lambda_2^T(v)\, \lambda_3^T(v) + c(1+T)^2 E_1.
\end{aligned}$$

□

As demais estimativas à cerca da parte não-homogênea da equação integral

$$Av = W(t)\,\phi - \int_0^t W(t-\tau)\left(\gamma v_x^2 + \delta u^2 u_{xx}\right) d\tau \tag{2.105}$$

são demonstradas de maneira análoga às estimativas encontradas na proposição (2.6). Para a parte homogênea de (2.105), usamos (2.5) e (2.6). Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned}
\Lambda^T(Av) \leq \|\phi\|_2 &+ cT^{1/2}(1+T)^4 \left[\Lambda^T(v)\right]^3 + c(1+T)^4 \left[\Lambda^T(v)\right]^2 \\
&+ cT^{1/2}(1+T)^4 \left[\Lambda^T(v)\right]^2 + cT\left[\Lambda^T(v)\right]^3.
\end{aligned} \tag{2.106}$$

Para finalizar a demonstração do Teorema 2.2, basta seguir mesmo argumento empregado na prova do Teorema 2.1(a partir de 2.79) e por isso, será omitido. □

Capítulo 3

Boa colocação para o sistema super Korteweg-de Vries

3.1 Introdução

Neste capítulo, trataremos do problema de valor inicial (PVI) associado ao sistema super Korteweg-de Vries (super KdV)

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \frac{1}{2}\partial_x u^2 + \frac{1}{2}\partial_x^2 v^2 = 0 \\ \partial_t v + \partial_x^3 v + \partial_x (uv) = 0, \quad x, t \in \mathbb{R} \\ (u(x,0), v(x,0)) = (\varphi(x), \psi(x)), \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $u = u(x,t)$ e $v = v(x,t)$ são funções de valor real. Vamos obter a boa colocação local com dado inicial pequeno, ou mais precisamente, vamos demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 3.1. *Seja* $\vec{\phi} \in X_{s,3} = (H^s(\mathbb{R}) \cap H^3(\mathbb{R}; x^2dx)) \times (H^s(\mathbb{R}) \cap H^3(\mathbb{R}; x^2dx))$*, com* $s \geq 5$*, s inteiro. Então, existe* $\eta > 0$ *tal que, se* $\left\|\vec{\phi}\right\|_{X_{s,3}} := \left\|\vec{\phi}\right\|_s + \left\|\vec{\phi}\right\|_{3,2} < \eta$*, o PVI (3.1) tem uma única solução* $\vec{u}(\cdot) = (u(\cdot), v(\cdot))$ *definida no intervalo* $[0,T]$*, onde*

$T = T\left(\left\|\vec{\phi}\right\|_{X_{s,3}}\right) > 0$ *com* $T(\theta) \to \infty$ *quando* $\theta \to 0$ *satisfazendo*

$$(i)\ \vec{u} \in C\left([0,T]\,; X_{s,3}\right);$$

$$(ii)\ \sup_{k=0,1} \left\|\partial_x^k \vec{u}\right\|_{L_x^2 L_T^\infty} < \infty;$$

$$(iii)\ \left\|\vec{u}\right\|_{L_x^1 L_T^\infty} < \infty.$$

Além disso, para cada $T_0 \in (0,T)$ *existe uma vizinhança* $V_{\vec{\phi}}$ *de* $\vec{\phi}$ *em* $X_{s,3}$ *tal que a aplicação* $\vec{\tilde{\phi}} \to \vec{\tilde{u}}(t)$*, de* $V_{\vec{\phi}}$ *em* X^T *é Lipschitziana.*

Tal demonstração será obtida empregando a mesma idéia utilizada para demonstrar o Teorema (2.1), ou seja, basicamente utilizaremos o princípio da contração combinado com propriedades do grupo $W(t)$ associado à parte linear do problema. Tais propriedades foram deduzidas por Kenig, Ponce e Vega.

Para finalizar a presente seção, seguem listadas abaixo notações utilizadas ao longo do capítulo.

- $X^{r,s} := H^r(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ e $X_{s,k} := H^s(\mathbb{R}) \cap H^k(\mathbb{R}; x^2dx) \times H^s(\mathbb{R}) \cap H^k(\mathbb{R}; x^2dx)$.
- Para $\vec{u} = (u,v)$, $|\vec{u}|_X^2 = |u|_X^2 + |v|_X^2$ e $\vec{u} \in X \iff u \in X$ e $v \in X$.
- Denotemos $c = c(\cdot, ..., \cdot)$ uma constante positiva a qual é irrelevante em nossas considerações (note que c pode depender de s). Dadas constantes positivas C, D, $C \lesssim D$ significa que existe uma constante $c > 0$ tal que $C \leq cD$.

3.2 Estimativas Lineares

Nesta seção, vamos estabelecer as estimativas necessárias à obtenção da solução do problema (3.1). Os resultados serão exibidos em forma de lema e proposição, sendo que suas respectivas demonstrações são feitas de modo análogo as demonstrações das proposições do capítulo 2, e por isso serão omitidas.

Considere o problema de valor inicial linear associado a equação (3.1),

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} + \partial_x^3 \vec{u} = 0 \\ \vec{u}(x,0) = \vec{\phi}(x), \end{cases} \tag{3.2}$$

onde $\vec{u} = (u, v)$ e $\vec{\phi} = (\varphi, \psi)$. A solução de (3.2) é dada por

$$\vec{u}(x,t) := W(t)\vec{\phi}(x) = S_t * \vec{\phi}(x), \tag{3.3}$$

com $W(t) = e^{-t\partial_x^3}$ e S_t é dada pela integral oscilatória

$$S_t(x) = c\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\xi^3 + ix\xi} d\xi.$$

Lema 3.1. *Seja $\vec{u_0} \in L^2(\mathbb{R})$. Então, temos que*

$$(i)\ \ \|\partial_x^s(\partial_x W(t)\vec{u_0})\|_{L_x^\infty L_T^2} \le c\|\partial_x^s \vec{u_0}\|_0,\ \ s \ge 0;$$
$$(ii)\ \ \|W(t)\vec{u_0}\|_{L_x^2 L_T^\infty} \le c(1+T)^\rho \|\vec{u_0}\|_r,\ \ com\ r, \rho > \frac{3}{4}.$$

Demonstração. Veja capítulo 2, lema 2.1. □

Lema 3.2. *Para $\vec{g} \in L_x^1 L_t^2$ e $T > 0$, temos:*

$$(i)\ \ \left\|\partial_x \int_0^t W(t-\tau)\vec{g}(x,\tau)\,d\tau\right\|_{L_T^\infty L_x^2} \le c\|\vec{g}\|_{L_x^1 L_T^2};$$
$$(ii)\ \ \left\|\partial_x^2 \int_0^t W(t-\tau)\vec{g}(x,\tau)\,d\tau\right\|_{L_x^\infty L_T^2} \le c\|\vec{g}\|_{L_x^1 L_T^2}.$$

Demonstração. Veja capítulo 2, lema 2.2. □

Lema 3.3. *Se $\vec{\phi} \in X_{5,3}$, então temos:*

$$(i)\ \ \left\|W(t)\vec{\phi}\right\|_{L_x^1 L_T^\infty} \le c(1+T)^2\left(\left\|\vec{\phi}\right\|_5 + \left\|\vec{\phi}\right\|_{3,2}\right);$$
$$(ii)\ \ \left\|W(t)\vec{\phi}\right\|_{L_T^\infty H^3(\mathbb{R};x^2dx)} \le c\left(\left\|\vec{\phi}\right\|_{3,2} + T\left\|\vec{\phi}\right\|_5\right).$$

Demonstração. Para (i), veja proposição 2.3, item (i), enquanto para (ii), veja proposição 2.4, item (i). □

3.3 Teoria local com dado inicial pequeno: Prova do Teorema 3.1

Afim de simplificar a demonstração do teorema, faremos como no capítulo 2 e demonstraremos o caso onde $s = 5$.

Para $\vec{w} : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, definimos os espaços de Banach

$$X^T = \left\{ \vec{w} \in C\left([0,T]; X^{5,5}\right);\ \Lambda^T(\vec{w}) < \infty \right\}, \quad X^T(a) = \left\{ \vec{w} \in X^T;\ \Lambda^T(\vec{w}) < a \right\}, \tag{3.4}$$

e definimos também $d(\vec{v}, \vec{w}) := \Lambda^T(\vec{v} - \vec{w})$, com $\Lambda^T(\vec{w}) = \max_{1 \le j \le 5} \left\{ \lambda_j = \lambda_j^T(\vec{w}) \right\}$, onde

$$\begin{aligned}
\lambda_1^T(\vec{w}) &= \|\vec{w}\|_{L_T^\infty H^5(\mathbb{R})};\\
\lambda_2^T(\vec{w}) &= \|\vec{w}\|_{L_T^\infty H^3(\mathbb{R}; x^2 dx)};\\
\lambda_3^T(\vec{w}) &= (1+T)^{-2} \max_{k=0,1} \left\|\partial_x^k \vec{w}\right\|_{L_x^2 L_T^\infty};\\
\lambda_4^T(\vec{w}) &= (1+T)^{-2} \|\vec{w}\|_{L_x^1 L_T^\infty};\\
\lambda_5^T(\vec{w}) &= \left\|\partial_x^6 \vec{w}\right\|_{L_x^\infty L_T^2}.
\end{aligned}$$

Para $\vec{\phi} = (\varphi, \psi) \in X_{5,3}$, denotemos por $\vec{u} = \Psi(\vec{w}) = \Psi_{\vec{\phi}}(\vec{w})$ a solução do PVI linear não-homogêneo

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t \vec{u} + \partial_x^3 \vec{u} + F(\vec{w}) = 0 \\ \vec{u}(x,0) = \vec{\phi}(x) \end{array} \right., \tag{3.5}$$

onde $\vec{w} = (w,z) \in X^T$ e $F(\vec{w}) = -\left(w\partial_x w + \dfrac{1}{2}\partial_x^2 z^2, \partial_x(wz) \right)$.

Provemos que existem $\eta > 0$, $a = a\left(\left\|\vec{\phi}\right\|_{X_{5,3}}\right) > 0$ e $T = T\left(\left\|\vec{\phi}\right\|_{X_{5,3}}\right) > 0$ tais que, se $\left\|\vec{\phi}\right\|_{X_{5,3}} < \eta$ e $\vec{w} \in X^T(a)$ então $\vec{u} = \Psi(\vec{w}) \in X^T(a)$ e $\Psi : X^T(a) \to X^T(a)$ é uma contração. Considere a equação integral associada a (3.5)

$$\Psi(\vec{w})(t) = W(t)\vec{\phi} - \int_0^t W(t-\tau) F(\vec{w})\, d\tau. \tag{3.6}$$

Proposição 3.1. *Para* $\vec{\phi} \in X_{5,3}$ *e* $\vec{w} \in X^T$, *temos:*

(i) $\lambda_1(\Psi(\vec{w})) \lesssim \left\|\vec{\phi}\right\|_5 + T\lambda_1^2 + T^{1/2}(1+T)^2 \lambda_3\lambda_5 + (1+T)^2 \lambda_4\lambda_5 + T^{1/2}(1+T)^2 \lambda_1\lambda_3$;

(ii) $\lambda_2(\Psi(\vec{w})) \lesssim \left\|\vec{\phi}\right\|_{3,2} + T\left\|\vec{\phi}\right\|_5 + T\lambda_1\lambda_2 + T^2\lambda_1^2 + T^{3/2}(1+T)^2 \lambda_1\lambda_3 + T\lambda_1^2 + T^{3/2}(1+T)^2 \lambda_3\lambda_5$;

(iii) $\lambda_3(\Psi(\vec{w})) \lesssim \left\|\vec{\phi}\right\|_5 + T\lambda_1^2$;

(iv) $\lambda_4(\Psi(\vec{w})) \lesssim \left(\left\|\vec{\phi}\right\|_5 + \left\|\vec{\phi}\right\|_{3,2}\right) + T\lambda_1^2 + T^{3/2}(1+T)^2 \lambda_1\lambda_3 + T^{1/2}(1+T)^2 \lambda_1\lambda_3 + T\lambda_1\lambda_2$

$+ T^2\lambda_1^2 + T^{3/2}(1+T)^2 \lambda_3\lambda_5 + (1+T)^2 \lambda_4\lambda_5 + T(1+T)^2 \lambda_3\lambda_5$;

(v) $\lambda_5(\Psi(\vec{w})) \lesssim \left\|\vec{\phi}\right\|_5 + T\lambda_1^2 + T^{1/2}(1+T)^2 \lambda_3\lambda_5 + (1+T)^2 \lambda_4\lambda_5 + T^{1/2}(1+T)^2 \lambda_1\lambda_3$.

Demonstração. Para a demonstração da proposição, utilizamos o mesmo raciocínio utilizado na obtenção das estimativas (2.72)-(2.77)(capítulo 2). Usaremos a norma $|||f|||_s := \|f\|_0 + \|\partial_x^s f\|_0$, a qual é equivalente a norma $\|f\|_s$.

Note que

$$\begin{aligned}\lambda_1 (\Psi (\vec{w})) &\lesssim \left\|\vec{\phi}\right\|_5 + \int_0^t \|W (t-\tau) F (\vec{w})\|_{L_T^\infty H^5(\mathbb{R})} d\tau \\ &\lesssim \|\phi\|_5 + \int_0^t \|W (t-\tau) (w w_x)\|_{L_T^\infty H^5(\mathbb{R})} d\tau \\ &+ \int_0^t \left\|W (t-\tau) \partial_x^2 z^2\right\|_{L_T^\infty H^5(\mathbb{R})} d\tau \\ &+ \int_0^t \|W (t-\tau) \partial_x (wz)\|_{L_T^\infty H^5(\mathbb{R})} d\tau,\end{aligned} \tag{3.7}$$

e, essencialmente os termos à direita de (3.7) já foram estimados no capítulo 2. Note que estimar o termo $\partial_x (wz) = w_x z + w z_x$ é equivalente a estimar $w w_x$, pois controla-se a norma das coordenadas pela norma do vetor $\vec{w} = (w, z)$. De maneira análoga, estimamos $\lambda_j (\Psi (\vec{w}))$, para $j = 2, ..., 5$. $\square$

Agora, combinando as estimativas lineares, a proposição anterior e a equação integral (3.6), obtemos

$$\Lambda^T (\Psi (\vec{w})) \leq c\eta_0 (1+T) + c \left((1+T)^4\right) \left[\Lambda^T (\vec{w})\right]^2 \tag{3.8}$$

com $\eta_0 := \left\|\vec{\phi}\right\|_{3,2} + cT \left\|\vec{\phi}\right\|_5 < \eta$(a ser determinado) e $c > 1$ é uma constante dependendo apenas das estimativas lineares.

Primeiro, fixamos η, tal que $16c^2\eta = 1$. A seguir, escolhemos

$$a = 2c (1+T) \eta_0, \tag{3.9}$$

com T satisfazendo

$$4c^2 (1+T)^5 \eta_0 \leq 1/2. \tag{3.10}$$

Então $\Lambda^T (\Psi (\vec{w})) \leq a$ e consequentemente $\Psi (\vec{w}) \in X^T (a)$, para $\vec{w} \in X^T (a)$.

Para provar que $\Psi (\cdot)$ é uma contração procedemos como na proposição anterior e obtemos

$$\Lambda^T (\Psi (\vec{w}) - \Psi (\vec{p})) \leq c (1+T)^4 \left[\Lambda^T (\vec{w}) + \Lambda^T (\vec{p})\right] \Lambda^T (\vec{w} - \vec{p}) \tag{3.11}$$

para $\vec{p}, \vec{w} \in X^T(a)$. Como

$$c(1+T)^4\left[\Lambda^T(\vec{w})+\Lambda^T(\vec{p})\right] \leq 4c^2(1+T)^5\eta_0 < 1, \tag{3.12}$$

usando (3.9)-(3.12) obtemos o resultado. Logo, existe um único $\vec{u} \in X^T(a)$ com $\Psi_{\vec{\phi}}(\vec{u}) = \vec{u}$.

Agora, para $T_0 \in (0,T)$ e $\vec{p} \in X^T(a)$ com $\vec{p}(0) = \vec{\theta}$ temos

$$\begin{aligned}\Lambda^{T_0}\left(\Psi_{\vec{\phi}}(\vec{w}) - \Psi_{\vec{\theta}}(\vec{p})\right) &\lesssim (1+T_0)\left[\left\|\vec{\phi}-\vec{\theta}\right\|_5 + \left\|\vec{\phi}-\vec{\theta}\right\|_{3,2}\right] \\ &\lesssim (1+T_0)^4\left[\Lambda^{T_0}(\vec{w})+\Lambda^{T_0}(\vec{p})\right]\Lambda^{T_0}(\vec{w}-\vec{p}).\end{aligned} \tag{3.13}$$

Por (3.9) juntamente com (3.12) e (3.13) vemos que a aplicação $\tilde{\vec{\phi}} \to \tilde{\vec{u}}$ (de $V_{\vec{\phi}}$ a X^T) é Lipschitziana, onde $V_{\vec{\phi}}$ é uma vizinhança de $\vec{\phi}$ dependendo de T_0, com $T_0 \in (0,T)$. Consequentemente a solução $\vec{u} = (u,v) \in X^T(a)$ da equação integral (3.6) é uma solução forte do PVI (3.1). Em particular, $\vec{u}$ satisfaz a equação (3.1) no sentido das distribuições.

A unicidade da solução de (3.1) bem como o caso geral($s \geq 6$) são demonstradas como no capítulo 2.

Corolario 3.1. *Sob as mesmas hipóteses do teorema 3.1, existe uma vizinhança $\tilde{V}$ de $\vec{\phi} \in X_{s,3}\,(s \geq 5)$ tal que a aplicação $\vec{\phi} \to \vec{u}(t)$ de $\tilde{V}$ a X^T é suave.*

Demonstração. Seja $F(\vec{u}) = \left(u\partial_x u + (\partial_x v)^2 + v\partial_x^2 v, u\partial_x v + v\partial_x u\right)$ e defina $H : V \times X^T \to X^T$ por

$$H\left(\vec{\phi}, \vec{w}\right)(t) = \vec{w}(t) - \left(W(t)\vec{\phi} - \int_0^t W(t-\tau)F(w,z)(\tau)\,d\tau\right), \tag{3.14}$$

onde $\vec{u} = (u,v)$ e $\vec{w} = (w,z)$. Note que H está bem definida e pelo Teorema 3.1 $H\left(\vec{\phi}, \vec{u}\right) = 0$. Além disso,

$$D_{\vec{u}}H\left(\vec{\phi}, \vec{u}(t)\right)\vec{w}(t) = \vec{w}(t) + \int_0^t W(t-\tau)D_{\vec{u}}F(\vec{u})\vec{w}(\tau)\,d\tau. \tag{3.15}$$

De forma similar, podemos calcular a derivada de ordem k de H com respeito a $\vec{u} = (u,v)$, e consequentemente H é suave.

Para verificar que $D_{\vec{u}}H\left(\vec{\phi}, \vec{u}(t)\right) : X^T \to X^T$ é invertível, primeiro escrevemos

$$(I - D_{\vec{u}}H)\vec{w}(t) = -\int_0^t W(t-\tau)D_{\vec{u}}F(\vec{u})(\vec{w})(\tau)\,d\tau, \tag{3.16}$$

onde $I := Id_{X^T}$ e $D_{\vec{u}}H := D_{\vec{u}}H\left(\vec{\phi},\vec{u}\right)(t)$. Depois, como na proposição (3.1) obtemos estimativas para $\lambda_i^T\left(\left(I-D_{\vec{u}}H\right)\vec{w}\left(t\right)\right)(i=1,...,5)$, semelhantes as estimativas obtidas no capítulo anterior, desta feita em relação à $\lambda_i^T\left(\vec{u}\right)$ e $\lambda_i^T\left(\vec{w}\right)$. Por exemplo, vamos estimar alguns termos de

$$\lambda_3^T\left(\left(I-D_{\vec{u}}H\right)\vec{w}\left(t\right)\right)=\left(1+T\right)^{-2}\max_{k=0,1}\left\|\partial_x^k\left(\left(I-D_{\vec{u}}H\right)\vec{w}\left(t\right)\right)\right\|_{L_x^2L_T^\infty}.$$

Para $k=1$, o termo com derivada mais alta em $\lambda_3^T\left(\left(I-D_{\vec{u}}H\right)\vec{w}\left(t\right)\right)$ controla-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_0^t W\left(t-\tau\right)\left[\partial_x^2\left(z\partial_x v+v\partial_x z\right)\right]\left(\tau\right)d\tau\right\|_{L_x^2L_T^\infty}\\
&\leq c\left(1+T\right)^2\left\|\int_0^t W\left(-\tau\right)\left[\partial_x^2\left(z\partial_x v+v\partial_x z\right)\right]\left(\tau\right)d\tau\right\|_1\\
&=c\left(1+T\right)^2\left\|\int_0^t W\left(-\tau\right)\left[zv_{xxx}+vz_{xxx}+3v_{xx}z_{xx}+3v_xz_{xx}\right]\right\|_1\\
&\leq cT\left(1+T\right)^2\sup_{[0,T]}\left(\left\|zv_{xxx}\right\|_1+\left\|vz_{xxx}\right\|_1+\left\|v_{xx}z_x\right\|_1+\left\|v_xz_{xx}\right\|_1\right)\\
&\leq cT\left(1+T\right)^2\lambda_1^T\left(\vec{u}\right)\lambda_1^T\left(\vec{w}\right),
\end{aligned}$$

onde utilizamos o efeito regularizante dado pelo lema (3.1) item (ii), com $\rho=2$ e $r=1$. Os demais termos podem ser estimados de maneira análoga às proposições do capítulo 2 e, por isso, não iremos repetir.

Depois disso, computando $\lambda_i^T\left(\left(I-D_{\vec{u}}H\right)\vec{w}\left(t\right)\right)(i=1,...,5)$ e usando a definição de $\Lambda^T\left[\left(I-D_{\vec{u}}H\right)\vec{w}\left(t\right)\right]$ temos que, para $\vec{w}\in X^T$, vale

$$\begin{aligned}
\Lambda^T\left[\left(I-D_{\vec{u}}H\right)\vec{w}\left(t\right)\right]&\leq\tilde{c}\left(1+T\right)^4\Lambda^T\left(\vec{u}\right)\Lambda^T\left(\vec{w}\right)\\
&\leq 2\tilde{c}^2\left(1+T\right)^5\Lambda^T\left(\vec{w}\right)\\
&<\frac{1}{2}\Lambda^T\left(\vec{w}\right)
\end{aligned}\tag{3.17}$$

escolhendo a e T como em (3.9) e (3.10) e $\vec{u}\in X^T\left(a\right)$, onde $\tilde{c}>1$ como antes. Portanto

$$\Lambda^T\left(I-D_{\vec{u}}H\left(\vec{\phi},\vec{u}\right)(t)\right)<1\tag{3.18}$$

e consequentemente $\left(I-\left(I-D_{\vec{u}}H\right)\right)=D_{\vec{u}}H\in B\left(X^T,X^T\right)$ é invertível (veja Teorema 1.9). Pelo Teorema da Função Implícita existe $\tilde{V}\subset V$($\tilde{V}$-vizinhança de $\vec{\phi}\in H^s\left(\mathbb{R}\right)\cap$

$H^3\left(x^2dx\right)$) e uma aplicação $h:\tilde{V}\rightarrow X^T$ tal que $H\left(\vec{w_0},h\left(\vec{w_0}\right)\right)=0$, ou seja,

$$h\left(\vec{w_0}\right)=W\left(t\right)\vec{w_0}-\int_0^t W\left(t-\tau\right)F\left(h\left(\vec{w_0}\right)\right)\left(\tau\right)d\tau:=\vec{w}\left(t\right)$$

é a solução de (3.1) com dado inicial $\vec{w_0}\in\tilde{V}$ e h é suave. $\square$

Capítulo 4

Considerações Finais

O objetivo do presente capítulo é trazer ao leitor algumas considerações e observações sobre a teoria desenvolvida neste trabalho.

No capítulo 2, mostramos a boa colocação local com dado inicial pequeno para o problema de Cauchy associado à equação Kuramoto-Velarde generalizada com dispersão sem o termo dissipativo nos espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R}) \cap H^3(\mathbb{R}; x^2dx)$, com $s \geq 5$. Podemos destacar o fato de que em [14], o resultado foi melhorado, ou seja, foi mostrada a boa colocação local com dado inicial pequeno nos espaços de Sobolev $H^k(\mathbb{R}) \cap H^{k-2}(\mathbb{R}; x^2dx)$, com $k \in \mathbb{N}$ $k \geq 3$. Para isso, foram introduzidos os chamados espaços de Besov com peso e os multiplicadores Littlewood-Paley (veja [14]). É importante destacar que a utilização dos espaços de Besov permitiu que a norma da função maximal de L_x^1 podesse ser estimada, de uma maneira fina, utilizando a norma da função maximal de L_x^4. Tal estimativa, obtida por Kenig e Ruiz, possibilitou o desenvolvimento de resultados de boa colocação nos espaços fracionais com peso de Besov (tais resultados aparentemente de grande dificuldade se considerados os espaços de Sobolev com peso).

No capítulo 3, mostramos a boa colocação local com dado inicial pequeno para o problema de Cauchy associado ao sistema super KdV. Na introdução deste trabalho, começamos a questionar a existência de boas propriedades para o sistema super KdV, como por exemplo leis de conservação, soluções tipo onda solitárias, scaling, entre outras. Com relação as leis de conservação, é de nosso conhecimento a existência da média

$$Q(u,v) = \int u + v \, dx,$$

contudo elas não auxiliam no que diz respeito à boa colocação global do problema de Cauchy para a o sistema super KdV (veja [4]). No que diz respeito a soluções do tipo ondas solitárias $(u_c(x,t), v_c(x,t)) = (\varphi(x-ct), \psi(x-ct))$, conhecemos solução da forma

$$(\varphi_c(x), \psi_c(x)) = \left(\frac{3c}{cosh^2(\sqrt{c}/2)\,x}, 0 \right).$$

A propriedade que aparece com mais destaque dentre estas é o scaling. A existência do scaling para a super KdV sugere que (0.4) não é bem posto em $X^{r,s} = H^r(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ para todo $r < -3/2$ e $s < -1$, com $r, s \in \mathbb{R}$. Com isso, é possível aumentar a região de má colocação para (0.4)(veja [4]). Como justificativa do comentário anterior, temos a seguinte afirmação:

Afirmação 4.1. *Se $\vec{u} = (u, v)$ é solução de (0.4) com dado inicial (u_0, v_0), então*

$$\begin{aligned} u_\lambda(x,t) &= \lambda^2 u\left(\lambda x, \lambda^3 t\right), com \quad u_\lambda(x,0) = \lambda^2 u_0(\lambda x) \\ v_\lambda(x,t) &= \lambda^{3/2} v\left(\lambda x, \lambda^3 t\right), com \quad v_\lambda(x,0) = \lambda^{3/2} v_0(\lambda x) \end{aligned} \tag{4.1}$$

também é solução.

De fato, seja

$$\begin{cases} u_\lambda(x,t) = \lambda^\alpha u(\lambda x, \lambda^3 t), & \lambda > 0, \\ v_\lambda(x,t) = \lambda^\beta v(\lambda x, \lambda^3 t), & \lambda > 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Observemos primeiro que

$$\begin{aligned} \partial_t u_\lambda + \partial_x^3 u_\lambda + u_\lambda \partial_x u_\lambda + \partial_x^2 v_\lambda^2 = 0 \Longleftrightarrow \\ \lambda^{\alpha+3} u_t + \lambda^{\alpha+3} u_{xxx} + \lambda^{2\alpha+1} u u_x + \lambda^{2\beta+2}(2 v v_{xx} + v_x) = 0 \Longleftrightarrow \\ \lambda^{\alpha+3}(u_t + u_{xxx}) = -\lambda^{2\alpha+1} u u_x - \lambda^{2\beta+2} \partial_x^2 v^2 \Longleftrightarrow \\ \lambda^{\alpha+3}\left(-u u_x - \partial_x^2 v^2\right) = -\lambda^{2\alpha+1} u u_x - \lambda^{2\beta+2} \partial_x^2 v^2. \end{aligned}$$

Logo, obtemos

$$\lambda^{\alpha+3} = \lambda^{2\alpha+1} = \lambda^{2\beta+2}. \tag{4.3}$$

Agora, vemos que

$$\begin{aligned} \partial_t v_\lambda + \partial_x^3 v_\lambda + \partial_x(u_\lambda v_\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \\ \lambda^{\beta+3} v_t + \lambda^{\beta+3} v_{xxx} + \lambda^{\alpha+\beta+1} \partial_x u v = 0 \Longleftrightarrow \\ \lambda^{\beta+3}(-\partial_x(uv)) = -\lambda^{\alpha+\beta+1} \partial_x(uv). \end{aligned}$$

Logo, obtemos

$$\lambda^{\beta+3} = \lambda^{\alpha+\beta+1}. \tag{4.4}$$

Por (4.3) e (4.4), chegamos a conclusão que α e β devem satisfazer as relações

$$\begin{cases} \lambda^{\alpha+3} = \lambda^{2\alpha+1} = \lambda^{2\beta+2} \\ \lambda^{\beta+3} = \lambda^{\alpha+\beta+1}, \end{cases} \tag{4.5}$$

ou seja, $\alpha = 2$ e $\beta = 3/2$. Portanto, se $\vec{u} = (u, v)$ resolve (0.1) então $\vec{u_\lambda} = (u_\lambda(x,t), v_\lambda(x,t))$ como em (4.1) também resolve, o que prova a afirmação.

Agora gostaríamos de saber quantas derivadas são permitidas para que $\|D^r u_\lambda(x,0)\|_0$ e $\|D^s v_\lambda(x,0)\|_0$ tornem-se invariantes. Tomando a derivada homogênea de ordem r e s em $L^2(\mathbb{R})$, respectivamente, para u_λ e v_λ obtemos:

$$\begin{aligned} \|D^r u_\lambda(x,0)\|_0^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{D^r u_\lambda}(\cdot,0)\right|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2r} |\widehat{u_\lambda}(\cdot,0)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^{2r} |y|^{2r} |\lambda|^2 |\hat{u_0}(y)|^2 \lambda \, dy \\ &= \lambda^{2r+3} \int_{\mathbb{R}} |y|^{2r} |\hat{u_0}(y)|^2 dy \\ &= \lambda^{2r+3} \|D^r u_0(x)\|_0^2, \end{aligned}$$

onde utilizamos a mudança de variável $y = \frac{\xi}{\lambda}$ e a propriedade de dilatação da Transformada de Fourier para escrever $\widehat{u_\lambda}(\xi) = \lambda^2 \hat{u_0}(\lambda\xi) = \lambda \hat{u_0}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$. Portanto, $\|D^r u_\lambda(x,0)\|_0$ é invariante se $2r+3=0$, ou seja, $r = -3/2$. Analogamente aos cálculos feitos acima, para a coordenada v_λ, temos que $\|D^s v_\lambda(x,0)\|_0$ é invariante se $s = -1$.

Observe ainda que a relação entre r e s é dada por $r - s = -1/2$, pois se exigirmos

$$\begin{aligned} \|(D^r u_\lambda(x,0), D^s v_\lambda(x,0))\|_0^2 &= \|D^r u_\lambda(x,0)\|_0^2 + \|D^s v_\lambda(x,0)\|_0^2 \\ &= \|D^r u_0(x)\|_0^2 + \|D^s v_0(x)\|_0^2 \\ &= \|(D^r u_0(x), D^s v_0(x))\|_0^2 \end{aligned}$$

devemos ter $2r+3 = 2s+2$, ou seja, $r - s = -1/2$.

Para finalizar, mencionamos o fato de que existe uma grande expectativa para o melhoramento do resultado presente no capítulo 3.

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R.A., Sobolev Spaces, New York-San Francisco-London, AP, 1975.

[2] ARGENTO, C. R. R. O Problema de Cauchy para a Equação de Kuramoto-Velarde Generalizada com Dispersão, Ph.D. thesis IMPA, Rio de Janeiro, 1997.

[3] BARROS, A.S.,O Problema de Cauchy para a equação super Korteweg-de Vries, Tese de Doutorado, UNICAMP, Campinas, 2004.

[4] BARROS, A.S., Local well-posedness for super Korteweg-de Vries equations, Nonlinear Analysis, Vol.68, Number 6, 2008.

[5] BARTLE, R.G., The Elements of Integration, John Wiley and Sons, New York, 1966.

[6] BREZIS, H.,Análisis funcional: Teoria y aplicaciones. Alianza Editorial, Madrid, 1984.

[7] IÓRIO, Rafael José, IÓRIO, Valéria, Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução, Projeto Euclides. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1988.

[8] IÓRIO, Rafael José, NUNES, W. V. L.,Introdução às Equações de Evolução não Lineares. 18 Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA.

[9] KENIG, C. E., PONCE, G.,VEGA, L.,Small solutions to nonlinear Schrödinger equations, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 10, no 3, 1993, p.255-288.

[10] KENIG, C. E., PONCE, G.,VEGA, L., Well-Posedness and Scattering Results for the Generalized Korteweg-de Vries Equation via the Contraction Principle, Communications on Pure and applied Mathematics, Vol. XLVI, 527-620, 1993.

[11] KREYSZIG, E., Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley and Sons, 1978.

[12] LANG, S.,Analysis II, Columbia University, 1969.

[13] LINARES, F., PONCE, G., Introduction to nonlinear dispersive equations, Publicações Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro, 2003.

[14] PILOD, D.,The Cauchy problem for the dispersive Kuramoto-Velarde equation, Tese de Doutorado apresentada no IMPA, Rio de Janeiro, Junho de 2006.

[15] STEIN, E. M.,Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton University Press, 1970

[16] STEIN, E. M.,Interpolation of linear operators. Trans. Amer. Math. Soc. 83 (1956), 482-492.