

Operador Laplaciano Discreto  
via Triangulação de Delaunay Intrínseca

José Borges dos Santos Filho

Agosto de 2008

## Resumo

O objetivo desta dissertação é apresentar um análogo discreto do operador laplaciano, ou seja, um operador linear definido no conjunto das funções lineares por partes em uma malha de triângulos que possua o máximo de propriedades análogas ao operador laplaciano contínuo sobre uma superfície. Em particular, mostraremos que se a malha satisfaz ao critério de Delaunay, o laplaciano obedece a uma versão discreta do princípio do máximo, que possui importância semelhante ao princípio do máximo na teoria das funções harmônicas. Apresentamos ainda três aplicações do laplaciano discretizado: a primeira tem como objetivo obter parametrizações de malhas para efeito de mapeamento de textura; a segunda consiste na suavização de malhas por meio do processo de difusão; a terceira e última aplicação visa identificar formas e simetrias de objetos por meio das curvas de contorno associadas às autofunções do laplaciano.

### **Abstract**

The main goal of this work is to present a discrete analogous of the laplacian operator, that is, a linear operator on the set of piecewise linear functions over a triangular mesh that has similar properties to the continuous laplacian over a surface. Particularly, we will show that if the mesh satisfies a Delaunay criterion, the laplacian obeys a discrete version of the maximum principle, which importance in the discrete setting is similar to the importance of the maximum principle in the theory of harmonic functions. We also present three applications of the discrete laplacian: the first one has as objective to get parametrizations of meshes for texture mapping; the second one consists of mesh smoothing by a diffusion process; the third and last application aims to identify forms and symmetries of objects by means of the contour curves associated to the eigenfunctions of the laplacian operator.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Operador Laplaciano</b>	<b>7</b>
2.1	Operador Laplaciano Contínuo . . . . .	7
2.2	Propriedades do Laplaciano . . . . .	11
2.3	Discretização do Laplaciano Contínuo . . . . .	12
2.4	Propriedades do Laplaciano Discreto . . . . .	13
2.5	Laplaciano Discreto Geométrico . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Triangulação de Delaunay Intrínseca</b>	<b>18</b>
3.1	Triangulação de Delaunay no Plano . . . . .	18
3.2	Algoritmo de <i>Flip</i> de Arestas no Plano . . . . .	21
3.3	Extensão do Algoritmo de <i>Flip</i> Para Malhas no Espaço $\mathbb{R}^3$ . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Aplicações do Laplaciano Discreto</b>	<b>28</b>
4.1	Mapeamento de Textura . . . . .	28
4.2	Suavização de Superfícies . . . . .	34
4.3	Identificação de Formas e Simetrias de Malhas . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>39</b>

# Agradecimentos

Primeiro agradeço a Deus pela oportunidade de desenvolver este trabalho. Agradeço a meus pais, José Borges dos Santos e Therezinha Bispo dos Santos. De forma especial, agradeço a Vinícius Mello, meu orientador, sempre disposto a auxiliar-me, embora muitas fossem as suas atividades. Destaco e agradeço as valiosas contribuições do meu colega de mestrado Leonardo Carvalho na implementação de alguns algoritmos. Agradeço também aos professores, colegas, funcionários e a tantos outros que de forma direta ou indireta contribuíram para que este trabalho chegasse ao seu final, após exaustivo esforço e dedicação.

Para ser grande, sê inteiro: Nada teu exagera ou exclui. Sê todo em cada coisa.  
Põe quanto és no mínimo que fazes. Assim em cada lago a lua toda brilha,  
porque alta vive.

# Capítulo 1

## Introdução

É consenso hoje que a *Computação Gráfica* é uma necessidade em quase todas as áreas do conhecimento, pois através dela é possível visualizar objetos em fase de projeto ou fora do alcance de nossa percepção visual, bem como fora da nossa realidade tridimensional. A realidade do dia a dia consiste em um universo regido pelas leis da física, e para compreender os fenômenos e objetos existentes neste mundo físico, inicialmente lançamos mão de modelos matemáticos abstratos, geralmente contínuos, ou seja, que não são encontrados no mundo físico. Em seguida, procuramos uma representação simbólica e finita desse modelo matemático, ou seja, buscamos uma discretização do modelo matemático que permita sua implementação e visualização por meio de um computador.

Como exemplo podemos citar o operador laplaciano definido em funções  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  duas vezes diferenciáveis, cuja expressão para  $n = 3$  é dada por

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Este operador surge de forma natural no estudo dos processos de difusão térmica, aparecendo no segundo membro da chamada equação de difusão,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \eta \Delta u,$$

onde  $u = u(x, y, z, t)$  representa o campo de temperatura; também aparece em processos vibratórios na equação da onda,

$$\Delta f = \lambda f$$

onde  $\lambda$  é um coeficiente associado ao meio pelo qual a onda se propaga.

No transcórre deste trabalho será apresentado um laplaciano contínuo intrínseco a uma superfície, ou seja, um laplaciano definido em funções cujo domínio é uma superfície, mas nosso principal objetivo será determinar um laplaciano discretizado que se aproxime ao máximo do laplaciano contínuo, ou seja, um laplaciano cujo domínio seja o conjunto das funções definidas em uma superfície discretizada. É possível obter esta discretização de diversas maneiras e dependendo da escolha pode-se priorizar informações combinatórias ou geométricas de uma malha. Um das maneiras de se discretizar o laplaciano contínuo é através de

diferenças finitas, só que este método limita-se ao uso de malhas de retângulos, limitação que pode acarretar uma série de dificuldades. Apresentamos neste trabalho um método de discretização que se destaca por priorizar informações geométricas da malha e por possuir várias propriedades do laplaciano contínuo, entre elas uma versão discreta do princípio do máximo, caso a triangulação da malha satisfaça um critério de Delaunay.

Concluiremos exemplificando três das diversas aplicações do laplaciano discreto: a primeira é o mapeamento de textura, onde inicialmente determinamos uma malha cuja triangulação é a especial triangulação de Delaunay, na qual o laplaciano discretizado satisfaz ao princípio do máximo, possibilitando esta propriedade a construção de uma parametrização homeomorfa da superfície discretizada (malha) em uma região poligonal do plano. De posse desta parametrização, faz-se o mapeamento de textura do plano na malha. A segunda aplicação são as curvas de nível das autofunções do laplaciano, também chamadas de curvas de contorno, permitindo conhecer a sua geometria. Por fim, utilizaremos o laplaciano para suavização de superfícies, isso porque ao aplicá-lo em uma malha, uma pequena perturbação é dispersada em sua vizinhança, suavizando assim regiões com altas frequências, enquanto a forma principal da malha é apenas levemente deformada.

Este trabalho teve como fonte principal o artigo [1] na parte teórica e os artigos [3],[13],[4] e [5] na parte de aplicações.



## Capítulo 2

# Operador Laplaciano

Neste capítulo vamos definir o operador laplaciano em uma superfície, apresentar algumas das suas propriedades e resultados e encontrar um análogo discreto deste operador, ou seja, determinar um laplaciano definido em uma malha de triângulos que possua o maior número de propriedades similares as do laplaciano contínuo definido em uma superfície.

### 2.1 Operador Laplaciano Contínuo

O operador laplaciano surge naturalmente do estudo de processos de difusão térmica, aparecendo no segundo membro da equação do calor, também chamada de equação de difusão. Existem diversas variações para a equação do calor, a mais clássica é:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \eta \Delta u, \quad (2.1)$$

onde  $u = u(x, y, z, t)$  representa o campo de temperatura,  $\Delta u$  é o laplaciano de  $u$  no  $R^3$  dado por

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

e  $\eta$  é o coeficiente de difusão. Essa equação descreve a maneira como o calor se difunde em um meio homogêneo, isotrópico e que não possua fontes de calor.

Também em processos vibratórios estudados pela física o laplaciano aparece no segundo membro da equação da onda,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \Delta u, \quad (2.2)$$

onde  $c$  representa coeficiente associado ao meio pelo qual a onda se propaga. Esta equação modela as vibrações transversais de baixa amplitude de uma membrana  $S$  fina fixada em um aro com formato  $\partial S$ : se  $\partial S$  é um retângulo, estaremos estudando as vibrações de uma membrana retangular; se  $\partial S$  é um círculo, estudamos as vibrações de uma membrana circular (um tambor), e assim por diante.

A equação da onda e a sua relação com o laplaciano foi estudado de forma lúdica pelo físico Ernest Chladni, em seu livro “Discoveries Concerning the Theories of Music” publicado em 1787. Neste livro ele informa as observações

obtidas ao pôr areia sobre um prato de metal fino em vibração, notando que a areia acumulava-se em certas zonas, formando padrões surpreendentemente complexos (figura 2.1). Este comportamento pode ser explicado pela teoria das

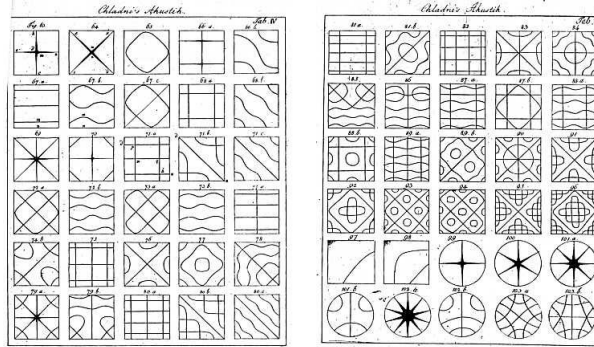


Figura 2.1: Padrões formados pela areia acumulada em algumas regiões de um prato de metal submetido a várias vibrações (experimentos de Ernest Chladni-1700).

ondas estacionárias, que podem ser representadas pelas soluções da equação

$$\Delta f = \lambda f,$$

ou seja, pelas autofunções do laplaciano. Os zeros destas autofunções, denominados de conjuntos nodais, correspondem aos locais onde a areia se acumula no prato de Chladni.

Veremos nas próximas seções mais detalhes sobre estas autofunções. Por hora, começaremos com alguns conceitos e resultados de geometria diferencial que serão utilizados neste trabalho e por isso faz-se necessário conceituá-los.

### 2.1.1 Geometria Diferencial

Como vimos anteriormente, o laplaciano está definido em um espaço de funções  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$  e quando  $n = 3$  o laplaciano é dado por

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Nesta seção nosso objetivo é encontrar uma expressão para o laplaciano definido em funções  $f \in C^2(S)$  onde  $S$  é uma superfície regular, ou seja, queremos um laplaciano intrínseco a uma superfície regular. Mas o que é uma superfície regular? Vejamos a definição segundo [8], nossa principal referência neste assunto:

**Definição 1** (Superfícies Regulares). *Um subconjunto  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  diz-se uma superfície regular se, para cada  $p \in S$ , existirem uma vizinhança aberta  $V \subset \mathbb{R}^3$  de  $p$ , um aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^2$ , e uma bijeção  $\varphi : U \rightarrow V \cap S$  com as seguintes propriedades:*

- i)  $\varphi$  é de classe  $C^\infty$ ;
- ii)  $\varphi$  é um homeomorfismo;
- iii) para qualquer  $q \in U$  a matriz jacobiana  $J\varphi(q)$  tem posto dois.

Uma função  $\varphi$  com tais características é dita uma parametrização local de  $S$ , ou seja, uma vizinhança parametrizada de  $p$  contida em  $S$ . Denotaremos os pontos de  $U$  por  $(u, v)$ , sendo  $u$  e  $v$  parâmetros locais de  $S$ . As derivadas parciais de  $\varphi$  denotaremos por  $\varphi_u$  e  $\varphi_v$ .

Ainda precisamos de mais dois conceitos para definir o laplaciano intrínseco de funções  $f \in C^2(S)$ , o gradiente e o divergente de  $f$ .

**Definição 2** (Gradiente). *Seja  $S$  uma superfície regular e  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. O gradiente de  $f$  é o campo de vetores tangentes com valores em  $S$ , denotado por  $\nabla f$ , assim definido: Dado  $p \in S$  e  $\vec{v} \in T_p S$ , onde  $T_p S$  é o plano tangente a  $S$  em  $p$ , temos:*

$$df_p(\vec{v}) = \langle \nabla f(p), \vec{v} \rangle$$

onde  $df_p(\vec{v})$  é a derivada de  $f$  em  $p$ .

De acordo com a definição 2 e sabendo que  $df_p(\varphi_u) = f_u$  e  $df_p(\varphi_v) = f_v$ , verifica-se que o gradiente em coordenadas é dado por:

$$\nabla f = \frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2} \varphi_u + \frac{f_v E - f_u F}{EG - F^2} \varphi_v \quad (2.3)$$

onde  $E, F$  e  $G$  são os coeficientes da primeira forma fundamental (maiores detalhes consultar [8]). Observe que se  $S$  for o plano  $R^2$ ,  $E = G = 1$  e  $F = 0$ , sabendo que no plano  $R^2$   $\varphi_u = (1, 0)$  e  $\varphi_v = (0, 1)$ , o gradiente de  $f$  definido no  $R^2$  é, portanto,

$$\nabla f = (f_u, f_v).$$

Vejam agora qual a definição do divergente de  $f \in C^2(S)$ , uma vez que, como já mencionamos anteriormente, é fundamental para o conceito do laplaciano.

**Definição 3** (Divergente). *Seja  $w$  um campo de vetores definido em  $U \subset S$ , a divergência de  $w$  é a aplicação  $\text{div } \vec{w} : U \subset S \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, para cada  $p \in U$ ,  $\text{div } \vec{w}(p)$  é o traço da aplicação linear  $D \vec{w}_p$ ,*

onde  $D \vec{w}_p$  é a matriz da derivada covariante de  $w$  no ponto  $p \in S$ . Explicitaremos  $D \vec{w}_p$  com relação as bases  $\{(1, 0), (0, 1)\}, \{\varphi_u, \varphi_v\}$ :

$$D \vec{w}_p = \begin{bmatrix} a_u + a\Gamma_{11}^1 + b\Gamma_{12}^1 & a_v + a\Gamma_{12}^1 + b\Gamma_{22}^1 \\ b_u + a\Gamma_{11}^2 + b\Gamma_{12}^2 & b_v + a\Gamma_{12}^2 + b\Gamma_{22}^2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

sendo  $w = a\varphi_u + b\varphi_v$  e  $\Gamma_{ij}^k$  os símbolos de Christoffel (maiores detalhes consultar [8]). A partir da definição 3 e de 2.4 concluímos que,

$$\text{div}(w) = (a_u + a\Gamma_{11}^1 + b\Gamma_{12}^1) + (b_v + a\Gamma_{12}^2 + b\Gamma_{22}^2). \quad (2.5)$$

Finalmente estamos prontos para definir o laplaciano e obter uma equação para expressá-lo em uma superfície regular. Vejam primeiro a definição e logo após o explicitaremos.

**Definição 4** (Operador Laplaciano). *Dado uma superfície  $S$  associaremos a ela um operador diferencial de segunda ordem, o operador laplaciano, definido como  $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$  onde  $f \in C^2(S)$ , ou seja,  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função real definida em  $S$  duas vezes diferenciável.*

A partir de 2.3 e 2.5 o operador laplaciano de uma função  $f \in C^2(S)$  onde  $S$  é uma superfície regular em coordenadas é dado por:

$$\Delta f = (a_u + a\Gamma_{11}^1 + b\Gamma_{12}^1) + (b_v + a\Gamma_{12}^2 + b\Gamma_{22}^2), \quad (2.6)$$

sendo

$$a = \frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2} \quad \text{e} \quad b = \frac{f_v E - f_u F}{EG - F^2}.$$

Observe que no caso particular do plano  $a = f_u$  e  $b = f_v$ , conseqüentemente o laplaciano de  $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$  é dado por

$$\Delta f = f_{uu} + f_{vv}. \quad (2.7)$$

Um resultado importante e que nos interessa neste trabalho é o teorema da divergência cuja demonstração pode ser vista em [8],

**Teorema 1** (Teorema da Divergência). *Seja  $f$  um campo de vetores tangentes a uma superfície  $S$ , e  $\Omega \subseteq S$  uma região poligonal. Então*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(f) dA = \int_{\gamma} f \cdot n ds, \quad (2.8)$$

onde  $\gamma(s)$  é a fronteira de  $\Omega$  e  $n$  é o vetor unitário ortogonal a  $\gamma'(s)$  e que aponta para fora de  $\Omega$ .

A importância deste teorema está no fato dele possibilitar a demonstração do corolário seguinte também conhecido como *primeira identidade de Green*.

**Corolário 2** (Primeira Identidade de Green). *Sejam  $f, g : \Omega \subset S \rightarrow \mathbb{R}$  funções escalares definidas em uma região  $\Omega \subset S$  que possuem derivadas parciais e contínuas então,*

$$\int_{\Omega} \Delta f g dA = \int_{\gamma} g \frac{\partial f}{\partial n} ds - \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dA, \quad (2.9)$$

onde  $\gamma$  é fronteira de  $\Omega \subset S$  e  $S$  uma superfície regular.

*Demonstração.* Substituindo em 2.5  $w$  por  $g\nabla f$  obtemos,

$$\operatorname{div}(g\nabla f) = (g_u a + g a_u + g a \Gamma_{11}^1 + g b \Gamma_{12}^1) + (g_v b + g b_v + g a \Gamma_{12}^2 + g b \Gamma_{22}^2) \quad (2.10)$$

por 2.3 sabemos que

$$\nabla f = \frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2} \varphi_u + \frac{f_v E - f_u F}{EG - F^2} \varphi_v$$

e

$$\nabla g = \frac{g_u G - g_v F}{EG - F^2} \varphi_u + \frac{g_v E - g_u F}{EG - F^2} \varphi_v.$$

Com essas duas equações é fácil mostrar que,

$$\nabla f \cdot \nabla g = ag_u + bg_v, \quad (2.11)$$

onde

$$a = \frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2} \quad \text{e} \quad b = \frac{f_v E - f_u F}{EG - F^2}.$$

Substituindo agora 2.11 em 2.10 e usando 2.5 obtemos

$$\operatorname{div}(g\nabla f) = \nabla g \nabla f + g \operatorname{div}(\nabla f),$$

logo

$$\operatorname{div}(g\nabla f) = \nabla f \cdot \nabla g + g\Delta f. \quad (2.12)$$

Fazendo  $v = g\nabla f$  em 2.8 obtemos

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(g\nabla f) dA = \int_{\gamma} g\nabla f \cdot n ds. \quad (2.13)$$

Por fim, substituindo 2.12 em 2.13 obtemos

$$\int_{\Omega} \Delta f g dA = \int_{\gamma} g \frac{\partial f}{\partial n} ds - \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dA,$$

onde  $\nabla f \cdot n$  que aparece na integral de linha de 2.13 foi substituída por  $\frac{\partial f}{\partial n}$ , sendo assim a derivada direcional de  $f$  na direção do vetor normal  $n$ , também chamada de derivada normal de  $f$ .  $\square$

A *primeira identidade de Green* terá fundamental importância nesse trabalho, pois ela possibilitará definir o laplaciano em um conjunto de funções lineares por partes definidas em uma malha de triângulos, ou seja, um laplaciano discretizado.

## 2.2 Propriedades do Laplaciano

Na seção anterior definimos o laplaciano em uma superfície,

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u).$$

Apresentamos a seguir algumas propriedades desse operador onde o produto interno utilizado é:

$$\langle v, u \rangle_{C^2(S)} = \int_S uv dA$$

sendo  $u, v \in C^2(S)$ .

1. Elemento neutro

$\Delta u = 0$  sempre que  $u$  for uma constante. Este resultado é óbvio pela própria definição do laplaciano.

2. Simetria

$\langle \Delta u, v \rangle_{C^2(S)} = \langle u, \Delta v \rangle_{C^2(S)}$  sempre  $u, v \in C^2(S)$  e se anularem em  $\partial S$ . Esta propriedade é facilmente verificada usando 2.9.

3. Precisão linear

$\Delta u = 0$  Sempre que  $S$  for parte do plano euclidiano e  $u = ax + by + cz$  é a função linear do plano. De acordo com 2.7,  $\Delta u$  envolve apenas soma das derivadas parciais de  $u$  de segunda ordem, como  $u$  é uma função linear definida no plano temos  $\Delta u = 0$ .

4. Suporte Local

Para algum par de pontos  $p \neq q$   $\Delta u(p)$  independe  $u(q)$ , ou seja, alterando o valor da função não afetará o valor local do laplaciano.

5. Princípio do máximo

$\Delta u = 0$  no interior de  $S$ , então  $u$  não possui um máximo (ou mínimo) no interior de  $S$ , exceto quando  $u = cte$ . A verificação desta propriedade pode ser vista em [12]

## 2.3 Discretização do Laplaciano Contínuo

Uma discretização do laplaciano pode ser obtida de maneiras diferentes, podendo conter mais informações combinatorias ou mais informações geométricas a depender da discretização escolhida. Se considerado apenas o aspecto combinatorio, informações métricas são desprezadas, como o comprimento de arestas ou ângulos da malha. Veremos mais tarde que esse tipo de discretização do laplaciano, em geral, não é uma boa escolha.

Definiremos, na próxima seção, o laplaciano discreto para uma malha  $\mathcal{M}$  de triângulos, mas antes vejamos qual a definição para uma malha de triângulos.

**Definição 5** (Triangulação). *Dado um conjunto  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  de pontos de uma superfície  $S$ , uma triangulação de  $V$  é um complexo simplicial  $\mathcal{M}$  de ordem dois, ou seja, é um conjunto de triângulos, em que dados quaisquer dois triângulos, uma das quatro situações ocorre: eles são disjuntos, eles têm exatamente um vértice em comum, eles têm exatamente uma aresta em comum ou são iguais.*

Vejamos agora a definição do laplaciano em malhas de triângulos.

**Definição 6** (Operador Laplaciano Discreto). *Considere uma malha triangular  $\mathcal{M}$  de uma superfície  $S$ , com um conjunto de vértices  $V$ , conjunto de arestas  $E$  e um conjunto de faces  $F$ . Definimos o operador laplaciano discreto  $\Delta_d$  para  $\mathcal{M}$  pela ação linear de funções  $u_i$  definidas nos vértices, como:*

$$(\Delta_d u)_i = \sum_j w_{ij} (u_i - u_j) \quad (2.14)$$

onde  $i$  e  $j$  são índices associados aos vértices.

O fator determinante na definição 6 é justamente o peso  $w_{ij}$ . Verificaremos nas próximas seções que  $w_{ij}$  está associado a cada aresta da malha  $\mathcal{M}$ , e que este valor determinará que aspecto da malha será priorizado. A próxima seção destaca algumas propriedades do laplaciano discreto  $\Delta_d$ .

## 2.4 Propriedades do Laplaciano Discreto

Cada propriedade a seguir do laplaciano discreto  $\Delta_d$  tem sua motivação centrada em uma propriedade do laplaciano contínuo, essas propriedades são verificadas a partir das propriedades da matriz cuja as entradas são os pesos  $w_{ij}$ , sendo que  $w_{ij} = 0$  sempre que  $i$  e  $j$  não são vértices de uma mesma aresta de  $\mathcal{M}$ .

1. Simetria  
 $w_{ij} = w_{ji}$ . Matriz simétrica com autovalores associados a autovetores ortogonais. Esta propriedade é verificada devido ao fato de  $e_{ij}$  e  $e_{ji}$  representarem a mesma aresta.
2. Suporte local  
Mudando o valor da função  $u_j$  não alterará a ação do laplaciano  $(\Delta_d u)_i$ , se  $i$  e  $j$  não formam uma aresta na malha. Laplaciano é um conceito local.
3. Precisão Linear  
 $(\Delta_d u)_i = 0$  em cada vértice, sempre que se tenha uma malha mergulhada no plano e  $u$  é uma função linear deste plano.
4. Princípio do Máximo  
Caso  $w_{ij} < 0$ , sempre que  $i \neq j$ , o princípio do máximo também é satisfeito. Esta propriedade será verificada em seção seguinte.

## 2.5 Laplaciano Discreto Geométrico

Nosso objetivo nesta seção é obter um laplaciano discretizado que considere propriedades geométricas de uma malha qualquer  $\mathcal{M}$ .

Como foi mostrado em 2.9 o operador laplaciano definido sobre uma superfície  $\mathcal{M}$  satisfaz a primeira identidade de Green:

$$\int_{\mathcal{M}} \Delta f g dA = \int_{\gamma} g \frac{\partial f}{\partial n} ds - \int_{\mathcal{M}} \langle \nabla f, \nabla g \rangle dV \quad (2.15)$$

quaisquer que sejam  $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$ , sendo  $\gamma$  a fronteira de  $\mathcal{M}$ . Suponhamos  $\mathcal{M}$  sem bordo e definindo a forma bilinear

$$B(f, g) := - \int_{\mathcal{M}} \langle \nabla f, \nabla g \rangle dV, \quad (2.16)$$

temos

$$\langle \Delta f, g \rangle := \int_{\mathcal{M}} \Delta f g dV = B(f, g), \quad (2.17)$$

logo, o operador  $\Delta$  é o operador linear associado à forma bilinear  $B$ , com respeito ao produto interno usual em  $C^\infty(\mathcal{M})$ .

Nosso objetivo é encontrar um análogo discreto do laplaciano contínuo, ou seja, um operador linear  $\Delta_d$  definido sobre o espaço  $\mathcal{L}(\mathcal{M})$  de todas as funções lineares por partes definidas em uma malha de triângulos  $\mathcal{M}$  no  $\mathbb{R}^3$ , e que satisfaça 2.15, pois essa condição garante que  $-\Delta_d$  seja simétrico, positivo e

semi-definido. Como a forma bilinear  $B(f, g)$  faz sentido para quaisquer funções  $f, g \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$  definiremos o laplaciano discreto geométrico como segue:

**Definição 7** (Laplaciano Discreto Geométrico). *Seja  $\mathcal{L}(\mathcal{M})$  o conjunto de todas as funções contínuas e lineares por parte definidas em uma malha  $\mathcal{M}$ , definimos o laplaciano discreto geométrico como o único operador linear  $\Delta_d$  que satisfaz,*

$$\langle \Delta_d f, g \rangle := B(f, g) \quad (2.18)$$

para todo  $f, g \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$ .

Tomando a base canônica de  $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ , ou seja, as funções  $\beta_i \in C^0(\mathcal{M})$  tais que  $\beta_i$  é linear em cada simplexo de  $\mathcal{M}$  e  $\beta_i(v_j) = \delta_{ij}$ , para todo  $v_j \in V$ , toda função  $h \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$  pode ser escrita como

$$h = \sum a_i \beta_i,$$

daí

$$f = \sum a_i \beta_i \quad , \quad g = \sum b_j \beta_j. \quad (2.19)$$

Substituindo as equações de 2.19 no segundo membro da equação 2.18 obtemos,

$$- \int_{\mathcal{M}} \langle \nabla f, \nabla g \rangle = - \sum_{v_i \in V(\mathcal{M})} \sum_{v_j \in V(\mathcal{M})} a_i b_j \int_{\mathcal{M}} \langle \nabla \beta_i, \nabla \beta_j \rangle,$$

fazendo os pesos

$$w_{ij} = \int_{\mathcal{M}} \langle \nabla \beta_i, \nabla \beta_j \rangle$$

obtemos,

$$- \int_{\mathcal{M}} \langle \nabla f, \nabla g \rangle = - \sum_{v_i \in V(\mathcal{M})} \sum_{v_j \in V} a_i b_j w_{ij}. \quad (2.20)$$

Para continuar desenvolvendo o segundo membro de 2.18 precisamos do seguinte lema, cuja demonstração será omitida aqui:

**Lema 3.** *Sejam  $p, q$  e  $r$  pontos do  $\mathbb{R}^2$  não colineares e  $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$  uma função linear por parte, tal que  $f(p) = 1$ ,  $f(q) = 0$  e  $f(r) = 0$ . Então,*

1. a direção de  $\nabla f$  é perpendicular a aresta  $e_{qr}$ , com extremidades nos vértices  $q$  e  $r$ .
2.  $|\nabla f|$  é igual ao inverso da altura do triângulo com relação a aresta  $e_{qr}$  (ver figura 2.2).

Desenvolveremos  $w_{ij}$  em 2.20, pois o seu valor será de fundamental importância para o próximo capítulo desse trabalho, logo, é necessário aqui determinar sua expressão, dividiremos em dois casos:

1. caso  $i \neq j$

Neste caso  $w_{ij} \neq 0$  apenas quando  $v_i$  e  $v_j$  são vértices de uma mesma aresta, (ver figura 2.3).

Pelo lema 3 temos,



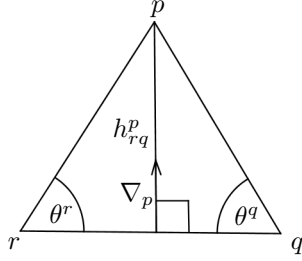


Figura 2.2: Triângulo de vértices  $p, q$  e  $r$ , com  $f(p) = 1$ ,  $f(q) = 0$  e  $f(r) = 0$ .

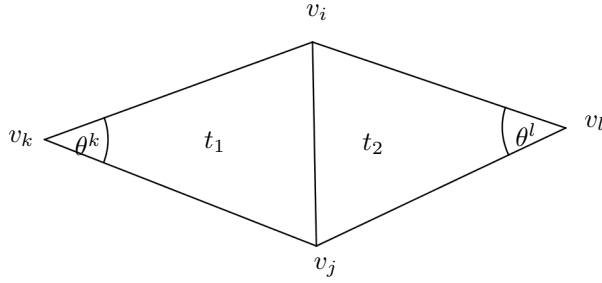


Figura 2.3: triângulos  $t_1$  e  $t_2$  em que a aresta  $e_{ij}$  é incidente.

$$|\nabla\beta_i|_{t_1} = \frac{1}{h_{jk}^i}, \quad |\nabla\beta_j|_{t_1} = \frac{1}{h_{ik}^j} \quad (2.21)$$

$$|\nabla\beta_i|_{t_2} = \frac{1}{h_{jl}^i}, \quad |\nabla\beta_j|_{t_2} = \frac{1}{h_{il}^j}, \quad (2.22)$$

onde  $h_{jk}^i$  é a altura do triângulo  $t_1$  relativa a aresta  $e_{jk}$ , além disso,

$$\angle(\nabla\beta_i, \nabla\beta_j)|_{t_1} = \pi - \theta^k, \quad \angle(\nabla\beta_i, \nabla\beta_j)|_{t_2} = \pi - \theta^l, \quad (2.23)$$

logo

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \langle \nabla\beta_i, \nabla\beta_j \rangle &= \int_{t_1 \cup t_2} \langle \nabla\beta_i, \nabla\beta_j \rangle = \int_{t_1} \langle \nabla\beta_i, \nabla\beta_j \rangle + \int_{t_2} \langle \nabla\beta_i, \nabla\beta_j \rangle = \\ &= \langle \nabla\beta_i, \nabla\beta_j \rangle|_{t_1} A_k + \langle \nabla\beta_i, \nabla\beta_j \rangle|_{t_2} A_l, \end{aligned}$$

onde  $A_k$  e  $A_l$  são as áreas dos triângulos  $t_1$  e  $t_2$  respectivamente. Usando 2.21, 2.22 e 2.23, sabendo também que

$$\cos(\pi - \theta^k) = -\cos\theta^k \quad \text{e} \quad \cos(\pi - \theta^l) = -\cos\theta^l,$$

obtemos

$$\int_{\mathcal{M}} \langle \nabla\beta_i, \nabla\beta_j \rangle = -\frac{1}{h_{jk}^i} \frac{1}{h_{ik}^j} \cos\theta^k \frac{1}{2} |v_j v_k| h_{jk}^i - \frac{1}{h_{jl}^i} \frac{1}{h_{il}^j} \cos\theta^l \frac{1}{2} |v_j v_l| h_{jl}^i$$

$$\int_{\mathcal{M}} \langle \nabla \beta_i, \nabla \beta_j \rangle = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{h_{ik}^j} \cos \theta^k |\bar{j}k| + \frac{1}{h_{il}^j} \cos \theta^l |\bar{v}_j v_l| \right),$$

mas

$$\frac{1}{\text{sen } \theta^k} = \frac{|\bar{v}_j v_k|}{h_{jk}^i} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\text{sen } \theta^l} = \frac{|\bar{v}_j v_l|}{h_{jl}^i},$$

daí

$$\int_{\mathcal{M}} \langle \nabla \beta_i, \nabla \beta_j \rangle = -\frac{1}{2} \left( \frac{\cos \theta^k}{\text{sen } \theta^k} + \frac{\cos \theta^l}{\text{sen } \theta^l} \right).$$

Concluimos então que

$$\int_{\mathcal{M}} \langle \nabla \beta_i, \nabla \beta_j \rangle = -\frac{1}{2} (\cotg \theta^k + \cotg \theta^l),$$

ou seja,

$$w_{ij} = -\frac{1}{2} (\cotg \theta^k + \cotg \theta^l). \quad (2.24)$$

2. caso  $i = j$

Para este caso temos  $w_{ij} \neq 0$  apenas nos triângulos em que  $v_i$  é um vértice incidente (ver figura 2.4).

Como consequência temos:

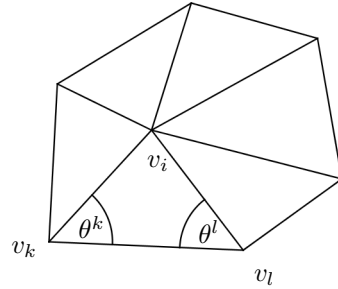


Figura 2.4:  $[v_i, v_k, v_l]$  representa um triângulo qualquer de  $\mathcal{M}$  em que o vértice  $v_i \in \mathcal{M}$  é incidente,  $\theta^k$  e  $\theta^l$  ângulos opostos ao vértice  $v_i$  em cada um desses triângulos.

$$w_{ii} = \int_{\mathcal{M}} \langle \nabla \beta_i, \nabla \beta_i \rangle = \int_{\cup [v_i, v_k, v_l]} \langle \nabla \beta_i, \nabla \beta_i \rangle = \sum_{[v_i, v_k, v_l] \in \mathcal{M}} \int_{[v_i, v_k, v_l]} \langle \nabla \beta_i, \nabla \beta_i \rangle$$

$$w_{ii} = \sum_{[v_i, v_k, v_l] \in \mathcal{M}} |\nabla \beta_i|^2 A_{[v_i, v_k, v_l]},$$

onde  $[v_i, v_k, v_l]$  são triângulos de  $\mathcal{M}$  em que  $v_i$  é incidente e  $A_{[v_i, v_k, v_l]}$  a área desses triângulos.

Usando mais uma vez o lema 3 e observando a figura 2.4 concluímos que

$$\begin{aligned}
 w_{ii} &= \sum_{[v_i, v_k, v_l] \in \mathcal{M}} \frac{1}{(h_{kl}^i)^2} \times \frac{|v_k v_l| h_{kl}^i}{2} = \sum_{[v_i, v_k, v_l] \in \mathcal{M}} \frac{|v_k v_l|}{2h_{kl}^i} \\
 w_{ii} &= \sum_{[v_i, v_k, v_l] \in \mathcal{M}} \left( \frac{h_{kl}^i}{\operatorname{tg} \theta^k} + \frac{h_{kl}^i}{\operatorname{tg} \theta^l} \right) / (2h_{kl}^i) \\
 w_{ii} &= \sum_{[v_i, v_k, v_l] \in \mathcal{M}} \left( \frac{1}{2\operatorname{tg} \theta^k} + \frac{1}{2\operatorname{tg} \theta^l} \right).
 \end{aligned}$$

Finalmente para este caso temos,

$$w_{ii} = \frac{1}{2} \sum_{[v_i, v_k, v_l] \in \mathcal{M}} (\cotg \theta^k + \cotg \theta^l), \quad (2.25)$$

onde  $\theta^k$  e  $\theta^l$  são ângulos opostos ao vértice  $v_i$ .

Alcancamos o objetivo deste capítulo apresentando um laplaciano discretizado, caracterizado pelos pesos  $w_{ij}$ . Veremos no próximo capítulo que se a malha de triângulos considerada for de Delaunay esses pesos serão todos negativos e como consequência teremos um laplaciano discretizado obedecendo ao princípio do máximo.

## Capítulo 3

# Triangulação de Delaunay Intrínseca

Finalizamos o capítulo anterior com as seguintes expressões para os pesos  $w_{ij}$ :

$$w_{ij} = -\frac{1}{2} (\cotg \theta^k + \cotg \theta^l) \quad (3.1)$$

quando  $i \neq j$  e,

$$w_{ii} = \frac{1}{2} \sum_{[v_i, v_k, v_l] \in \mathcal{M}} (\cotg \theta^k + \cotg \theta^l) \quad (3.2)$$

quando  $i = j$ . Vimos também que se os pesos  $w_{ij}$  forem todos negativos, o laplaciano discretizado satisfaz a um princípio do máximo. Entretanto, estes pesos dependem dos ângulos da triangulação. Como um mesmo conjunto de vértices  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  possui mais de uma triangulação  $\mathcal{M}$ , não está claro se o princípio do máximo será sempre satisfeito ou não.

Neste capítulo mostraremos que, para uma aresta  $e_{ij} \in \mathcal{M}$  com extremidades nos vértices  $v_i, v_j \in V$ ,  $w_{ij} < 0$  se, e somente se,  $e_{ij}$  satisfaz a um critério de Delaunay local. Logo, para termos um laplaciano discreto obedecendo ao princípio do máximo basta que todas as arestas da malha  $\mathcal{M}$  sejam de Delaunay. Descreveremos também um algoritmo que aplica modificações locais na malha de modo a obter uma triangulação onde todas as arestas sejam de Delaunay.

Devido as várias propriedades da triangulação de Delaunay e a sua importância no resultado final deste trabalho, separamos este capítulo para descrevermos esta ferramenta importantíssima em computação gráfica, bem como em outras áreas. A sua importância está na propriedade de maximizar o menor de todos os ângulos internos dos seus triângulos.

### 3.1 Triangulação de Delaunay no Plano

Na definição 5 do capítulo anterior, foi apresentado a definição de uma triangulação  $\mathcal{M}$  de um conjunto de pontos do plano  $\mathbb{R}^2$ , iniciaremos esta seção apresentando alguns resultados desta definição em seguida definiremos a triangulação de Delaunay.

Em geral  $\mathcal{M}$  não é única, mas embora não seja única a quantidade de triângulos e de arestas em qualquer triangulação de  $V$  é a mesma, é o que veremos no teorema a seguir.

**Teorema 4.** *Seja  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  um conjunto de pontos do plano, toda triangulação de  $V$  possui exatamente  $2n - u - 2$  triângulos e  $3n - u - 3$  arestas, onde  $u$  é o número de pontos de  $V$  que estão na fronteira do fecho convexo de  $\mathcal{M}$  denotado por  $\text{Conv}(V)$  (maior polígono convexo do plano que contém todos os vértices de  $V$ ).*

*Demonstração.* Uma triangulação de  $V$  determina uma subdivisão do plano em  $T + 1$  faces, onde  $T$  é o número de triângulos da triangulação. Portanto, pela fórmula de Euler temos que

$$n + (T + 1) = a + 2, \quad (3.3)$$

onde  $a$  é o número de arestas. As  $u$  arestas da fronteira de  $\text{Conv}(V)$  são comuns a um triângulo e à face externa. Todas as demais arestas figuram em exatamente dois triângulos. Logo, somando o número de arestas de todas as faces, processo no qual cada aresta é contada duas vezes, encontramos

$$3T + u = 2a,$$

daí

$$a = \frac{3T + u}{2}.$$

Substituindo em 3.3 e resolvendo para  $T$  e depois para  $a$ , concluímos a demonstração com

$$T = 2n - u - 2 \quad \text{e} \quad a = 3n - u - 3.$$

□

É consequência imediata deste teorema que o problema de triangulação é linear no número de elementos de  $V$ .

Embora todas as triangulações de  $V$  tenham o mesmo número de triângulos, em determinadas aplicações é importante que os triângulos da triangulação sejam "robustos", ou seja, que não apresentem triângulos com ângulos internos muito pequenos.

A triangulação de Delaunay é caracterizada por ter cada uma de suas arestas um círculo circunscrito aos seus vértices e que não possui nenhum outro vértice em seu interior, são os chamados "círculos vazios". Esta propriedade será a base principal na construção do algoritmo que descreveremos a seguir e uma consequência importante dela é maximizar o menor de todos os ângulos internos dos triângulos que compõe a triangulação. Antes de apresentar o algoritmo precisamos de três definições: aresta de Delaunay, triângulo de Delaunay e triangulação de Delaunay.

**Definição 8.** *Seja  $V$  um conjunto de pontos do plano e  $\mathcal{M}$  uma triangulação de  $V$ , uma aresta  $e_{ij}$  é dita de Delaunay quando existe um círculo  $C_{ij}$  circunscrevendo  $e_{ij}$ , ou seja, circunscrevendo os vértices  $v_i$  e  $v_j$  excluindo todos os outros vértices de  $V$ . Semelhantemente um triângulo  $t_{ijk} \in \mathcal{M}$  é dito Delaunay, quando existe um círculo  $C_{ijk}$  circunscrevendo  $t_{ijk}$ , ou seja, circunscrevendo os vértices  $v_i, v_j$  e  $v_k$ , excluindo todos os outros vértices de  $V$ .*

A seguir apresentamos a definição formal da triangulação de Delaunay.

**Definição 9** (Triangulação de Delaunay). *Seja  $V$  um conjunto de pontos do plano e  $\mathcal{M}$  uma triangulação de  $V$ ,  $\mathcal{M}$  é denominada Triangulação de Delaunay se todos os seus triângulos são de Delaunay.*

Iniciamos este capítulo mencionando o teorema seguinte, vejamos agora a sua demonstração.

**Teorema 5.** *Seja  $V$  um conjunto de pontos do plano e  $\mathcal{M}$  uma triangulação de  $V$ , todos os triângulos de  $\mathcal{M}$  são de Delaunay se, e somente se, todas as arestas de  $\mathcal{M}$  são de Delaunay.*

*Demonstração.* Primeiro vamos mostrar que se todas as arestas  $e \in \mathcal{M}$  são de Delaunay então todos os triângulos  $t \in \mathcal{M}$  são de Delaunay.

Suponhamos por absurdo que exista  $t_{ijk} \in \mathcal{M}$  que não seja de Delaunay, então existe um círculo  $C_{ijk}$  que circunscreve  $t_{ijk}$  possuindo um vértice  $v \in V$  de  $\mathcal{M}$  no seu interior (ver figura 3.1).

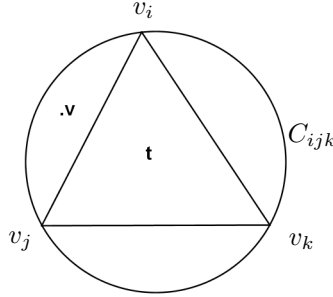


Figura 3.1: Círculo circunscrevendo os vértices  $v_i, v_j$  e  $v_k$

O fato de  $v$  estar no interior de  $C_{ijk}$  implica que uma das arestas de  $t_{ijk}$  não é de Delaunay. Sem perda de generalidade suponhamos que  $v$  esteja no interior da região limitada por  $e_{ij}$  e o círculo  $C_{ijk}$ . Afirmamos que qualquer círculo que circunscreve  $e_{ij}$  possui no seu interior ou o vértice  $v_k$  ou o vértice  $v$ , como esse fato contraria a hipótese, concluímos que todos os triângulos  $t \in \mathcal{M}$  são de Delaunay.

Mostremos agora que se todas as arestas  $e \in \mathcal{M}$  são de Delaunay então todos os triângulos  $t_{ijk} \in \mathcal{M}$  são de Delaunay. Seja  $t_{ijk} \in \mathcal{M}$  um triângulo qualquer, como  $\mathcal{M}$  é de Delaunay, existe um círculo  $C_{ijk}$  que circunscreve  $t_{ijk}$  e que não possui nenhum outro vértice de  $\mathcal{M}$  no seu interior, este círculo  $C_{ijk}$  mostra que todas as arestas de  $t$  são de Delaunay, e como  $t_{ijk}$  é um triângulo qualquer, temos que todas as arestas  $e \in \mathcal{M}$  são de Delaunay.  $\square$

Vejamos agora através do lema a seguir qual a condição para que uma aresta  $e \in \mathcal{M}$  seja de Delaunay:

**Lema 6.** *Sejam  $v_i v_j$  e  $v_k v_z$  segmentos do plano que se interceptam em  $O$ . Então para existir um círculo passando por  $v_i$  e  $v_j$  e tal que  $v_k$  e  $v_z$  sejam exteriores a esse círculo, é necessário e suficiente que os ângulos do quadrilátero  $v_i v_j v_k v_z$  sejam tais que  $\phi_{kz}^i + \phi_{kz}^j > \pi$  (equivalentemente  $\phi_{ij}^k + \phi_{ij}^z < \pi$ ).*

*Demonstração.* Suponhamos que exista tal círculo (ver figura 3.2). Sejam  $v_{k'}$  e  $v_{z'}$  as intersecções do segmento  $v_k v_z$  com o círculo. Então  $\phi_{ij}^k + \phi_{ij}^z < \phi_{ij}^{k'} + \phi_{ij}^{z'} = \pi$  (já que o quadrilátero  $v_i v_{k'} v_j v_{z'}$  é inscrivível em um círculo). Reciprocamente,

Figura 3.2: Círculo circunscrevendo  $v_i$  e  $v_j$  com  $v_k$  e  $v_z$  externo.

se  $\phi_{ij}^k + \phi_{ij}^z < \pi$ , existem pontos  $v_{k'}$  e  $v_{z'}$  tomados sobre o segmento  $v_k v_z$  de tal modo que  $\phi_{ij}^k + \phi_{ij}^z < \phi_{ij}^{k'} + \phi_{ij}^{z'} = \pi$ . Estes pontos, juntamente com  $v_i$  e  $v_j$  determinam um círculo que exclui  $v_k$  e  $v_z$ .  $\square$

Na próxima seção apresentamos um algoritmo que tem como entrada uma triangulação qualquer de um conjunto de pontos do plano e retorna a triangulação de Delaunay.

### 3.2 Algoritmo de *Flip* de Arestas no Plano

O clássico algoritmo que iremos descrever utiliza uma triangulação qualquer para chegar à triangulação de Delaunay. Este algoritmo é baseado na mudança de aresta, segundo o qual a aresta que não obedece ao critério local de Delaunay é trocada, ou seja, para esta aresta deve existir um círculo que contenha apenas os seus vértices e que não possua nenhum outro vértice no seu interior (são chamados círculos vazios). O algoritmo pára quando todas as arestas obedecerem a este critério.

Um importante dado de entrada da malha são as combinações de seu grafo de arestas, assim como o comprimento de cada aresta. Com esses dados a verificação do critério local de Delaunay pode ser feita apenas com o comprimento das arestas e das combinações locais das mesmas. Um fato importante é que este procedimento não muda a geometria da malha e não é difícil verificar que este procedimento pára no momento em que todas as arestas da malha obedecem ao critério local de Delaunay, como faremos a seguir.

O algoritmo que descreveremos a partir de agora tem como entrada uma triangulação qualquer  $\mathcal{M}_0$  de um conjunto  $V$  de pontos do plano e como saída a triangulação de Delaunay.

Seja o complexo  $K = (V, E, T)$  de vértices, arestas e triângulos, seja também  $l$  uma métrica Euclidiana, tal que,  $l_{ij} = \|v_i - v_j\|$  é o comprimento da aresta  $e_{ij} \in E$ , a partir destes dados criamos o código seguinte.

**Entrada:**  $(K, l)$

**Saida :**  $(K', l')$  triangulação de Delaunay

$\forall e \in E$  **Mark**( $e$ )

**Stack**  $s \leftarrow E$

**While**  $s \neq \phi$  **do**

    Desempilhe  $e_{ij}$  de  $s$  e desmarque  $e_{ij}$

**If** !Delaunay( $e_{ij}$ ) **then**

$e_{kl} \leftarrow \text{Flip}(e_{ij})$  e calcule  $e_{kl}$

**For all**  $e \in \{e_{kj}, e_{jl}, e_{li}, e_{ik}\}$  **do**

**If** !Mark( $e$ ) **Then**

**Mark**( $e$ ) e coloque em  $s$

**end If**

**end For**

**end If**  
**end While**

Nosso objetivo a seguir é mostrar que este algoritmo para em um número finito de etapas.

**Teorema 7.** *O algoritmo de flip de arestas no plano pára em um número finito de passos.*

*Demonstração.* Seja  $V$  um conjunto de pontos do plano e  $\mathcal{M}$  uma triangulação de  $V$ . Para cada triângulo  $t \in \mathcal{M}$  tome  $A(t)$  como a área do círculo que circunscreve  $t$ . Esta área pode ser calculada com os comprimentos  $a, b$  e  $c$  das arestas do triângulo  $t$ , utilizando a fórmula seguinte,

$$16\pi A = \frac{(abc)^2}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

onde  $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$  é o semi-perímetro de  $t$ . Tomemos agora uma função  $H$  definida no conjunto de todas as triangulações de  $V$ , sendo,  $H(\mathcal{M}) = \sum_{t \in \mathcal{M}} A(t)$ . Seja  $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3, \dots$  uma sequência de triangulações de  $V$ , onde  $\mathcal{M}_0$  é uma triangulação qualquer e  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3, \dots$  uma sequência de triangulações originadas a partir do flip de aresta (algoritmo). A partir do teorema 6.1 de [10] podemos concluir que  $H(\mathcal{M}_0), H(\mathcal{M}_1), H(\mathcal{M}_2), \dots$ , é uma sequência estritamente decrescente, (geometricamente é fácil verificar este fato por meio da figura 3.3). Como o número de triangulações de um conjunto de pontos do

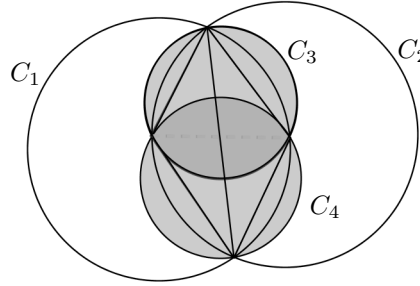


Figura 3.3:  $C_1$  e  $C_2$  são os círculos circunscritos aos triângulos da malha antes do flip.  $C_3$  e  $C_4$  são os círculos circunscritos aos novos triângulos inseridos na malha. Observe que  $C_3 \cup C_4 \subset C_1 \cup C_2$  e isso mostra que  $H(\mathcal{M}_n) > H(\mathcal{M}_{n+1})$ .

plano é finita e que  $H(\mathcal{M}_0), H(\mathcal{M}_1), H(\mathcal{M}_2), \dots$ , é uma sequência estritamente decrescente, ela atinge um valor mínimo em um número finito de *flips*, o que mostra que o algoritmo de *flip* no plano pára em um número finito de etapas (*flips*).  $\square$

A verificação da condição local de Delaunay é fundamental para a implementação do algoritmo, bem como o cálculo do comprimento da nova aresta, caso uma aresta seja trocada. Tanto o teste de Delaunay como o cálculo da nova aresta, pode ser feito usando apenas o comprimento das arestas dos triângulos incidentes da aresta de teste. Vamos verificar esta afirmação utilizando a proposição que segue.



**Proposição 1.** *Sejam  $a, b$  e  $c$  os comprimentos dos lados de um triângulo e  $\phi$  o ângulo oposto ao lado de comprimento  $a$ , então*

$$\operatorname{tg} \frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(a+b+c)(-a+b+c)}}.$$

*Demonstração.* Da trigonometria sabemos que

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\phi}{2} = \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\phi}{2}}{\operatorname{cos}^2 \frac{\phi}{2}} = \frac{1 - \operatorname{cos} \phi}{1 + \operatorname{cos} \phi}. \quad (3.4)$$

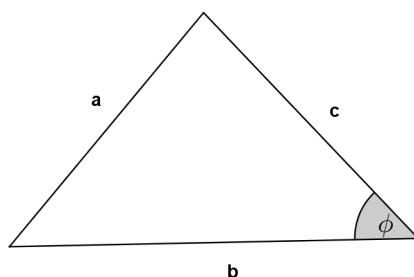


Figura 3.4: Triângulo com lados de comprimentos  $a, b$  e  $c$  e ângulo  $\phi$  oposto ao lado de comprimento  $a$ .

Usando a lei dos cossenos

$$\operatorname{cos} \phi = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

na equação 3.4 obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \frac{\phi}{2} &= \left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) / \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \\ &= \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc + b^2 + c^2 - a^2} = \frac{-(b^2 - 2bc + c^2 - a^2)}{(b+c)^2 - a^2} \\ &= \frac{a^2 - (b-c)^2}{(b+c-a)(b+c+a)} = \frac{(a+c-b)(a+b-c)}{(b+c-a)(b+c+a)}, \end{aligned}$$

daí concluímos o teorema com

$$\operatorname{tg} \frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{(b+c-a)(b+c+a)}}. \quad (3.5)$$

□

Com a equação 3.5 calculamos a cotangente de  $\phi$  utilizando a seguinte relação trigonométrica

$$\operatorname{cot} g \phi = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\phi}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\phi}{2}}. \quad (3.6)$$

Utilizando 3.6 e associando a cada aresta  $e_{ij}$  incidente a dois triângulos  $t_{ijk}$  e  $t_{ijz}$  o peso seguinte,

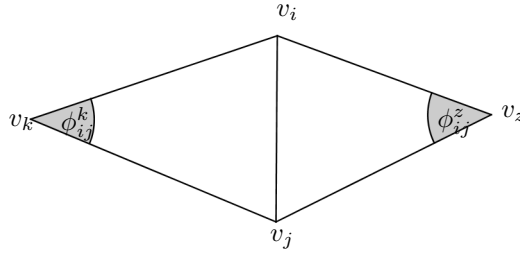
$$w_{ij} = -\frac{1}{2} (\cotg \phi_{ij}^k + \cotg \phi_{ij}^z), \quad (3.7)$$

será fácil verificar, conforme faremos a seguir, que se  $\cotg \phi_{ij}^k + \cotg \phi_{ij}^z$  for não negativo a aresta  $e_{ij}$  satisfaz o critério local de Delaunay, caso contrário esta aresta deve ser trocada por  $e_{kz}$  e calculado o comprimento desta nova aresta.

Pelo lema 6  $e_{ij}$  é de Delaunay se, e somente se  $\phi_{ij}^k + \phi_{ij}^z \leq \pi$

**Proposição 2.** . Sejam  $v_i, v_j, v_k$  e  $v_z$  vértices coplanares de um quadrilátero, então  $\phi_{ij}^k + \phi_{ij}^z \leq \pi$  se e somente se

$$\cotg \phi_{ij}^k + \cotg \phi_{ij}^z \geq 0$$



*Demonstração.* Temos que

$$\begin{aligned} \cotg \phi_{ij}^k + \cotg \phi_{ij}^z &= \frac{\cos \phi_{ij}^k}{\sen \phi_{ij}^k} + \frac{\cos \phi_{ij}^z}{\sen \phi_{ij}^z} \\ &= \frac{\cos \phi_{ij}^k \sen \phi_{ij}^z + \cos \phi_{ij}^z \sen \phi_{ij}^k}{\sen \phi_{ij}^k \sen \phi_{ij}^z} = \frac{\sen(\phi_{ij}^k + \phi_{ij}^z)}{\sen \phi_{ij}^k \sen \phi_{ij}^z}, \end{aligned}$$

logo

$$\cotg \phi_{ij}^k + \cotg \phi_{ij}^z = \frac{\sen(\phi_{ij}^k + \phi_{ij}^z)}{\sen \phi_{ij}^k \sen \phi_{ij}^z}, \quad (3.8)$$

como

$$\phi_{ij}^k < \pi \quad \text{e} \quad \phi_{ij}^z < \pi$$

temos

$$\sen \phi_{ij}^k \sen \phi_{ij}^z > 0, \quad (3.9)$$

se  $\phi_{ij}^k + \phi_{ij}^z \leq \pi$  então

$$\sen(\phi_{ij}^k + \phi_{ij}^z) \geq 0. \quad (3.10)$$

De 3.9 e 3.10 concluímos que

$$\cotg \phi_{ij}^k + \cotg \phi_{ij}^z = \frac{\sen(\phi_{ij}^k + \phi_{ij}^z)}{\sen \phi_{ij}^k \sen \phi_{ij}^z} \geq 0.$$

Vamos mostrar agora que se  $\cotg \phi_{ij}^k + \cotg \phi_{ij}^z \geq 0$  então  $\phi_{ij}^k + \phi_{ij}^z \leq \pi$ .

Se  $\cotg \phi_{ij}^k + \cotg \phi_{ij}^z \geq 0$  então o numerador e o denominador de 3.8 tem o mesmo sinal ou o numerador é zero, mas  $\sen \phi_{ij}^k \sen \phi_{ij}^z$  é sempre positivo conforme visto em 3.9, logo  $\sen(\phi_{ij}^k + \phi_{ij}^z) \geq 0$ , concluímos então que  $\phi_{ij}^k + \phi_{ij}^z \leq \pi$ .  $\square$

Quando é feito o *flip* de uma aresta é necessário calcular o comprimento da nova aresta a ser inclusa na malha. A seguir utilizaremos mais uma vez a tangente do arco metade para determinar uma expressão que permite este cálculo, envolvendo apenas os comprimentos das arestas dos novos triângulos incidentes a esta nova aresta. A partir da seguinte relação trigonométrica,

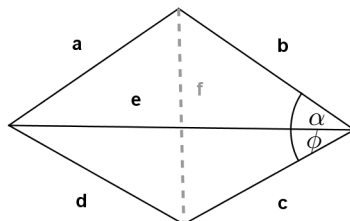


Figura 3.5:  $f$  é o comprimento da nova aresta que pode ser calculado a partir dos comprimentos  $a, b, c, d, e$ .

$$tg \left( \frac{\phi + \alpha}{2} \right) = \frac{tg \frac{\phi}{2} + tg \frac{\alpha}{2}}{1 - tg \frac{\phi}{2} tg \frac{\alpha}{2}}$$

chegamos a,

$$\cos(\phi + \alpha) = \frac{1 - tg^2 \left( \frac{\phi + \alpha}{2} \right)}{1 + tg^2 \left( \frac{\phi + \alpha}{2} \right)} \quad (3.11)$$

e concluímos que,

$$f = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cos(\phi + \alpha)} \quad (3.12)$$

Nesta seção apresentamos um algoritmo que retorna a triangulação de Delaunay a partir de uma malha de triângulos no plano  $\mathbb{R}^2$ , nosso objetivo na próxima seção é estender este algoritmo para malhas no  $\mathbb{R}^3$ .

### 3.3 Extensão do Algoritmo de *Flip* Para Malhas no Espaço $\mathbb{R}^3$

Na seção anterior apresentamos o algoritmo de *flip* de aresta para obter a triangulação de Delaunay de um conjunto de pontos  $V \subset \mathbb{R}^2$ , nosso objetivo a partir de agora é generalizar este algoritmo para uma malha de triângulos  $\mathcal{M}$  do  $\mathbb{R}^3$ , onde o conjunto de pontos singulares  $V$  é também o conjunto de vértices da triangulação. Veremos que de forma idêntica ao algoritmo de *flip* de

aresta no plano, pode-se construir a estrutura de uma triangulação de Delaunay intrínseca a uma superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  a partir de uma malha triangular qualquer de  $S$ , isso porque, ao tomar um par de triângulos adjacentes no  $\mathbb{R}^3$  sua geometria intrínseca pode ser visualizada pelo mapeamento isométrico deles no plano (veja figura 3.3).

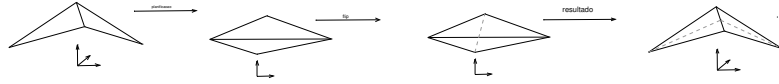


Figura 3.6: Dado um par de triângulos no  $\mathbb{R}^3$  sua geometria intrínseca pode ser visualizada pelo mapeamento isométrico no plano. Uma aresta que não é de Delaunay é trocada e inserida uma nova aresta na superfície original.

Portanto, dada uma malha qualquer de triângulos no espaço  $\mathbb{R}^3$ , uma aresta que violar o critério local de Delaunay é trocada, e calculado o comprimento da nova aresta, exatamente como feito para o algoritmo de *flip* no plano. Esse processo é repetido até que todas as arestas obedeçam ao critério local de Delaunay.

Sabemos que no caso planar o número de triangulações de um conjunto de pontos é finito, e esse fato foi fundamental para que o algoritmo de *flip* no plano parasse em um número finito de etapas. Já no caso do espaço  $\mathbb{R}^3$  o número de triangulações geodésicas de um conjunto de pontos possivelmente é infinito, no entanto veremos que mesmo com essa complexidade a mais o algoritmo de *flip* também pára em um número finito de etapas. Antes de demonstrarmos essa afirmação, vejamos algumas definições que serão mencionadas.

Já falamos anteriormente em uma superfície plana por partes, vejamos agora qual é a sua definição.

**Definição 10** (Superfície Plana por Partes). *Um espaço métrico compacto  $\mathcal{M}$  é uma superfície com singularidades cônicas, ou Superfície Plana por Partes de forma mais simples, se todo ponto admite uma vizinhança isométrica a um disco do plano euclidiano ou a um cone euclidiano.*

Embora a definição anterior seja bem abrangente, neste trabalho nosso interesse está em malhas de triângulos, que são casos particulares de superfícies planas por partes.

**Definição 11** (Geodésica). *Considere  $\mathcal{M}$  uma superfície plana por parte, uma geodésica em  $\mathcal{M}$  é uma curva  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$  que localmente minimiza distâncias. A distância geodésica entre dois pontos  $p, q \in \mathcal{M}$  é o comprimento do menor caminho unindo  $p$  a  $q$ .*

O próximo teorema mostra que o algoritmo de *Flip* em malhas no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$  também pára em um número finito de etapas, mas antes de apresentá-lo precisamos da proposição seguinte que será de fundamental importância para a sua demonstração.

**Proposição 3.** *Seja  $\mathcal{M}$  uma superfície plana por partes, para algum par de pontos  $p, q \in \mathcal{M}$  e um número real  $L > 0$ , o número de geodésicas de comprimento menor que  $L$  unindo  $p$  a  $q$  é finito.*

*Demonstração.* Visto que  $\mathcal{M}$  é uma superfície plana por partes, duas geodésicas unindo  $p$  e  $q$  ou são não-homotópicas ou juntas elas formam a fronteira de uma região contendo pelo menos uma singularidade (veja a prova no corolário 2 de [9]). Em particular, se  $\alpha$  é uma geodésica unindo  $p$  e  $q$ , podemos encontrar uma vizinhança  $U$  de  $\alpha$  formada por arcos simples unindo  $p$  e  $q$  em  $\mathcal{M}$  no qual  $\alpha$  é a única geodésica em  $U$ . Agora seja  $A_{pq}(L)$  uma coleção de todas as geodésicas  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$  parametrizada de velocidade constante unindo  $p$  e  $q$  e de comprimento menor ou igual a  $L$ . Em particular, a família  $A_{pq}(L)$  é uniformemente de Lipschitz (com a constante de Lipschitz  $L$ ) e pelo teorema de Arzela-Ascoli é um conjunto compacto (da topologia uniforme). Esses argumentos mostram que cada  $\alpha$  é um ponto isolado em  $A_{pq}(L)$ , portanto  $A_{pq}(L)$  é um conjunto finito.  $\square$

Como consequência temos o seguinte corolário:

**Corolário 8.** *O conjunto dos comprimentos de todas as geodésicas unindo pares de pontos em uma superfície plana por partes  $\mathcal{M}$  é um subconjunto discreto em  $\mathbb{R}$ .*

Mostraremos agora que o algoritmo de *flip* de arestas em malhas no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$  também pára em um número finito de passos. Já sabemos que a geometria intrínseca de um par de triângulos adjacentes no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$  pode ser visualizada pelo seu mapeamento isométrico no plano, esse fato permite construir toda a demonstração de forma idêntica ao teorema 7 da seção anterior no caso planar.

**Teorema 9.** *O algoritmo de flip de arestas em malhas no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$  pára em um número finito de passos.*

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{M}$  uma triangulação geodésica de uma superfície plana por partes  $S$ . Para cada triângulo  $T$  de  $\mathcal{M}$  denotemos por  $A(T)$  a área do círculo circunscrito a uma cópia isométrica de  $T$  no plano  $\mathbb{R}^2$ . Definamos agora uma função  $H$  no conjunto de todas as triangulações geodésicas por

$$H(\mathcal{M}) = \sum_{T \in \mathcal{M}} A(T),$$

pelo corolário 8 a imagem de  $H$  é um subconjunto discreto de  $\mathbb{R}$ . Seja  $\mathcal{M}, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots$  uma sequência de triangulações geradas pelo algoritmo de *flip*, a partir do teorema 6.1 de [10] podemos concluir que  $H(\mathcal{M}), H(\mathcal{M}_1), H(\mathcal{M}_2), \dots$ , é uma sequência estritamente decrescente, como a imagem de  $H$  é um subconjunto discreto de  $\mathbb{R}$  esta sequência atingirá um mínimo em um número finito de passos, o que mostra que o algoritmo de *flip* pára em um número finito de etapas.  $\square$

Com este teorema terminamos a parte teórica do nosso trabalho. No próximo capítulo estudaremos algumas aplicações do laplaciano discreto em computação gráfica.

## Capítulo 4

# Aplicações do Laplaciano Discreto

Neste capítulo apresentaremos três aplicações do laplaciano: a primeira tem como objetivo obter parametrizações de malhas para efeito de mapeamento de textura; a segunda consiste na suavização de superfícies por meio do processo de difusão, ou seja, eliminação de ruídos ou regiões de altas frequências da malha; a terceira e última aplicação visa identificar formas e simetrias de objetos por meio das curvas de contorno associadas às autofunções do laplaciano.

Todas as figuras apresentadas nestas aplicações foram geradas a partir das implementações que fizemos no MATLAB.

### 4.1 Mapeamento de Textura

Nosso objetivo nesta aplicação é obter parametrizações  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2$  de malhas de triângulos  $\mathcal{M}$  para efeito de mapeamento de textura. Em particular é necessário que  $\varphi$  seja injetiva para ser uma parametrização de  $\mathcal{M}$ .

Existe uma teoria pronta e bem conhecida para o contexto contínuo, o teorema de Radó-Kneser-Choquet:

**Teorema 10** (Radó-Kneser-Choquet-RKC). *Seja  $D$  uma região fechada do  $\mathbb{R}^2$ . Suponhamos que uma função  $\varphi : D \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2$  é um mapeamento harmônico, que mapeia  $\partial D$  homeomorficamente em  $\partial\Omega$ , sendo  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  uma região convexa do  $\mathbb{R}^2$ . Então  $\varphi$  é injetiva.*

Uma função  $\varphi$  é dita *harmônica* se  $\Delta\varphi = 0$ . Em particular quando  $D \subset \mathbb{R}^2$  temos  $\varphi = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$  e portanto:

$$\begin{cases} \Delta\varphi_1 = 0 \\ \Delta\varphi_2 = 0. \end{cases}$$

Será que existe uma teoria análoga deste problema no caso discreto? Ou seja, uma parametrização

$$\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

injetiva tal que,

$$\begin{cases} \Delta_d \varphi_1 = 0 \\ \Delta_d \varphi_2 = 0. \end{cases}$$

Sendo  $\Delta_d$  o laplaciano discreto definido no capítulo 2 e  $\mathcal{M}$  uma malha de triângulos. A resposta para esta pergunta é sim. Essa teoria já foi construída por Michael Floater que demonstrou em [13] um teorema análogo ao de RKC para o caso discreto garantindo neste teorema que a parametrização seja injetiva. Para entender o teorema de Floater precisamos da seguinte definição:

**Definição 12.** *Seja  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função linear por partes, e suponha que para todo vértice  $v_i$  no interior de  $\mathcal{M}$ , existam pesos  $\lambda_{ij} > 0$ , tais que  $\sum_{v_j \in N_i} \lambda_{ij} = 1$  e  $f(v_i) = \sum_{v_j \in N_i} \lambda_{ij} f(v_j)$ , onde*

$$N_i = \{v_j; e_{ij} \text{ é uma aresta de } \mathcal{M}\}.$$

Denominaremos a função  $f$  de função de combinação convexa.

De forma similar denominaremos  $\phi = (f, g) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , um mapeamento de combinação convexa se ambas as componentes  $f(x, y, z), g(x, y, z)$  de  $\phi$  forem funções de combinação convexa.

**Definição 13** (Triangulação fortemente conexa). *Uma triangulação  $\mathcal{M}$  é dita fortemente conexa se toda aresta interna de  $\mathcal{M}$  possui pelo menos um vértice no interior de  $\mathcal{M}$ .*

**Teorema 11** (Teorema de Floater). *Supondo  $\mathcal{M}$  uma triangulação fortemente conexa e  $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \Omega$  um mapeamento de combinação convexa que mapeia homeomorficamente a fronteira  $\partial\mathcal{M}$  na fronteira  $\partial\Omega$  de uma região convexa fechada  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Então  $\phi$  é injetiva.*

O ponto chave da teoria de Floater é que as funções de combinações convexas são as análogas discretas das funções harmônicas no caso contínuo, visto que estas funções também satisfazem ao princípio do máximo, conforme mostraremos a seguir, tendo esse fato similar importância quanto tem as funções harmônicas no caso contínuo.

No corolário a seguir veremos que se uma função  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\mathcal{M}$  é uma malha de triângulos, é de combinação convexa, então ela satisfaz ao princípio do máximo.

**Corolário 12** (Princípio do Máximo Discreto). *Seja  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de combinação convexa, onde  $\mathcal{M}$  é uma malha de triângulos. Se para algum vértice  $v_i$  no interior de  $\mathcal{M}$  tivermos  $f(v_i) \geq f(v_j)$  qualquer que seja  $v_j \in N_i$  então  $f(v_i) = f(v_j)$  para todo  $v_j \in N_i$ .*

*Demonstração.* Por hipótese  $f(v_i) > f(v'_j)$  para todo  $v_j \in N_i$ , suponhamos por absurdo que exista  $v'_j \in N_i$  tal que  $f(v_i) > f(v'_j)$ . Então,

$$\sum_{v_j \in N_i} \lambda_{ij} (f(v_i) - f(v_j)) > 0. \quad (4.1)$$

Por outro lado temos

$$\sum_{v_j \in N_i} \lambda_{ij} (f(v_i) - f(v_j)) = \sum_{v_j \in N_i} \lambda_{ij} f(v_i) - \sum_{v_j \in N_i} \lambda_{ij} f(v_j) = f(v_i) - f(v_i) = 0,$$

o que nos leva a uma contradição por 4.1. A contradição surgiu ao considerar a existência de  $v'_j \in N_i$ , logo  $f(v_i) = f(v_j)$  para todo  $v_j \in N_i$ .  $\square$

No capítulo 2 quando definimos  $\Delta_d$  associamos os pesos  $w_{ij}$  a cada aresta  $e_{ij}$  de uma determinada malha de triângulos  $\mathcal{M}$ , sendo

$$w_{ij} = -\frac{1}{2} (\cotg \theta^k + \cotg \theta^l), \quad i \neq j, \quad (4.2)$$

onde  $\theta^k$  e  $\theta^l$  são ângulos opostos a aresta  $e_{ij}$  dos triângulos em que  $e_{ij}$  é uma aresta incidente e

$$w_{ii} = \frac{1}{2} \sum_{[v_i, v_k, v_l] \in \mathcal{M}} (\cotg \theta^k + \cotg \theta^l), \quad i = j, \quad (4.3)$$

onde  $[v_i, v_k, v_l] \in \mathcal{M}$  são triângulos em que  $v_i$  é incidente e  $\theta^k, \theta^l$  ângulos opostos ao vértice  $v_i$  nesses triângulos. Foi visto também no capítulo 3 proposição 2 que

$$\cotg \theta^k + \cotg \theta^l$$

é não negativo se, e somente se  $\theta^k + \theta^l < \pi$ , ou seja, se e somente se  $e_{ij}$  satisfaz ao critério local de Delaunay.

Aqui associaremos a cada aresta  $e_{ij}$  os coeficientes

$$\lambda_{ij} = \frac{-w_{ij}}{w_{ii}},$$

o que nos leva ao seguinte resultado:

**Corolário 13.** *Seja  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função linear por partes tal que  $\Delta_d f = 0$ . Se  $\mathcal{M}$  é uma triangulação de Delaunay então  $f$  é uma função de combinação convexa.*

Este corolário mostra a importância da triangulação de Delaunay na discretização do laplaciano  $\Delta_d$  que escolhermos, pois, basta que a malha  $\mathcal{M}$  de triângulos seja de Delaunay e fortemente conexa para que um mapeamento linear por partes  $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2$  seja injetivo.

Descreveremos a partir de agora o método linear que utilizamos para implementar a parametrização de uma malha  $\mathcal{M}$  no espaço  $\mathbb{R}^3$ .

Se  $\phi$  é um mapeamento linear por partes, ele é completamente determinado pelos seus pontos  $\phi(v_i) \in \mathbb{R}^2$  para  $v_i \in V$ .

Denotaremos por  $V_I$  o conjunto de vértices interiores de  $\mathcal{M}$  e  $V_B$  o conjunto de vértices da fronteira. O primeiro passo do método é escolher alguns pontos  $\phi(v) \in \mathbb{R}^2$ , para  $v \in V_B$ , tal que a fronteira  $\partial\mathcal{M}$  de  $\mathcal{M}$  seja mapeada homeomorficamente num polígono  $\phi(\partial\mathcal{M})$  do plano  $\mathbb{R}^2$ . O segundo passo é escolher para cada  $v_i \in V_I$  um conjunto de valores  $\lambda_{ij}$  estritamente positivo, tal que

$$\sum_{v_j \in N_i} \lambda_{ij} = 1.$$

Na implementação que fizemos foram utilizados

$$\lambda_{ij} = \frac{-w_{ij}}{w_{ii}},$$



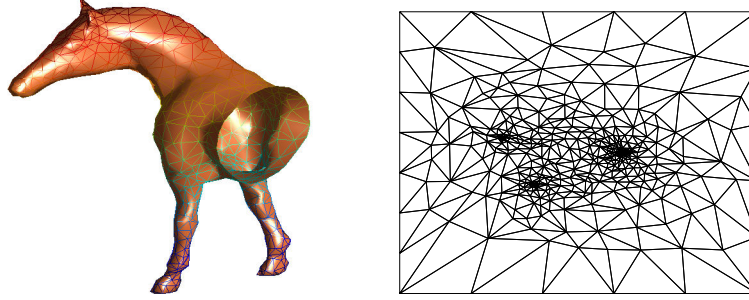


Figura 4.1: Parametrização injetiva após *flips* de arestas

onde  $w_{ij}$  está definido em 4.2 e  $w_{ii}$  em 4.3. Assim os pontos  $\phi(v_i) \in \mathbb{R}^2$  são as únicas soluções do sistema linear de equações

$$\phi(v_i) = \sum_{v_j \in N_i} \lambda_{ij} \phi(v_j) \quad v_i \in V_I \quad (4.4)$$

Como consequência temos que cada ponto  $\phi(v_i)$  é uma combinação convexa de seus vizinhos  $\phi(v_j)$ .

Vamos reescrever 4.4 na seguinte forma,

$$\phi(v_i) - \sum_{v_j \in (N_i \cap V_I)} \lambda_{ij} \phi(v_j) = \sum_{v_j \in (N_i \cap V_B)} \lambda_{ij} \phi(v_j) \quad (4.5)$$

Reescrevendo agora 4.5 na forma de uma equação matricial temos:

$$Ax = b,$$

onde  $x = (\phi(v_j))_{v_j \in V_I}$  é um vetor coluna a determinar,  $b$  é um vetor coluna cujo os elementos são formados pelo segundo membro da equação 4.5, e a matriz  $A = (a_{ij})_{v_i, v_j \in V_I}$  tem dimensão  $n \times n$ , com  $n = |V_I|$ , e elementos

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i = v_j \\ -\lambda_{ij}, & v_j \in N_i \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases}$$

de posse da matriz  $A$  e da matriz  $b$  no MATLAB é muito fácil determinar a matriz incógnita  $x$ , basta aplicar o comando  $x = A/b$  e o MATLAB retorna a matriz  $x$  cujas linhas são as coordenadas de cada ponto  $\phi(v_i)$ , onde  $v_i \in V_I$ .

As figuras de 4.1 a 4.3 são parametrizações de algumas malhas no  $\mathbb{R}^3$  a partir das implementações que fizemos no MATLAB.

A figura 4.4 é um exemplo que confirma a necessidade da triangulação da malha ser de Delaunay. Neste caso a malha original não era de Delaunay e como consequência obteve-se uma parametrização não injetiva, já após o *flip* de aresta a parametrização obtida em 4.5 é injetiva. Como o nosso objetivo final é aplicar uma textura sobre a malha, esse resultado mostra a necessidade real de se aplicar o algoritmo de *flip* de aresta na malha, caso contrário poderá ocorrer problemas na aplicação da textura.

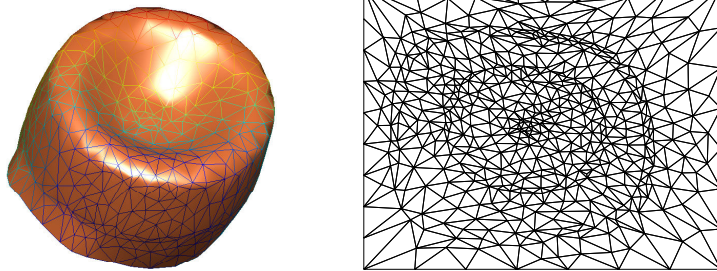


Figura 4.2: Parametrização injetiva após *flips* de arestas

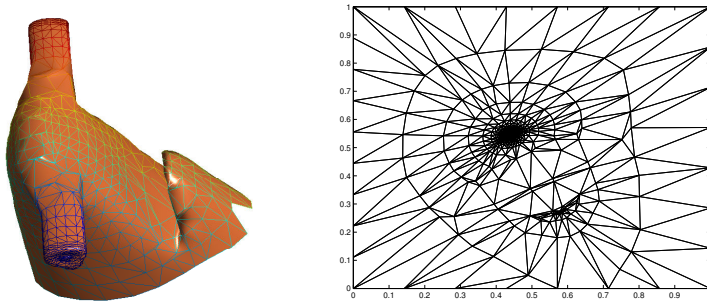


Figura 4.3: Parametrização injetiva após *flips* de arestas

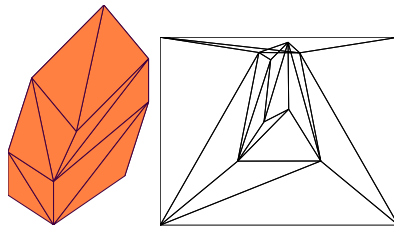


Figura 4.4: parametrização não injetiva sem fazer *flips* de arestas.

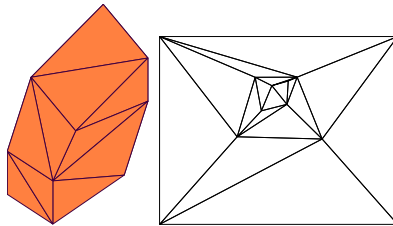


Figura 4.5: parametrização injetiva após *flips* de arestas.

Obtida a parametrização da malha aplicamos uma textura sobre a mesma. Nas figuras 4.7 e 4.9 a aplicação da textura foi feita por meio de um programa desenvolvido usando a biblioteca `OPENGL`, precisando apenas informar os vértices de cada face da triangulação obtida da parametrização via algoritmo descrito acima e os vértices das suas correspondentes faces na malha. Feito isso, o pro-

grama se encarregou de aplicar a textura.

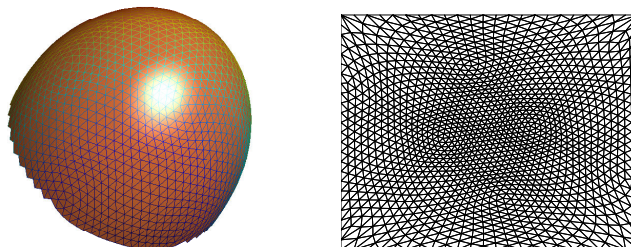


Figura 4.6: Parametrização injetiva após *flips* de aresta

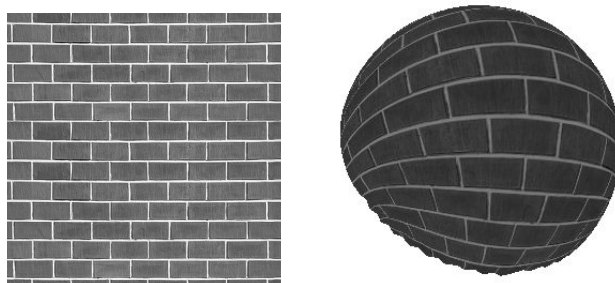


Figura 4.7: Aplicação da textura após parametrização

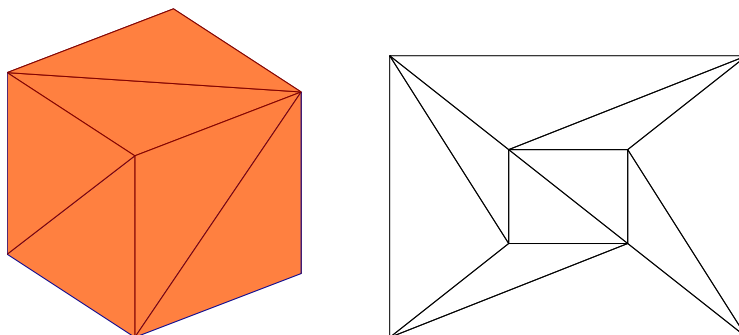


Figura 4.8: Parametrização injetiva do cubo



Figura 4.9: Aplicação da textura após parametrização

## 4.2 Suavização de Superfícies

Conforme mencionado na introdução, o laplaciano aparece no segundo membro da equação de difusão

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \lambda \Delta f.$$

Para suavizar uma malha, basta resolver essa equação usando como condição inicial as funções coordenadas da malha. Com um ligeiro abuso de notação, representaremos este processo pela equação

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} = \lambda \Delta(\mathcal{M}), \quad (4.6)$$

onde  $\mathcal{M}$  representa uma malha de triângulos.

Voltando a equação 4.6 e integrando  $\mathcal{M}$  com relação a  $t$ , uma pequena perturbação será rapidamente propagada em sua vizinhança, essa perturbação suaviza as regiões de  $\mathcal{M}$  com altas frequências, enquanto a forma principal da malha é levemente afetada.

Desenvolvendo 4.6 obtemos:

$$\mathcal{M}^{n+1} = \mathcal{M}^n + \lambda dt \Delta(\mathcal{M}^n), \quad (4.7)$$

onde  $\mathcal{M}^n = \mathcal{M}(t)$  e  $\mathcal{M}^{n+1} = \mathcal{M}(t + dt)$ , logo uma seqüência de malhas pode ser construída através da seguinte equação:

$$\mathcal{M}^{n+1} = (I + \lambda dt \Delta) \mathcal{M}^n. \quad (4.8)$$

Com a matriz de  $\Delta_d$  definido no capítulo 2 e a equação 4.7 criamos um código para gerar uma seqüência de malhas cada vez mais suaves. A implementação requer como dados de entrada o comprimento  $\lambda dt$ , a matriz de  $\Delta_d$ , a malha  $\mathcal{M}$  e o número  $n$  de malhas a serem geradas, e como saída tem-se uma malha após  $n$  iterações bem mais suavizada.

A figura 4.10 é um exemplo de malha com várias rugosidades que foram suavizadas após uma sequência de iterações a partir do código que implementamos no MATLAB:



Figura 4.10: Malha original, malha após 30 iterações, malha após 50 iterações e malha após 100 iterações de suavização, respectivamente. Para todas  $\lambda dt = 0,008$

A figura 4.11 mostra que é possível obter resultados similares aos anteriores aumentando o valor de  $\lambda dt$  o que possibilita a diminuição do número de iterações de suavização e como consequência tem-se um menor tempo de processamento.

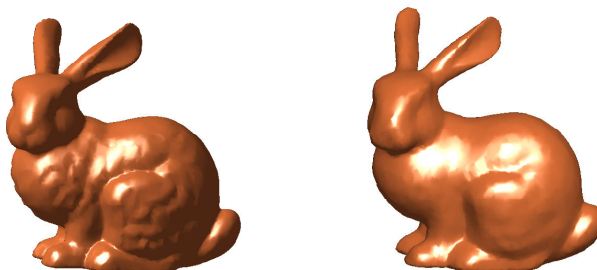


Figura 4.11: Esquerda malha original e a direita malha após 80 iterações de suavização sendo  $\lambda dt = 0,01$

A figura 4.12 é um exemplo claro de uma malha com regiões de altíssimas frequências, suavizadas após 60 iterações.

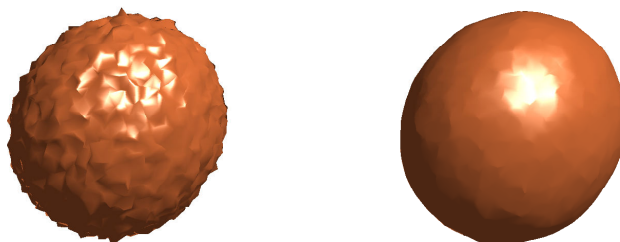


Figura 4.12: Esquerda malha com altíssimas frequências e a direita malha após 60 iterações de suavização, sendo  $\lambda dt = 0,008$

## 4.3 Identificação de Formas e Simetrias de Malhas

Nesta seção nosso objetivo é determinar curvas de nível das autofunções do laplaciano que permitem identificar formas e simetrias em malhas bem como uma certa ordenação dos seus vértices. Faremos um hiato para falar dos conjuntos nodais inicialmente.

### 4.3.1 Conjuntos Nodais

Estes conjuntos foram estudados pelo físico Ernest Chladni e publicado em seguida no seu livro “Discoveries Concerning the Theories of Music”. As experiências de Chladni consistiram em colocar areia em um prato de metal submetido a vibrações de diferentes intensidades, ele constatou que para cada vibração a areia se concentrava em determinadas regiões do prato, formando zonas com padrões complexos. Este comportamento pode ser modelado pelas autofunções  $f$  do laplaciano que satisfazem a equação de propagação da onda

$$\Delta f = \lambda f. \quad (4.9)$$

Muitos matemáticos têm estudado a convergência do espectro do operador laplaciano, mas nos limitaremos aqui a estudar a geometria das autofunções deste operador, na verdade vamos estudar os conjuntos nodais, definido como o conjunto de zeros das autofunções, ou seja,  $\{x \in \mathbb{R}^2; f(x) = 0\}$ , onde  $f$  é uma autofunção do laplaciano. Este conjunto corresponde as zonas onde a areia se acumula no prato vibrante de Chladni.

Uma forma de aproximar o operador laplaciano além da que já apresentamos no capítulo 2, é utilizando aproximação linear em cada vértice pelo operador umbrell (guarda-chuva), sendo este o laplaciano pontual

$$(\Delta u)_i = \frac{1}{m} \sum_{v_j \in N_i} (u_i - u_j), \quad (4.10)$$

onde  $v_j$  são os vizinhos do vértice  $v_i$  e  $m$  o número desses vizinhos (valência). Observe que os pesos  $w_{ij}$  nesta aproximação são uniformes, ou seja,  $w_{ij} = \frac{1}{m}$  para todo  $v_j \in N_i$ , e neste caso não é levada em consideração a geometria nem as combinações existentes na malha, por esta razão apresentamos no Capítulo 2 um laplaciano discreto geométrico  $\Delta_d$  que leva em conta a geometria da malha.

Vejam os quais as etapas da implementação no MATLAB para gerar as curvas de nível que no caso desta seção são os conjuntos nodais, ou seja, curvas no nível zero de funções definidas em malhas planares.

Criamos um código para gerar a matriz de  $\Delta_d$  no MATLAB calculamos seus autovetores que correspondem as autofunções lineares por parte do laplaciano discretizado, ou seja, com o comando `eigs( $\Delta_d$ )` é fornecido pelo MATLAB uma matriz  $A_{n \times m}$  onde  $n$  representa o número de vértices da malha, e  $m$  o número de autofunções de  $\Delta_d$ , sendo que cada coluna desta matriz corresponde aos valores destas autofunções nos vértices da malha, Com esses valores usamos interpolação linear para calcular os conjuntos nodais de cada autofunção, ou seja, os valores  $x \in \mathbb{R}^2$  em que cada autofunção se anula.

A figura 4.13 foi gerada a partir da implementação que fizemos no MATLAB e representa os conjuntos nodais de várias autofunções de uma malha planar com fronteira quadrada.

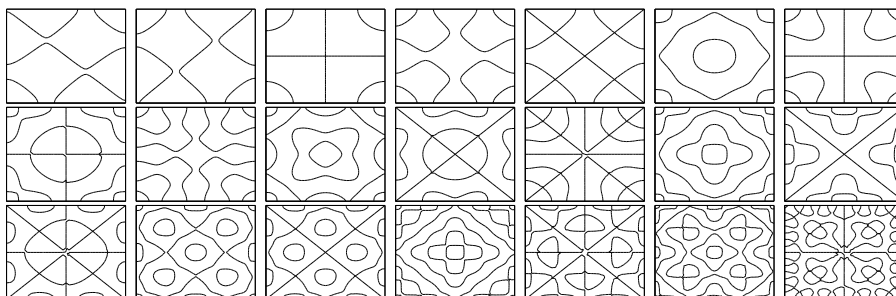


Figura 4.13: Conjuntos nodais de várias autofunções de uma malha planar com fronteira quadrada

Na próxima seção vamos estudar as curvas de nível das autofunções do laplaciano em malhas no espaço  $\mathbb{R}^3$ , mas agora não apenas no nível zero. Nosso objetivo é obter para cada autofunção curvas sobre a superfície em vários níveis, ou seja, fixando vários valores para uma autofunção obter os pontos da superfície onde ela assume esses valores.

### 4.3.2 Curvas de Contorno

O primeiro autovetor da matriz do laplaciano discretizado  $\Delta_d$  definido no capítulo 2 é  $(1,1,\dots,1)$  e está associado ao autovalor 0. O segundo autovetor é denominado autovetor de Fiedler, e tem várias aplicações, como ordenação de vértices e triângulos em uma malha, essa aplicação pode ser verificada em [11].

Na figura 4.14 apresentamos curvas de níveis do autovetor Fiedler em Três malhas distintas, geradas a partir da implementação que fizemos no MATLAB, estas curvas também são denominadas de curvas de contorno e permitem obter uma ordem dos vértices e triângulos da malha, como também visualizar simetrias em cada um dos objetos. A figura 4.15 mostra uma diferença nítida en-

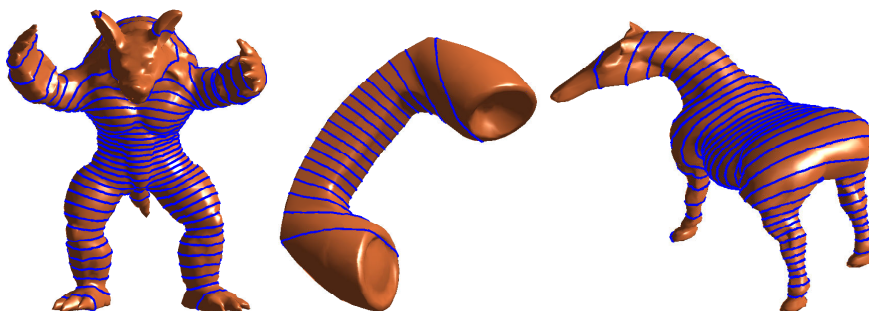


Figura 4.14: Curvas de contorno do vetor de Fiedler que permitem identificar formas e simetrias nos objetos, bem como ordenação dos seus vértices.

tre a discretização do laplaciano usando o operador umbrella e operador  $\Delta_d$ .

A geometria das curvas de nível diferem bastante, enquanto no operador  $\Delta_d$  temos curvas bem suaves usando o Laplaciano umbrella as curvas apresentam ondulações.

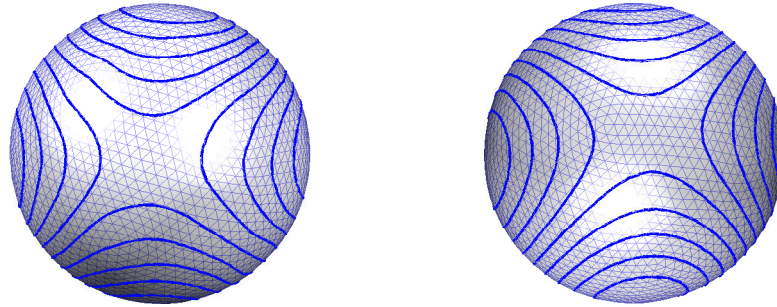


Figura 4.15: Curvas de contorno da 7<sup>a</sup> autofunção do Laplaciano umbrella à esquerda e à direita do Laplaciano  $\Delta_d$  cujo os pesos são somas de cotangentes apresentadas no capítulo 2.



## Capítulo 5

# Conclusão

Nesta dissertação apresentamos um operador laplaciano cujo domínio são funções definidas em uma superfície, no entanto vimos que para obter resultados práticos é necessário uma versão discreta desse operador, constatamos essa necessidade na parametrização de malhas de triângulos para efeito de mapeamento de textura, onde foi mostrado que em uma malha que possui todas as suas arestas obedecendo ao critério local de Delaunay e é fortemente conexa é possível obter uma parametrização injetiva, evitando problemas como faces sobrepostas na aplicação da textura; também foi necessário uma discretização do laplaciano para suavizar malhas por meio do processo de difusão, onde, malhas com altas frequências foram suavizadas após certo número de iterações; por fim, observamos formas e simetrias em malhas de triângulos ao utilizarmos as curvas de nível associadas as autofunções do laplaciano discretizado, destacando-se nesta aplicação o vetor de Fiedler.

Embora na escolha da discretização do laplaciano tenhamos optado por uma que utilizasse pesos que eram somas de cotangentes, portanto uma discretização geométrica, verificamos resultados não satisfatórios em algumas aplicações, como distorções de grandes proporções quando aplicado a textura sobre determinadas malhas, que poderiam ser minimizadas se escolhida uma parametrização mais adequada. Na suavização de malhas constatamos um leve encolhimento da malha, ou seja, uma leve diminuição de valor nas coordenadas da malha, ocasionando assim leve mudança na sua forma geral.

As dificuldades citadas anteriormente servirão de base para estudos futuros, como encontrar parametrizações que permitam minimizar distorções quando aplicado a textura sobre malha, assim como buscar alternativas que paralelamente aplicadas a suavização da malha permitam a invariância na forma geral da malha. Outra fonte de pesquisas futuras bastante promissora é a ordenação de vértices em malhas grandes, utilizando-se das curvas de nível dos autovetores da matriz do laplaciano discretizado, dando destaque para o vetor de Fiedler, tendo este estudo diversas aplicações.

# Bibliografia

- [1] Bobenko, A. I., and Springborn, B. A., A discrete Laplace-Beltrami operator for simplicial surfaces, math/0503219, 2005.
- [2] Indermitte, C., Liebling, Th. M., Troyanov, M., and Clemençon, H., Voronoi Diagrams on Piecewise Flat Surfaces and an Application to Biological Growth, ScienceDirect-Theoretical Computer Science, 2001.
- [3] Fisher M., Springborn B., Bobenko A. I., Schröder P.: An algorithm for the construction of intrinsic Delaunay triangulations with applications to digital geometry processing, Computing vol. 81, pages 199-213, 2007. .
- [4] Lévy, B. Laplace-Beltrami Eigenfunctions Towards an algorithm that “understands” geometry, IEEE-Computer society, 2006.
- [5] Desbrun, M., Meyer, M., Schr, P. Alan H.B., Implicit Fairing of Irregular Meshes using Diffusion and Curvature Flow, SIGGRAPH 99, pages 317-324, 1999.
- [6] Vito, M.C., The Spectrum of the Laplacian in Riemannian Geometry, math.berkeley.edu,2003.
- [7] Wardetzky, M., Mathur, S., Kalberer, F., and Grinspun, E. , Discrete Laplace operators: No free lunch, Eurographics Symposium on Geometry Processing, 2007 .
- [8] Perdigão, M.F., Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2005.
- [9] M. Troyanov, Les surfaces euclidiennes Sa singularité coniques, L'Enseignement Mathématique, Vol.32 ,1986.
- [10] H. Telley, Modélisation et Simulation Bidimensionnelle de la Croissance des Polycristaux, Ecole Polytechnique Federal de Lausanne, 1989.
- [11] M. Isenburg and P. Lindstrom. Streaming meshes, In IEEE Visualization, page 30, 2005.
- [12] J. Rodney Biezuner, Autovalores do Laplaciano, Notas de Aula, Departamento de Matemática, UFMG.
- [13] S. Michael Floater, One-to-one piecewise linear mappings over triangulations, Mathematics of Computation, Vol. 72, pags 685-696, 2003.