Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

As esferas que admitem uma estrutura de grupo de Lie

Kennerson Nascimento de Sousa Lima

Maceió, Brasil
02 de Março de 2010

KENNERSON NASCIMENTO DE SOUSA LIMA

As esferas que admitem uma estrutura de grupo de Lie

Dissertação de Mestrado, na área de concentração de Análise submetida em 02 de Março de 2010 à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra.

Maceió
2010

KENNERSON NASCIMENTO DE SOUSA LIMA

As esferas que admitem uma estrutura de grupo de Lie

Dissertação de Mestrado, na área de concentração de Análise submetida em 02 de Março de 2010 à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra (Orientador)

Prof. Dr. Ramón Orestes Mendoza Ahumada

Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório

Dedico este trabalho aos meus pais,
Damião de Sousa Lima e Ivânia
Nascimento de Sousa Lima.

Agradecimentos

Aos meus pais, Damião de Sousa Lima e Ivânia Nascimento de Sousa Lima e aos meus irmãos, Karolina Nascimento de Sousa Lima e Kelson Nascimento de Sousa Lima, pelo apoio incondicional e por outras incontáveis contribuições de inestimável valor.

Agradeço ao Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra pelo seu comprometimento, apoio e solicitude durante o exercício de sua orientação, fator fundamental para o êxito deste trabalho.

Agradeço ao Prof. Dr. Ramón Orestes Mendoza Ahumada, da Universidade Federal de Pernambuco, pelo envolvimento neste trabalho, colaborando com uma boa sugestão de tema para esta dissertação.

Agradeço Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório da Universidade Federal de Alagoas por contribuir para a melhoria deste trabalho com suas correções e relevantes sugestões.

Agradeço a todo corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da UFAL por contribuirem, direta ou indiretamente, para minha formação acadêmica durante todo o curso de Mestrado. Agradeço em especial aos professores Adán José Corcho Fernández, José Carlos Almeida de Lima, Krerley Irraciel Martins de Oliveira e Marcos Petrúcio de A. Cavalcante, com os quais estabeleci um proveitoso convívio através das disciplinas que cursei com os mesmos.

Finalmente, agradeço aos meus colegas de turma pela amizade, pela nobre convivência e por compartilharem momentos de colaboração mútua nos estudos e momentos descontraídos. Agradeço especialmente aos colegas Fábio Henrique de Carvalho, Isadora Maria de Jesus, Isnaldo Isaac Barbosa e Rodrigo Fernandes de Moura Melo.

Resumo

Mostraremos que as únicas esferas euclidianas conexas que admitem uma estrutura de grupo de Lie são $\mathbb{S}^1$ e $\mathbb{S}^3$, para todo $n \geq 1$. Faremos isso por intermédio do estudo de propriedades dos grupos de cohomologia de De Rham das esfereas $\mathbb{S}^n$ e dos grupos de Lie compactos e conexos.

Palavras Chave: Esfera; Grupo de Lie; Álgebra de Lie; Grupo de cohomologia de De Rham; Métrica bi-invariante.

Abstract

We will show that the only connected Euclidean spheres admitting a structure of Lie group are $\mathbb{S}^1$ and $\mathbb{S}^3$, for all $n \geq 1$. We will do this through the study of properties of the De Rham cohomology groups of sphere $\mathbb{S}^n$ and of compact connected Lie groups.

Key Words: Spheres; Lie Group; Lie Algebra; De Rham Cohomology Group; Bi-invariant Metric.

Índice

Introdução

Neste trabalho, consideramos a questão da caracterização das esferas euclidianas $\mathbb{S}^n$ que admitem uma estrutura de grupo de Lie. Isto significa determinar quais esferas $\mathbb{S}^n$ possuem uma estrutura algébrica de grupo e uma estrutura diferenciável tal que, relativamente às coordenadas locais dessa estrutura diferenciável, as operações de multiplicação e de inversão nesse grupo sejam diferenciáveis.

Na verdade, nem toda esfera $\mathbb{S}^n$ admite uma tal estrutura. De fato, mostraremos que as únicas que são grupos de Lie são $\mathbb{S}^1$ e $\mathbb{S}^3$, para todo $n \geq 1$. Estabeleceremos essa caracterização aplicando alguns resultados das teorias de grupos de Lie e de *grupos de cohomologia de De Rham*, esta última sendo tradicionalmente do domínio da Topologia Algébrica. Porém, não necessitaremos de nenhum conhecimento aprofundado desta área.

O primeiro capítulo deste trabalho é dedicado à uma breve introdução às noções de variedade diferenciável, métrica riemanniana e formas diferenciais sobre variedades diferenciáveis.

No segundo, além de conceituar e exemplificar grupos de Lie e grupos de cohomologia de De Rham, listaremos propriedades importantes de ambos. A respeito de grupos de Lie, podemos destacar os exemplos das esferas $\mathbb{S}^1$ e $\mathbb{S}^3$, o conceito de *representação adjunta* de um grupo de Lie e o resultado que nos garante que todo grupo de Lie compacto e conexo admite uma métrica bi-invariante. Quanto aos grupos de cohomologia de De Rham de dimensão k, $H^k(M)$, de uma variedade diferenciável M, listaremos propriedades elementares e calcularemos alguns exemplos úteis. Dentre esses cálculos, podemos destacar o critério dado pelo seguinte teorema chave:

"*Para cada* $0 < k < n-1$*, temos* $H^k(\mathbb{R}^n - \{0\}) = H^k(\mathbb{S}^{n-1}) = 0, \quad \forall n \geq 1$."

Finalmente, no capítulo 3, chegaremos ao resultado principal, a saber, que as únicas esferas $\mathbb{S}^n$ que admitem uma estrutura de grupo de Lie são $\mathbb{S}^1$ e $\mathbb{S}^3$. O primeiro resultado apresentado nesta seção nos fornece um importante critério de invariância para p-formas multilineares sobre a álgebra de Lie de um grupo de Lie compacto e conexo, do qual decorre algumas consequências úteis para a demonstração do teorema seguinte:

Teorema *Se* $H^1(G) = \{0\}$*, então a correspondência* $\eta \mapsto \omega$*, dada por* $\omega(X,Y,Z) = \eta([X,Y], Z)$*, é uma correspondência biunívoca do espaço das* 2*-formas simétricas invariantes sobre* $\mathcal{G}$ *no espaço das* 3*-formas alternadas invariantes sobre* $\mathcal{G}$*.*

Esse teorema, junto com o fato da existência de uma métrica bi-invariante para todo grupo de Lie compacto e conexo, nos permite chegar ao resultado principal, aplicando o critério apresentado acima para o cálculo do grupo de cohomologia de De Rham da esfera $\mathbb{S}^n$.

A elaboração deste trabalho consistiu em uma pesquisa bibliográfica específica, baseada naqueles livros que continham os resultados e parte da teoria mais relevantes para a nossa finalidade. Dentre estes, destacamos [2], de onde foi baseada a maior parte da teoria de variedades diferenciáveis, grupos de Lie e grupos de cohomologia de De Rham apresentada no texto, [7] no qual nos baseamos para obtermos o critério para a determinação do grupo de cohomologia de De Rham da esfera e [1], de onde extraímos os resultados mais importantes do capítulo 3.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos o conceito de variedade diferenciável além das noções de variedade riemanniana, orientação e subvariedade. Também definiremos campos de vetores e formas diferenciais sobre variedades diferenciáveis.

1.1 Variedades diferenciáveis

Será tratado nesta seção, além do conceito e exemplos de variedades diferenciáveis, da noção de diferenciabilidade de uma aplicação definida sobre uma variedade. A partir desse conceito, definiremos vetor tangente a uma variedade e fibrado tangente.

Definição 1.1. *Uma* variedade diferenciável *de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações injetivas $f_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M tais que:*

(1) $\displaystyle\bigcup_\alpha f_\alpha(U_\alpha) = M$*;*

(2) *$\forall\ \alpha,\ \beta$, com $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $f_\alpha^{-1}(W)$ e $f_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$ são diferenciáveis em U_α;*

O par (U_α, f_α) (ou a aplicação f_α) com $p \in f_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma *parametrização* (ou *um sistema de coordenadas locais*) de M em p; $f_\alpha(U_\alpha)$ é então chamada uma *vizinhança coordenada* de p em M. Uma família $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ satisfazendo (1) e (2) é chamada estrutura diferenciável em M.

Observação 1.1. A família $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ é máxima em relação às condições (1) e (2). Em outras palavras, se $g : V \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ é injetiva e tal que sempre que $V \cap U_\alpha = W \neq \emptyset$ implique $g^{-1}(W)$ e $f_\alpha^{-1}(W)$ abertos em $\mathbb{R}^n$ e $f_\alpha^{-1} \circ g$ e $g^{-1} \circ f_\alpha$ diferenciáveis $\forall\alpha$, então o par $(g, V) \in \{(U_\alpha, f_\alpha)\}$.

Exemplo 1.1. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, com a estrutura $\{(\mathbb{R}^n, id)\}$ dada pela aplicação identidade $id : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um exemplo trivial de variedade diferenciável. Identificando o espaço das matrizes $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$ com o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{mn}$ e admitindo que esses espaços são homemorfos, podemos cobri-los usando a aplicação identidade citada acima. A mesma identificação pode ser usada se quisermos munir um espaço vetorial qualquer sobre $\mathbb{R}$ de uma estrutura diferenciável.

Exemplo 1.2. Seja $U \subset M$ um subconjunto aberto de uma variedade diferenciável M. Dado $p \in M$, sabemos que existe uma vizinhança coordenada $f_\alpha(U_\alpha)$ de p em M. Considere a restrição de f_α a $V = f_\alpha^{-1}(U \cap f_\alpha(U_\alpha))$, $f_\alpha|_V$. Estas parametrizações de p em U cobrem U e a mudança de coordenadas entre duas restrições de duas parametrizações de p em M, digamos f_α e f_β, a $f_\alpha^{-1}(f_\alpha(U_\alpha) \cap U)$ e $f_\beta^{-1}(f_\beta(U_\beta) \cap U)$, respectivamente, também é diferenciável. Temos com isso que todo subconjunto aberto de uma variedade M também é uma variedade de dimensão igual a de M e com estrutura diferenciável dada pelas restrições das parametrizações que mapeiam uma vizinhança de p em U.

Um caso particular do exemplo acima é dado pelo conjunto das matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$, não-singulares, que denotaremos por $Gl(n, \mathbb{R})$. É bem sabido que $A \in Gl(n, \mathbb{R})$ se e somente se $\det A \neq 0$. Como $\det A$ é uma função contínua, o complementar do conjunto das matrizes com determinante não-nulo, $U = \{A; \det A = 0\}$, é fechado, por ser imagem do fechado $\{0\}$. Portanto, $Gl(n, \mathbb{R})$ é aberto no conjunto das matrizes $n \times n$ que, como foi observado, trata-se de uma variedade de dimensão n^2. Assim, $Gl(n, \mathbb{R})$ é uma variedade de dimensão n^2.

Exemplo 1.3 (Superfícies regulares do $\mathbb{R}^n$)**.** Um subconjunto $S^k \subset \mathbb{R}^n$ é uma *superfície regular de dimensão k* se, para todo ponto $p \in S^k$, existem uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^n$ e uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow V \cap S^k$ de um aberto $U \subset \mathbb{R}^k$ sobre $V \cap S^k$, tais que:

(a) *f é um homeomorfismo diferenciável;*

(b) *A diferencial $(df)_q : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é injetiva para todo $q \in U$.*

A aplicação f é chamada uma parametrização de S^k em p.

Uma consequência da definição de superfície dada acima é o fato de que a mudança de parametrizações é um difeomorfismo e, portanto, S^k é uma variedade de dimensão k. Mais precisamente, se $f : U \longrightarrow S^k$ e $g : V \longrightarrow S^k$ são duas parametrizações tais que $f(U) \cap g(V) = W \neq \emptyset$, então as aplicações $h = g^{-1} \circ f : f^{-1}(W) \longrightarrow g^{-1}(W)$ e $h^{-1} = f^{-1} \circ g : g^{-1}(W) \longrightarrow f^{-1}(W)$ são diferenciáveis. Vamos mostrar que h é diferenciável; verifica-se que h^{-1} é diferenciável de maneira análoga.

Observe que $h = g^{-1} \circ f$ é um homeomorfismo, uma vez que f e g são homeomorfismos. Sejam $r \in g^{-1}(W)$ e $q = h(r)$. Se $(u_1, \ldots, u_k) \in U$ e $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, escreva f nestas coordenadas como

$$f(u_1, \ldots, u_k) = (v_1(u_1, \ldots, u_k), \ldots, v_n(u_1, \ldots, u_k)).$$

Pela condição (b) o posto de $(df)_q$ é igual a k para todo $r \in U$. Assim, a menos de uma reordenação de índices, temos

$$\frac{\partial(v_1, \ldots, v_k)}{\partial(u_1, \ldots, u_k)}(q) \neq 0.$$

Defina $F : U \times \mathbb{R}^{n-k} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por
$F(u_1, \ldots, u_k, t_{k+1}, \ldots, t_n) = (v_1(u_1, \ldots, u_k), \ldots, v_n(u_1, \ldots, u_k), v_{k+1}(u_1, \ldots, u_k) +$

$$t_{k+1}, \ldots, v_n(u_1, \ldots, u_k) + t_n),$$

com $(t_{k+1}, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$.

Temos que F é diferenciável e sua restrição a $U \times \{(0, \dots, 0)\}$ coincide com a parametrização f; além disso, temos

$$(dF_{\tilde{q}}) = \frac{\partial(v_1, \dots, v_k)}{\partial(u_1, \dots, u_k)}(q) \neq 0, \quad \tilde{q} = (u_1, \dots, u_k, 0, \dots, 0).$$

Portanto, pelo teorema de função inversa, existe uma vizinhança $Q \subset \mathbb{R}^n$ de $F(\tilde{q}) = f(q)$ onde F^{-1} existe e é diferenciável. Por continuidade de g, existe uma vizinhança $R \subset g^{-1}(W)$ de r tal que $g(R) \subset Q$. Como $h \mid R = \pi \circ F^{-1} \circ g \mid R$, onde π é a projeção de $F^{-1} \circ g(u)$, $u \in R$, sobre U. Segue que h é uma composição de aplicações diferenciáveis em r e portanto, é diferenciável em r. Como r é arbitrário, temos que h é diferenciável em $g^{-1}(W)$, como queríamos mostrar.

Exemplo 1.4 (A esfera $\mathbb{S}^n$)**.** Seja

$$\mathbb{S}^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$$

a esfera de raio 1 e centro na origem de $\mathbb{R}^{n+1}$. Seja $N = (0, \dots, 0, 1)$ o polo norte e $S = (0, \dots, 0, -1)$ o polo sul de $\mathbb{S}^n$. Defina a aplicação $\pi_1 : \mathbb{S}^n - \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, *projeção estereográfica* de $\mathbb{S}^n$ a partir do pólo norte, que leva $p \in \mathbb{S}^n$, $p = (x_1, \dots, x_{n+1})$ na intersecção do plano $x_{n+1} = 0$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ com a semi-reta $Np \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Os pontos da semi-reta Np são da forma $N + t(p - N)$, com $t > 0$. Portanto, o ponto de intersecção desta semi-reta com o plano $x_{n+1} = 0$ ocorre quando sua última coordenada $1 + t(1 - x_{n+1})$ é igual a zero, i.e, quando $t = \frac{1}{1 - x_{n+1}}$. Portanto, temos que $\pi_1(p) = \pi_1(x_1, \dots, x_{n+1})$ é igual ao ponto da semi-reta Np obtido quando tomamos $t = \frac{1}{1 - x_{n+1}}$, ou seja,

$$\pi_1(x_1, \dots, x_{n+1}) = (\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}).$$

De maneira análoga, obtemos para $\pi_2 : \mathbb{S}^n - \{S\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, *projeção estereográfica* de $\mathbb{S}^n$ a partir do pólo sul S, usando a semi-reta $S + t(p - S)$, $t > 0$, a seguinte expressão

$$\pi_2(p) = \pi_2(x_1, \dots, x_{n+1}) = (\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}}).$$

As aplicações π_1 e π_2 são diferenciáveis; se definirmos $\zeta_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n - \{N\}$ e $\zeta_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n - \{S\}$ por

$$\zeta_1(q) = \zeta_1(y_1, \dots, y_n) = (\frac{2y_1}{\|q\|^2 + 1}, \dots, \frac{2y_n}{\|q\|^2 + 1}, \frac{\|q\|^2 - 1}{\|q\|^2 + 1}),$$

e

$$\zeta_2(q) = \zeta_1(y_1, \dots, y_n) = (\frac{2y_1}{\|q\|^2 + 1}, \dots, \frac{2y_n}{\|q\|^2 + 1}, \frac{1 - \|q\|^2}{\|q\|^2 + 1})$$

com $q = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, teremos $\zeta_1(\pi_1(p)) = p$ e $\pi_1(\zeta_1(q)) = q$, assim como $\zeta_2(\pi_2(p)) = p$ e $\pi_2(\zeta_2(q)) = q$. Portanto $\zeta_1 = \pi_1^{-1}$ e $\zeta_2 = \pi_2^{-1}$.

Como as aplicações ζ_1 e ζ_2 são contínuas, temos que π_1 e π_2 são homeomorfimos diferenciáveis. Além disso, um cálculo direto nos mostra que as matrizes jacobianas de π_1^{-1} e π_2^{-1} tem posto igual a n. Logo são injetivas, para todo $q \in \mathbb{R}^n$.

É claro que $\pi_1^{-1}(\mathbb{R}^n) \cup \pi_2^{-1}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{S}^n$. Portanto, π_1^{-1} e π_2^{-1} podem ser tomadas como parametrizações na esfera $\mathbb{S}^n$. Com isso, temos que a esfera $\mathbb{S}^n$ é uma superfície regular de dimensão n do $\mathbb{R}^{n+1}$ e, portanto, temos que $\mathbb{S}^n$ é uma variedade de dimensão n.

Proposição 1.1 (Variedade produto)**.** *Sejam M e N variedades diferenciáveis de dimenções m e n respectivamente. Então $M \times N$ é uma variedade diferenciável de dimensão $m+n$ com estrutura diferenciável determinada por vizinhanças coordenadas de (p,q) em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ da forma $\{(U_\alpha \times V_\beta, f_\alpha \times g_\beta)\}$, onde (U_α, f_α) e (V_β, g_β) são vizinhanças coordenadas de p e q em M e N, respectivamente, e $(f_\alpha \times g_\beta)(p,q) = (f_\alpha(p), g_\beta(q))$.*

Demonstração. Faça $h_\lambda = f_\alpha \times g_\beta$, onde $\lambda = (\alpha, \beta)$. Segue da injetividade de f_α e g_β que h_λ também é uma aplicação injetiva. Note também que

$$\bigcup_\lambda h_\lambda = \bigcup_{(\alpha,\beta)} (f_\alpha(U_\alpha) \times g_\beta(V_\beta)) = \bigcup_\alpha f_\alpha(U_\alpha) \times \bigcup_\beta g_\beta(V_\beta) = M \times N.$$

Nos resta mostrar que qualquer mudança de coordenadas do tipo $h_\lambda^{-1} \circ h_\theta$, $\lambda = (\alpha, \beta)$ e $\theta = (\delta, \epsilon)$ é diferenciável em $U_\alpha \times V_\beta \subset \mathbb{R}^{m+n}$. De fato temos que

$$h_\lambda^{-1} \circ h_\theta = (f_\alpha \times g_\beta)^{-1} \circ (f_\delta \times g_\epsilon) = (f_\alpha^{-1}, g_\beta^{-1}) \circ (f_\delta, g_\epsilon) = (f_\alpha^{-1} \circ f_\delta, g_\beta^{-1} \circ g_\epsilon).$$

Segue da diferenciabilidade das mudanças de coordenadas $f_\alpha^{-1} \circ f_\delta$ e $g_\beta^{-1} \circ g_\epsilon$ em $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ e $g_\beta^{-1}(V_\beta)$, respectivamente, que a mudança $h_\lambda^{-1} \circ h_\theta$ é diferenciável em $U_\alpha \times V_\beta \subset \mathbb{R}^{m+n}$, como queríamos mostrar. Assim, $M \times N$ é uma variedade de dimensão $m+n$.

□

Antes de apresentarmos o próximo exemplo de variedade diferenciável, necessitamos introduzir a noção de vetor tangente a uma variedade num ponto pertecente a mesma. Para isso, iremos estender a noção de diferenciabilidade às aplicações entre variedades.

Definição 1.2. *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis de dimenções m e n, respectivamente. Uma aplicação $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ é* diferenciável *em $p \in M_1$ se dada uma parametrização $g : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow M_2$ em $\varphi(p)$ existe uma parametrização $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M_1$ de p em M_1 tal que $\varphi(f(U)) \subset g(v)$ e a aplicação*

$$g^{-1} \circ \varphi \circ f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \tag{1.1}$$

é diferenciável em $f^{-1}(p)$. φ é diferenciável em um aberto de M_1 se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.

Observação 1.2. Uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ numa variedade M induz de uma maneira natural uma topologia em M. Basta definir que $A \subset M$ é um aberto de M se $f_\alpha^{-1}(A \cap f_\alpha(U_\alpha)) \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$, $\forall \alpha$.

Decorre do item (2) da **Definição 1.1** que a definição de diferenciabilidade num ponto $p \in M_1$ de uma aplicação $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$, entre as variedades M_1 e M_2, não depende da escolha das parametrizações. Para mostar isso, sejam $g_1 : V_1 \longrightarrow M_2$ uma parametrização de uma vizinhança de $\varphi(p)$ e $f_1 : U_1 \longrightarrow M_1$ uma parametrização de uma vizinhança de p em M_1, satisfazendo as condições da definição. Seja agora $g_2 : V_2 \longrightarrow M_2$ uma outra parametrização de M_2 numa vizinhança de $\varphi(p)$ e seja $f_2 : U_2 \longrightarrow M_1$ uma outra parametrização de M_1 numa vizinhança de p tais que $\varphi(f_2(U_2)) \subset g(V_2)$. Como a mudança de coordenadas é sempre diferenciável e a aplicação $g_1^{-1} \circ \varphi \circ f_1$ é diferenciável, segue que

$$g_2^{-1} \circ f_2 = (g_2^{-1} \circ g_1) \circ (g_1^{-1} \circ \varphi \circ f_1) \circ (f_1^{-1} \circ f_2)$$

é diferenciável, como havíamos afirmado.

A aplicação (1.1) é chamada a *expressão de* φ *nas parametrizações* f e g.

Definição 1.3 (Vetor tangente)**.** *Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ é chamada* curva diferenciável *em M. Suponha que $\alpha(0) = p \in M$, e seja $\mathcal{D}$ o conjunto das funções $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis em p. O vetor tangente a curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\alpha'(0)\varphi = \left.\frac{d(\varphi \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0}, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Um vetor tangente a M em p *é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p será indicado por T_pM.*

Dada uma parametrização $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ em $p = f(0)$, sejam

$$\varphi \circ f(q) = \varphi(x_1, \ldots, x_n), \quad (x_1, \ldots, x_n) = q \in U$$

e

$$f^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

as expressões de φ e α na parametrização f. Restringindo a expressão de φ a α, temos

$$\begin{aligned} \alpha'(0)\varphi &= \left.\frac{d(\varphi \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\varphi(x_1(t), \ldots, x_n(t))\right|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0\right)\varphi. \end{aligned}$$

Dessa forma, o vetor $\alpha'(0)$ pode ser expresso na parametrização f por

$$\sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0.$$

Um cálculo direto nos dá, por exemplo, que o vetor $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0$ é o vetor tangente em $p \in M$ à curva coordenada

$$t \mapsto f(0, \ldots, x_i(t) = t, \ldots, 0).$$

Portanto, temos que o vetor tangente a α em p depende apenas das derivadas de α em um sistema de coordenadas. Temos que o conjunto de vetores tangentes em p, T_pM, é igual ao espaço vetorial gerado pelos vetores tangentes $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0$, $i = 1, \ldots, n$, determinados pela parametrização f. De fato, segue da expressão de $\alpha'(0)$ na parametrização f que T_pM está contido no conjunto gerado pelos vetores $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_0\right\}$. Por outro lado, dado $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0$, defina $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$, na parametrização f, por $x_i(t) = \lambda_i t$. Então, $\alpha'(0) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0 = v$. Portanto, T_pM é o espaço vetorial gerado pelos vetores $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0$, $i = 1, \ldots, n$. Como estes vetores são linearmente independentes, segue que T_pM tem dimensão n. O espaço vetorial T_pM é chamado *espaço tangente* a M em p. A escolha de uma parametrização $f : U \longrightarrow M$ em uma vizinhança de p em M determina uma base associada $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0\right\}$ em T_pM.

Definição 1.4. *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis de dimensões m e n e seja $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M_1$ e cada $v \in T_pM_1$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon\, \varepsilon) \longrightarrow M_1$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Tome $\beta = \varphi \circ \alpha$. A aplicação $(d\varphi)_p : T_pM_1 \longrightarrow T_{\varphi(p)}M_2$ dada por $(d\varphi)_p(v) = \beta'(0)$ é chamada diferencial de φ em p.*

Proposição 1.2. *A aplicação $(d\varphi)_p$ é linear e não depende da escolha da curva α.*

Demonstração. Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M_1$ e $g : V \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow M_2$ parametrizações em p e $\varphi(p)$, respectivamente. Portanto, a expressão de φ nessas parametrizações é dada por $g^{-1} \circ \varphi \circ f : U \longrightarrow V$ com

$$g^{-1} \circ \varphi \circ f(q) = (y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m(x_1, \ldots, x_n)),$$

onde $q = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ e $(y_1, \ldots, y_m) \in V$. Temos também que a expressão de α na parametrização f é

$$f^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)).$$

Então, a expressão de $\beta = \varphi \circ \alpha$ na parametrização g é

$$g^{-1} \circ \beta(t) = (y_1(x_1(t), \ldots, x_n(t)), \ldots, y_m(x_1(t), \ldots, x_n(t))).$$

Daí, temos a expressão de $\beta'(0)$ na base $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_0\right\}$, $i = 1, \ldots, m$, associada a g, dada por

$$\beta'(0) = (\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} x_i'(0), \ldots, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_m}{\partial x_i} x_i'(0)) \in T_{\varphi(p)}M_2,$$

que por sua vez, não depende de α.

Além disso, podemos escrever $\beta'(0)$ como

$$\beta'(0) = (d\varphi)_p(v) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)(x_j'(0)), \quad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n,$$

onde $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$ indica uma matriz $m \times n$ e $(x_j'(0))$ indica uma matriz coluna $n \times 1$. Portanto, $(d\varphi)_p$ é uma aplicação linear de T_pM_1 em $T_{\varphi(p)}M_2$, cuja matriz nas bases $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_0\right\}$ e $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_0\right\}$ associadas às parametrizações f e g é precisamente

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right).$$

$\square$

Dadas as definições de espaço tangente e de diferencial de uma aplicação diferenciável entre duas variedades, podemos apresentar o seguinte exemplo de variedade.

Exemplo 1.5 (Fibrado tangente)**.** Seja M^n uma variedade de dimensão n e seja $TM = \{(p,v); p \in M, v \in T_pM\}$. Queremos mostrar que TM pode ser munido de uma estrutura diferenciável. Com esta estrutura, TM é a variedade chamada *fibrado tangente* de M^n.

Seja $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ a estrutura diferenciável máxima de M. Indicaremos por $(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha)$ as coordenadas de U_α e por $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\right\}$ as bases associadas nos espaços tangentes de $f_\alpha(U_\alpha)$.

Defina $g_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow TM$ por

$$\begin{aligned} g_\alpha(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha, u_1, \ldots, u_n) &= (f_\alpha(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha), \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i}) \\ &= (f_\alpha(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha), (df_\alpha)_p(u_1, \ldots, u_n)), \end{aligned}$$

$(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, $p = f_\alpha(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha)$. *É claro que*

$$\bigcup_\alpha f_\alpha(U_\alpha) = M.$$

Como $(df_\alpha)_{f_\alpha(q)}(\mathbb{R}^n) = T_{f_\alpha(q)}M, q = (x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha) \in U_\alpha$, *temos que*

$$\bigcup_\alpha g_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) = TM.$$

Resta mostrar que toda mudança de coordenadas $g_\beta^{-1} \circ g_\alpha$ é diferenciável. Para mostrar isto, seja $(p,v) \in g_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) \cap g_\beta(U_\beta \times \mathbb{R}^n)$. Então

$$(p,v) = (f_\alpha(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha), (df_\alpha)(v_\alpha)) = (f_\beta(x_1^\beta, \ldots, x_n^\beta), (df_\alpha)(v_\beta)),$$

onde $v_\alpha, v_\beta \in \mathbb{R}^n$ e $q_\alpha = (x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha) \in U_\alpha$ e $q_\beta = (x_1^\beta, \ldots, x_n^\beta) \in U_\beta$. Portanto,

$$g_\beta^{-1} \circ g_\alpha(q_\alpha, v_\alpha) = g_\beta^{-1}(f_\alpha(q_\alpha), (df_\alpha)(v_\alpha)) = (f_\beta^{-1} \circ f_\alpha(q_\alpha), d(f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)(v_\alpha)).$$

Segue da diferenciabilidade de $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$ que $g_\beta^{-1} \circ g_\alpha$ é diferenciável. Portanto, temos que TM é uma variedade diferenciável de dimensão $2n$.

1.2 Campo de Vetores e Métrica Riemanniana

Definição 1.5 (Campo de vetores)**.** *Um* campo de vetores *sobre uma variedade M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$. Em termos de aplicações, X é uma aplicação de M em TM. Diz-se que X é um* campo diferenciável *se a aplicação $X : M \longrightarrow TM$ é diferenciável.*

Considerando uma parametrização $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é possível escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde cada função $a_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função em U e $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right\}$ é a base associada a f, $i = 1, \ldots, n$. Segue facilmente que X é diferenciável se, e somente se, as funções a_i são dieferenciáveis; de fato, a expressão $\hat{X} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$ de X, nas coordenadas locais de M e TM, é $q \mapsto (x_1, \ldots, x_n, a_1(q), \ldots, a_i(q), \ldots, a_n(q))$, $q = (x_1, \ldots, x_n) \in U$, com as funções coordenadas a_i representando, com um certo abuso de linguagem, as expressões em coordenadas locais das funções $a_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Representamos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto de todos os campos diferenciáveis sobre M.

Exemplo 1.6. Se considerarmos $M = \mathbb{R}^3 - \{0\}$, então *campo gravitacional* de um objeto de massa igual a 1 na posição $(0, 0, 0)$ é um campo diferenciável cujas componentes α_1, α_2 e α_3 relativas a base $\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial x_2}$ e $\frac{\partial}{\partial x_3}$ são dadas por

$$\alpha_i = -\frac{x_i}{r^3}, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{com} \quad r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^3)^{1/2}.$$

Podemos pensar em um campo de vetores X como sendo uma aplicação $X : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{F}$ do conjunto $\mathcal{D}$ das fuções diferenciáveis em M no conjunto $\mathcal{F}$ das funções em M, definida por

$$X\varphi(p) = \sum_i a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(p),$$

onde, por um abuso de notação, φ é a expressão de φ numa parametrização $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$.

Com esta interpretação, podemos considerar os iterados de X, no sentido de que, dados X, Y campos diferenciáveis em M e $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, podemos considerar as funções $X(Y\varphi)$ e $Y(X\varphi)$. Feito isto, podemos definir a operação entre campos chamada *colchete* de campos diferenciáveis. Antes de enunciarmos esta definição, precisamos do seguinte lema.

Lema 1.1. *Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores sobre uma variedade M. Então existe um único campo diferenciável Z sobre M tal que*

$$Z\varphi = (XY - YX)\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Demonstração. Provaremos primeiro a unicidade. Suponha então a existência de um tal campo Z. Dado $p \in M$, seja $f : U \longrightarrow M$ uma parametrização em p. Se

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad e \quad Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

são as expressões de X e Y na parametrização f, então, para toda $\varphi \in \mathcal{D}$ temos

$$XY\varphi = X\left(\sum_j b_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$YX\varphi = Y\left(\sum_i a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) = \sum_{i,j} b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Portanto, a expressão de Z é dada, na parametrização f, por

$$Z\varphi = XY\varphi - YX\varphi = (XY - YX)\varphi = \sum_{i,j}\left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

que, por sua vez, é única. Note que Z definida assim, é diferenciável.

Para mostrarmos a existência, defina Z_α numa vizinhança coordenada $f_\alpha(U_\alpha)$ pela expressão acima. Seja $f_\beta(U_\beta)$ uma vizinhança coordenada tal que $W = f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$. Os valores das expressões de a_i em f_α e f_β restrito aos pontos de W são iguais. O mesmo vale para as expressões de b_i. Portanto, em W, $Z_\alpha = Z_\beta$, o que nos permite definir Z em toda variedade M.

□

Definição 1.6. *O campo vetorial diferenciável Z dado pelo* Lema 1.1 *é chamado o* colchete $[X, Y] = XY - YX$ *de X e Y.*

Proposição 1.3. *Se X, Y e Z são campos diferenciáveis em M, a, b são números reais, e f, g são funções diferenciáveis em M, então:*

(1) $[X, Y] = -[Y, X]$ (anticomutatividade)*;*

(2) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (linearidade)*;*

(3) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (identidade de Jacobi)*.*

Demonstração. Demonstraremos apenas (3). Observe que, por um lado,

$$[[X, Y], Z] = [XY - YX, Z] = XYZ - YXZ - ZXY + ZYX$$

e, por outro lado,

$$[[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = XYZ - XZY - YZX + ZYX$$
$$+YZX - YXZ - ZXY + XZY.$$

Como os segundos membros das expressões acima são iguais, concluimos (3) usando (1).

$\square$

Definição 1.7 (Métrica riemanniana)**.** *Uma* métrica riemanniana *em uma variedade diferenciável M^n é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle , \rangle_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que se $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $f(x_1, \ldots, x_n) = q \in f(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = (df)_q(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, então*

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$$

é diferenciável em U, $i, j = 1, \ldots, n$.

As funções $g_{ij}(= g_{ji})$ são chamadas *expressão da métrica riemanniana* no sistemas de coordenadas $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$. Uma variedade com uma dada métrica é chamada *variedade riemanniana.*

Definição 1.8. *Sejam M^n e N^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $F : M \longrightarrow N$ é uma* imersão *se $(dF)_p : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se além disso, F for um homeomorfismo sobre $F(M) \subset N$, onde $F(M)$ possui a topologia induzida por N, F é um* mergulho

Em particular, temos que todo mergulho é uma imersão. A recíproca dessa afirmação, em geral, é falsa. Porém, é possível mostrar que *localmente*, toda imersão é um mergulho. Em Geometria Riemanniana, a noção de *isometria* é, num certo sentido, uma relação de equivalência entre variedades riemannianas. Vamos enunciar a seguir a definição precisa de isometria.

Definição 1.9 (Isometria)**.** *Sejam M e N variedades riemannianas. Um difeomorfismo $F : M \longrightarrow N$ é chamado uma isometria se*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle (dF)_p(u), (dF)_p(v) \rangle_{F(p)}, \quad \forall p \in M, \quad u, v \in T_pM.$$

Exemplo 1.7. Seja $M = \mathbb{R}^n$ com a base $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right\}$ identificada com a base canônica do $\mathbb{R}^n$. A métrica é dada por

$$\langle e_i, e_j \rangle_p = \delta_{ij}$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Cada função $g_{ij} = \delta_{ij}$ é constante e, portanto diferenciável. Poranto, este produto define uma métrica riemanniana em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.8 (Variedade imersa)**.** Seja $F : M^n \longrightarrow N^{n+k}$ uma imersão e N uma variedade riemanniana. Podemos munir M de uma métrica $\langle , \rangle_p$ fazendo

$$\langle u, v \rangle_p = \langle (dF)_p(u), (dF)_p(v) \rangle_{F(p)}, \quad p \in M, \quad u, v \in T_pM.$$

Como $(dF)_p$ é injetiva, segue que $\langle , \rangle_p$ é positivo definido. Além disso, cada vetor $\frac{\partial}{\partial x_i} \in T_pM$ é levado por $(dF)_p$ num vetor da base de $T_{F(p)}N$. Logo, as funções $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle_p$

são diferenciáveis. Como $\langle , \rangle_p$ também é claramente bilinear e simétrica, segue que $\langle , \rangle_p$ define, de fato, uma métrica em M. Esta métrica é chamada *métrica induzida* por F e F é chamada *imersão isométrica*.

Como caso particular de variedade imersa, temos as superfícies regulares de dimensão k, $S^k \subset \mathbb{R}^n$. Como a aplicação inclusão $i : S^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ é um mergulho, temos, em particular, que esta aplicação inclusão é uma imersão. Portanto, $i : S^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ induz uma métrica em S^k. No caso da esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ chamamos essa métrica induzida de *métrica canônica* de $\mathbb{S}^n$.

Exemplo 1.9 (Métrica produto)**.** Seja M_1 e M_2 variedades rimannianas e considere o produto cartesiano $M_1 \times M_2$ com a estrutura de variedade produto, dada na **Proposição 1.1**. Sejam $\pi_1 : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_1$ e $\pi_2 : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_2$ as projeções naturais. Defina em $M_1 \times M_2$

$$\langle u, v \rangle_{(p,q)} = \langle d\pi_1(u), d\pi_1(v) \rangle_p + \langle d\pi_2(u), d\pi_2(v) \rangle_q , \quad \text{para todo}$$

$$(p, q) \in M_1 \times M_2, \quad u, v \in T_{(p,q)}(M_1 \times M_2).$$

Com esta estrutura, temos que, dadas as parametrizações $f : U \longrightarrow M_1$ de M_1 em torno de $p \in M_1$ e $g : V \longrightarrow M_2$ em torno de $q \in M_2$, a base de $T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$ é $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right\} \times \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_0 \right\}$, com $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$, onde $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right\}$ é a base de T_pM_1 nas coordenadas de f e $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_0 \right\}$ é a base de T_qM_2 nas coordenadas de g. Aplicando $\langle , \rangle_{(p,q)}$ sobre dois vetores dessa base de $T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$, veremos que a soma dos produtos no segundo membro da definição de $\langle , \rangle_{(p,q)}$ nos dará funções g_{1ij} em M_1 e g_{2ij} em M_2 diferenciáveis. Além disso, as propriedades do produto interno são facilmente verificadas. Assim, o produto definido acima define uma métrica riemanniana em $M_1 \times M_2$.

Se escolhermos para $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ a estrutura riemanniana induzida por $\mathbb{R}^2$, o toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1$ com a métrica produto chama-se *toro plano*.

1.3 Subvariedades, Formas diferenciais e Orientação

Iremos estabelecer a seguir a importante noção de *subvariedade* de uma variedade diferenciável.

Definição 1.10. *Seja $\varphi : M \longrightarrow N$ um mergulho de M em N. O conjunto $\varphi(M)$ é chamado* subvariedade mergulhada *de M.*

Uma consequência direta da definição de superfície regular S^k do $\mathbb{R}^n$ dada no **Exemplo 1.3**, é que as suas parametrizações $f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow S^k \cap V$ são mergulhos de U_α em $V \cap S^k$, onde $V \subset \mathbb{R}^n$ é uma vizinhança de p em $\mathbb{R}^n$.

Temos também que aplicação inclusão $i : S^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ é um mergulho. De fato, temos que i é diferenciável, pois para todo $p \in S^k$ existe uma parametrização $f : U \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow S^k$ e uma parametrização $j : V \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V$ de $\mathbb{R}^n$ em $i(p)$, onde V é uma vizinhança de p em $\mathbb{R}^n$ e j é aplicação identidade, tais que $j^{-1} \circ i \circ f = f$ é diferenciável. Como a expressão de i é igual a expressão f nessas parametrizações, temos que sua diferencial é injetiva. Como i também é um homeomorfismo sobre sua imagem, segue que $i : S^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ é um mergulho de S^k em $\mathbb{R}^n$ e, portanto, que S^k é uma subvariedade mergulhada em $\mathbb{R}^n$. Um caso particular de subvariedade mergulhada do $\mathbb{R}^{n+1}$ é a esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Definição 1.11 (Subvariedade)**.** *Seja M uma variedade diferenciável e $N \subset M$ um subconjunto de M. Diz-se que N é uma* subvariedade *de M se a aplicação inclusão $i : N \hookrightarrow M$ é um mergulho.*

Pela observação acima, temos que S^k é uma subvariedade do $\mathbb{R}^n$.

Uma definição equivalente à definição de subvariedade dada acima será apresentada a seguir, com o intúito de usá-la na demonstração de um fato que se mostrará importante num momento deste trabalho. Para maiores detalhes a respeito dessa equivalência entre as duas definições de subvariedade apresentadas aqui, conferir [2] páginas 74-77. Para enunciarmos a próxima definição, precisamos estabelecer a seguinte notação. Um cubo aberto em $\mathbb{R}^m$ com centro em $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ é por definição o conjunto

$$C^m_\varepsilon(x) := \{y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m \mid \|x_i - y_i\| < \varepsilon, \quad \forall i = 1, \ldots, m\}.$$

Na definição a seguir, a função $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}^m$, chamada de *parametrização de uma vizinhança coordenada* $V \subset M$ em torno de um ponto $p \in V$ sobre uma variedade M, trata-se da inversa de uma parametrização (f, U) de $V \ni p$, tal que $V \subset f(U)$.

Definição 1.12. *Um subconjunto N de uma varidade diferenciável M de dimensão m é uma* subvariedade (de dimensão n) *de M se, para cada $p \in N$, existir uma vizinhança coordenada V de p em M e uma parametrização $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de p, com coordenadas locais $x_1, \ldots, x_m$, tais que*

(i) $\varphi(p) = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m$;

(ii) $\varphi(V) = C^m_\varepsilon(0)$;

(iii) $\varphi(V \cap N) = \{x \in C^m_\varepsilon(0) \mid x^{n+1} = \ldots = x^m = 0\}$.

O sistema de coordenadas de $p \in N$ dado pelo par (φ, V) na definição acima é chamado de *coordenadas preferenciais* relativas a N. Esse sistema determina de fato uma estrutura diferenciável em N. O subconjunto $N \subset M$ é portanto uma variedade diferenciável com essa estrutura. Aplicaremos a definição acima à seguinte proposição.

Proposição 1.4. *Seja $F : A \longrightarrow M$ uma aplicação diferenciável entre variedades diferenciáveis e suponha que $f(A) \subset N$, onde N é uma subvariedade de M. Então F é diferenciável como uma aplicação sobre N.*

Demonstração. Sejam $p \in A$ e $q = F(p)$. Como N é uma subvariedade M (no sentido da definição 1.7), temos que existe uma vizinhança coordanada V de q em M e uma parametrização $\varphi : V \longrightarrow R^m$ tais que $\varphi(q) = 0$, a origem de $\mathbb{R}^m$, e $\varphi(V) = C^m_\varepsilon(0)$, $m = \dim M$; $\varphi(V \cap N)$ consiste nos pontos de $\varphi(V)$ cujas últimas $m - n$ coordenadas são nulas, onde $n = \dim N$. Sejam $(x_1, \ldots, x_p)$ as coordenadas locais da parametrização

$f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow A$ de p em A tal que $F(f(U)) \subset V$. Então a expressão de F nessas coordenadas locais é $\varphi \circ F \circ f = \hat{F} : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dada por

$$\varphi \circ F \circ f = \hat{F}(x_1, \ldots, x_p) = (f_1(x), \ldots, f_n(x), 0, \ldots, 0),$$

isto é, $f_{n+1}(x) = \ldots = f_m(x) = 0$ pois $F(A) \subset N$.

Porém, $V \cap N$, $\pi \circ \varphi|_{V\cap N}$, onde π é a projeção das n primeiras coordenadas (projeção de $\mathbb{R}^m$ sobre $\mathbb{R}^n$), é uma vizinhança coordenada de q em N. Então F, considerada como uma aplicação sobre N, é dada em coordenadas locais por

$$(x_1, \ldots, x_p) \mapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x)).$$

Esta aplicação é a projeção por π de $\hat{F}$ de suas n primeiras coordenadas, que é uma aplicação diferenciável, devido ao fato de ser uma composição de aplicações diferenciáveis, como queríamos mostrar.

□

A seguir iremos introduzir o conceito de *k-forma diferencial* sobre uma variedade, que se mostrará essencial no decorrer deste trabalho. Para isso, denotaremos por $\Lambda^k(T_pM)^*$ o conjunto de todas as aplicações k-lineares alternadas do espaço tangente T_pM.

Definição 1.13. *Seja M^n uma variedade diferenciável de dimensão n. Uma k-*forma exterior ω em M (ou simplesmente uma k-forma em M^n) *é uma aplicação que a cada ponto $p \in M$ associa um elemento $\omega(p)$ no espaço $\Lambda^k(T_pM)^*$.*

Dada uma k-forma exterior ω em M^n e uma parametrização $f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow M^n$, em torno de um ponto $p \in f_\alpha(U_\alpha)$, definimos a *representação de ω* nesta parametrização como sendo a k-forma ω_α em $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ dada por

$$\omega_\alpha(v_1, \ldots, v_k) = \omega(df_\alpha(v_1), \ldots, df_\alpha(v_k)), \quad v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n.$$

Temos que ω está bem definida pois, dada uma outra parametrização $f_\beta : U_\beta \longrightarrow M$ em torno de $p \in M$ com $f_\beta(U_\beta) \cap f_\alpha(U_\alpha) = W \neq \emptyset$

$$\begin{aligned}
(f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)^* \omega_\beta(v_1, \ldots, v_k) &= \omega_\beta(d(f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)(v_1), \ldots, d(f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)(v_k)) \\
&= \omega((df_\beta \circ d(f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)(v_1)), \ldots, (df_\beta \circ d(f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)(v_k))) \\
&= \omega_\alpha.
\end{aligned}$$

Dizemos que uma tal k-forma ω em M^n é diferenciável se, dados quaisquer campos de vetores diferenciáveis $X_1, \ldots, X_r$ em um aberto U de M, então a função $\omega(X_1, \ldots, X_r) : U \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $\omega(X_1, \ldots, X_r)(p) = \omega(p)(X_1(p), \ldots, X_r(p))$ é diferenciável em U. Um importante fato é que todas as operações definidas para formas em $\mathbb{R}^n$ podem ser estendidas às formas em M^n por meio de suas representações. Por exemplo, se ω é uma k-forma em M, temos que $d\omega$ é a $(k+1)$-forma em M cuja representação é $d\omega_\alpha$. Temos que dw também está bem definida dessa forma, pois em $f_\alpha^{-1}(W)$ temos

$$d\omega_\alpha = d((f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)^* \omega_\beta) = (f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)^* d\omega_\beta.$$

Quando ω for uma k-forma diferenciável, a chamaremos de *k-forma diferencial.* Vamos apenas enunciar a seguinte proposição, que nos fornece uma fórmula para $d\omega$, onde ω é uma k-forma sobre uma variedade diferenciável.

Proposição 1.5. *Seja ω uma k-forma diferencial em uma variedade diferenciável M. Dados $X_1, \ldots, X_{r+1} \in \mathfrak{X}(M)$, temos*

$$d\omega(X_1, \ldots, X_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} X_i(\omega(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{r+1}))$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{r+1}),$$

onde cada termo $\hat{X}_i$ está omitido.

A seguir, daremos a noção de *variedade orientável.*

Definição 1.14. *Diz-se que uma variedade M de dimensão n é* orientável *se é possível definir uma n-forma diferenciável Ω em M, de maneira que $\Omega(p) \in \Lambda^k(T_pM)^*$ é diferente de zero, para todo $p \in M$. Neste caso, a escolha de Ω é dita uma* orientação *de M e M é dita* orientada*. Caso não exista uma tal Ω, diz-se que M é* não-orientável.

O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ com a forma $\Omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ é um primeiro exemplo de variedade orientada. Esta orientação é conhecida como a *orientação natural* de $\mathbb{R}^n$.

Duas orientações Ω_1 e Ω_2 para M determinam a mesma orientação se $\Omega_1 = \lambda\Omega_2$, onde λ é uma função diferenciável em M. Um difeomorfismo $F : M_1 \longrightarrow M_2$ entre duas variedades orientadas por Ω_1 e Ω_2, respectivamente, *preserva orientação* se $F^*\Omega_2 = \lambda\Omega_1$, onde $\lambda > 0$ é uma função diferenciável em M_1.

Uma noção de orientação equivalente a que foi dada acima pode ser introduzida baseada no seguinte resultado.

Teorema 1.1. *Uma variedade M é orientável se e somente se M admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ tal que $\forall \alpha, \beta$ com $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, a diferencial da aplicação $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$ tem determinante positivo para todo $q \in f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$.*

Demonstração. Ver [2], pg.210, teorema (7.6).

Baseandos nesta noção de orientação, dada por uma estrutura que satisfaz as hipóteses do último teorema, podemos, de maneira equivalente, estabelecer as seguintes noções de orientação, variedade orientada e de difeomorfismos que preservam orientação.

Diz-se que a escolha de uma estrutura diferenciável numa variedade M satisfazendo as hipóteses do teorema acima é uma *orientação* de M e que M é orientada por esta estrutura. Duas orientações, nesse mesmo sentido, determinam a mesma orientação se a união delas ainda satisfaz as hipóteses do **Teorema 1.1**. Dadas duas variedades M_1 e M_2, com M_1 orientada, ou seja, possuindo uma estrutura $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ dada pelo **Teorema 1.1**, temos que F induz uma orientação em M_2, a saber $\{(U_\alpha, f'_\alpha)\}$, com $f'_\alpha = F \circ f_\alpha$. Um difeomorfismo $F : M_1 \longrightarrow M_2$ entre duas variedades orientadas M_1 e M_2 *preserva orientação* se a orientação induzida por F em M_2 determina a mesma orientação de M_2, considerada inicialmente.

Exemplo 1.10. Se M pode ser coberta por duas vizinhanças coordenadas V_1 e V_2 de modo que $V_1 \cap V_2$ é um conjunto conexo, então M é orientável. De fato, como o determinante do jabiano da mudança de coordenadas $f_2^{-1} \circ f_1$, onde f_1 e f_2 correspondem às vizinhanças V_1 e V_2, respectivamente, é diferente de zero, e como $V_1 \cap V_2$ é conexo, temos que este determinante não muda de sinal aí, uma vez que a função det é contínua; se esse determinante é negativo em algum ponto de $V_1 \cap V_2$, basta trocar o sinal de uma das coordenadas para que passe a ser positivo neste ponto e, portano, em $V_1 \cap V_2$.

Exemplo 1.11. Vimos no **Exemplo 3** que a esfera $\mathbb{S}^n$ pode ser coberta por duas vizinhanças, dadas pelas projessões estereográficas em relação aos polos norte e sul. Temos que as projessões π_1^{-1} e π_2^{-1}, que parametrizam a esfera $\mathbb{S}^n$ nos dão $\pi_1^{-1}(\mathbb{R}^n) \cap \pi_2^{-1}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{S}^n - \{N\} \cup \{S\}$, onde N e S são os polos norte e sul, respectivamente, de $\mathbb{S}^n$. Portanto, temos que $\mathbb{S}^n$ pode ser coberta por duas vizinhanças cuja intercção é um conjunto conexo. Pelo **Exemplo 5**, temos que $\mathbb{S}^n$ é orientável.

Definiremos agora a integral de uma n-forma em uma variedade M de dimensão n. Para isso, vamos estabelecer a definição de integral de uma n-forma em $M^n = \mathbb{R}^n$.

Seja ω uma n-forma diferencial definida em um conjunto aberto $U \subset M^n$. O suporte K de ω é dado pelo fecho do conjunto

$$A = \{p \in M^n; \omega(p) \neq 0\}.$$

Seja ω uma n-forma e $M^n = \mathbb{R}^n$. Então

$$\omega = a(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Assuma que o suporte K de ω é compacto e está contido num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Definimos

$$\int_U \omega = \int_K a dx_1 \ldots dx_n,$$

onde no lado direito da igualdade, temos uma integral múltipla usual no $\mathbb{R}^n$.

Vamos assumir agora que M é uma variedade compacta; então, o suporte K de ω, por ser um conjunto fechado num espaço compacto, também é compacto. Como veremos adiante, será necessário assumirmos que M também é orientada, i.e, que M é coberta por uma família de vizinhanças coordenadas tal que cada mudança de coordenadas possui determinante jacobiano positivo.

Se K estiver contido em alguma vizinhança coordenada $V_\alpha = f_\alpha(U_\alpha)$, então, se a representação local de ω em $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ é ω_α temos

$$\omega_\alpha = a_\alpha dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

e definimos

$$\int_M \omega = \int_{V_\alpha} \omega = \int_{U_\alpha} a_\alpha dx_1 \ldots dx_n,$$

onde o lado direito é uma integral no $\mathbb{R}^n$.

É possível que K esteja contido em uma outra vizinhança coordenada $V_\beta = f_\beta(U_\beta)$ da mesma família. Mostraremos que a definição acima, não depende da escolha da vizinhança coordanada.

Para isso, seja $W = f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta)$ e considere a mudança de coordenadas

$$f = f_\alpha^{-1} \circ f_\beta : f_\beta^{-1}(W) \longrightarrow f_\alpha^{-1}(W),$$

dada por

$$x_i = f_i(y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$(x_1, \ldots, x_n) \in U_\alpha, \quad (y_1, \ldots, y_n) \in U_\beta.$$

Como $\omega_\beta = f^*(\omega_\alpha)$, temos

$$\omega_\beta = \det(df) a_\beta dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n,$$

onde

$$a_\beta = a_\alpha(f_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(y_1, \ldots, y_n)).$$

por outro lado, pela fórmula de mudança de variáveis para integrais múltiplas no $\mathbb{R}^n$, obtemos

$$\int_{f_\alpha^{-1}(W)} a_\alpha dx_1 \ldots dx_n = \int_{f_\beta^{-1}(W)} \mid \det(df) \mid a_\beta dy_1 \ldots dy_n.$$

Então, como M é orientada, $\det(df) > 0$. Assim

$$\int_{f_\alpha^{-1}(W)} \omega_\alpha = \int_{f_\alpha^{-1}(W)} a_\alpha dx_1 \ldots dx_n = \int_{f_\beta^{-1}(W)} \det(df) a_\beta dy_1 \ldots dy_n = \int_{f_\beta^{-1}(W)} \omega_\beta.$$

Portanto,

$$\int_{V_\alpha} \omega = \int_{V_\beta} \omega,$$

o que mostra a independência das vizinhanças coordenadas.

Note que sem a hipótese de que M é orientada, o sinal da integral de ω não é bem definido. A escolha de uma orientação para M fixa um sinal para a integral de ω que pode mudar com uma mudança de orientação.

Vamos considerar agora o caso em que o suporte de ω não está contido em nenhuma vizinhança coordanada. Para isso, precisamos do conceito de *partição diferenciável da unidade.*

Dada uma cobertura $\{V_\alpha\}$ de uma variedade diferenciável M, dizemos que uma familia de funções $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ diferenciáveis em M é uma *partição da unidade* subordinada a cobertura $\{V_\alpha\}$ (quando M é orientada, escolhemos $\{V_\alpha\}$ compatível com a orientação de M) se

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \varphi_i = 1,$

(b) $0 \leq \varphi_i \leq 1$, e o suporte, supp φ_i, de cada φ_i está contido em algum $V_{\alpha_i} = V_i$.

A existência de uma partição da unidade será assumida sem demonstração. Para maiores detelhes conferir [8]. Vamos definir a integral de uma n-forma sobre uma variedade orientada M^n como segue. Note primeiramente que o suporte da forma $\varphi_i\omega$ está contido em V_i. Feita essa observação, iremos definir a integral de ω neste caso por

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^{m} \int_M \varphi_i \omega.$$

Esta definição não depende da escolha da partição da unidade. De fato, considere uma outra cobertura $\{W_\beta\}$ que determina a mesma orientação que $\{V_\alpha\}$ determina em M, e seja $\{\psi_j\}$, $j = 1, \ldots, n$, uma partição da unidade subordinada a $\{W_\beta\}$. Então $\{V_\alpha \cap W_\beta\}$ será uma cobertura par a M e a familia $\varphi_i \psi_j$ será uma partição da unidade subordinada a $\{V_\alpha \cap W_\beta\}$. Então

$$\sum_{i=1}^{m} \int_M \varphi_i \omega = \sum_{i=1}^{m} \int_M \varphi_i \left(\sum_{j=1}^{n} \psi_j \right) \omega = \sum_{i,j} \int_M \varphi_i \psi_j \omega,$$

onde na última igualdade foi usado que, para cada i, as funções $\varphi_i \psi_j$ estão definidas em V_i. Similarmente,

$$\sum_{j=1}^{n} \int_M \psi_j \omega = \sum_{j=1}^{n} \int_M \psi_j \left(\sum_{i=1}^{m} \varphi_i \right) \omega = \sum_{i,j} \int_M \varphi_i \psi_j \omega,$$

que mostra a independência requerida. Estabelecida a definição de integral sobre uma variedade, podemos enunciar o seguinte resultado.

Proposição 1.6 (Mudança de Variáveis)**.** *Sejam M_1 e M_2 variedades orientadas. Se $F : M_1 \longrightarrow M_2$ é um difeomorfismo que preserva orientação e se ω é uma n-forma em M_2, onde $n = \dim M_2 = \dim M_1$, então*

$$\int_{M_1} F^* \omega = \int_{M_2} \omega.$$

Demonstração. Seja $F : M_1 \longrightarrow M_2$ um difeomorfismo que preserva orientação. Suponha que o suporte K de ω está contido em uma vizinhança coordenada W_2 de M_2. Portanto, o suporte de $F^*\omega$, estará contindo na vizinhança coordenada $W_1 = F^{-1}(W_2)$ de M_1. Usando as parametrizações $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow W_1$ de $W_1 \subset M_1$ e a parametrização induzida por F em W_2 dada por $g = F \circ f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow W_2$, teremos a mesma expressão para ω em $W_2 \subset M_2$ e para $F^*\omega$ em $W_1 \subset M_1$, digamos $f(x) dx \wedge \ldots \wedge dx_n$. Além disso, como F preserva orientação, temos que o sinal da integral $\int_{M_2} \omega$, considerando a orientação induzida por F em M_2, é igual ao sinal desta mesma integral considerando a orientação inicial de M_2. Portanto, pela nossa definição de integral, teremos

$$\int_{M_1} F^* \omega = \int_{M_2} \omega.$$

O caso em que o suporte de ω não está contido em nenhuma vizinhança coordenada é provado usando o mesmo argumento acima para cada n-forma $\varphi_i\omega$ em M_2, onde $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ é uma partição da unidade.

$\square$

Um semi-espaço de $\mathbb{R}^n$ é o conjunto $H^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 \leq 0\}$. Um subconjunto $U \subset H^n$ é aberto se $U = H^n \cap V$, onde V é um aberto do $\mathbb{R}^n$. Dizemos que uma aplicação $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida em um aberto V de H^n é *diferenciável* se existe um conjunto aberto $U \supset V$ e uma aplicação diferenciável $\bar{f}$ em U tal que a restrição de $\bar{f}$ a V é igual a f. Neste caso, a diferencial $df_p, p \in V$, de f em p é definida como sendo $df_p = d\bar{f}_p$.

Definição 1.15. *Uma* variedade diferenciável de dimensão n com bordo *(ou simplesmente uma* variedade com bordo*) é um conjunto e uma familia de aplicações injetivas $f_\alpha : U_\alpha \subset H^n \longrightarrow M$ de abertos de H^n em M tais que*

(1) $\displaystyle\bigcup_\alpha f_\alpha(U_\alpha) = M$*;*

(2) *$\forall\ \alpha, \beta$, com $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $f_\alpha^{-1}(W)$ e $f_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$ e $f_\alpha^{-1} \circ f_\beta$ são diferenciáveis;*

(3) *A familia $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ é maximal relativamente a* (1) *e* (2)*.*

Dizemos que um ponto $p \in M$ *pertence ao bordo de M (ou que p é um ponto no bordo de M)* se para alguma parametrização $f_\alpha : U_\alpha \subset H^n \longrightarrow M$ em torno de p tivermos $f_\alpha(0, x_2, \ldots, x_n) = p$. O conjunto dos pontos no bordo de M será denotado por ∂M e chamado *bordo de M*. Se $\partial M = \emptyset$, a definição acima coincide com a **Definição 1.1** de uma variedade diferenciável, dada no começo deste capítulo.

Observação 1.3. A definição de ponto no bordo não depende de parametrizações. Portanto, o conjunto dos pontos no bordo ∂M de M está bem definido. Além disso, se a dimensão de M é igual a n, temos que ∂M é uma variedade diferenciável de dimensão $n-1$ e, se M for orientada, uma orientação para M induz uma orientação para ∂M.

As definições de funções diferenciáveis, espaço tangente, orientação, etc, para variedades com bordo, são introduzidas de maneira análoga às definições para variedades diferenciáveis, trocando $\mathbb{R}^n$ por H^n.

Intuitivamente, uma variedade com bordo é um conjunto que pode ser coberto por vizinhanças que são homeomorfas a abertos de H^n. Note que nem todo aberto de H^n é um aberto do $\mathbb{R}^n$, a saber, os abertos de H^n que contêm pontos da forma $(0, x_2, \ldots, x_n)$. De acordo com a definição de variedade dada no início deste capítulo, uma variedade diferenciável não possui vizinhanças desse tipo, i.e, uma vizinhança coordenada de um ponto sobre uma variedade (no sentido da **Definição 1.1**) é difeomorfa apenas a abertos do $\mathbb{R}^n$, caso em que a variedade tem dimensão n. Então, toda variedade diferenciável, no sentido da **Definição 1.1** tem bordo vazio, i.e, $\partial M = \emptyset$. Podemos agora enunciar o importante Teorema de Stokes. Uma demonstração deste teorema pode ser conferida em [3].

Teorema 1.2. *Seja M^n uma variedade diferenciável com bordo, compacta e orientada. Seja ω uma $(n-1)$-forma em M, e seja $i : \partial M \hookrightarrow M$ a aplicação inclusão do bordo ∂M em M. Então*

$$\int_{\partial M} i^*\omega = \int_M d\omega.$$

Capítulo 2

Grupos de Lie e Grupos de Cohomologia de De Rham

Neste capítulo desenvolveremos toda a teoria de grupos de Lie e de grupo de cohomologia de De Rham necessária. Dois resultados fundamentais neste trabalho serão apresentados. O primeiro garante que todo grupo de Lie compacto e conexo pode ser munido de uma métrica bi-invariante. E o segundo nos fornece o cálculo do grupo de cohomologia de De Rham da esfera $\mathbb{S}^n$ para alguns casos especiais.

2.1 Grupos de Lie

Definição 2.1. *Um* grupo de Lie *é um grupo G com uma estrutura diferenciável tal que as aplicações $G \times G \longrightarrow G$ dadas por $(x, y) \mapsto xy$ e $G \longrightarrow G$ dada por $x \mapsto x^{-1}$, são mapas diferenciáveis.*

Exemplo 2.1 ($Gl(n, \mathbb{R})$)**.** Decorre do **Exemplo 1.2** que $Gl(n, \mathbb{R})$, por ser um subconjunto aberto do conjunto das matrizes $n \times n$, também é uma variedade de dimensão n^2. Para mostrarmos que $Gl(n, \mathbb{R})$ é um grupo de Lie, nos resta mostrar que este possui uma estrutura de grupo tal que as operações de soma e inversão são diferenciáveis em $Gl(n, \mathbb{R}) \times Gl(n, \mathbb{R})$ e em $Gl(n, \mathbb{R})$, respectivamente.

Note que uma matriz A $n \times n$ é não-singular se, e somente se, $\det A \neq 0$; portanto, como $\det(AB) = \det A \det B$, para quaisquer matrizes quadradas A,B, temos que se A e B são não-singulares, segue que AB também é. Além disso, uma matriz é não-singular, i.e, $\det A \neq 0$ se, e somente se, possui uma matriz inversa em relação a multiplicação de matrizes. Logo, $G(n, \mathbb{R})$ tem estrutura de grupo. A aplicação $(A, B) \mapsto AB$ é diferenciável, pois o produto AB possui entradas que são polinômios nas entradas de A e B. Essas entradas são, exatamente, as expressões em coordenadas locais da aplicação $(A, B) \mapsto AB$, que é portanto diferenciável. A inversa de $A = (a_{ij})$ pode ser escrita como $A^{-1} = (1/\det A)(\tilde{a_{ij}})$, onde os $(\tilde{a_{ij}})$ são os cofatores de A, que são polinômios nas entradas de A e onde $\det A$ é um polinômio nessas entradas, que por sua vez, não se anula em $Gl(n, \mathbb{R})$. Segue que as entradas de A^{-1} são funções racionais em $Gl(n, \mathbb{R})$, que não se anulam no seu denominador. Portanto, são funções diferenciáveis. Assim, temos que o produto e a inversão são diferenciáveis em $Gl(n,\mathbb{R})$ e, portanto, $Gl(n,\mathbb{R})$ é um grupo de Lie. Um caso particular é o grupo multiplicativo $\mathbb{R}^*$ dos números reais não-nulos.

Exemplo 2.2. Seja $\mathbb{C}^*$ o conjunto dos números complexos não-nulos. Com respeito à multiplicação de números complexos, com inverso multiplicativo $z^{-1} = \frac{1}{z}$, $\mathbb{C}^*$ é um grupo. Além disso, $\mathbb{C}^*$ com a estrutura $\{\mathbb{R}^2 - \{0\}, \varphi\}$, com $(x,y) \mapsto \varphi(x,y) = x + iy$, é uma variedade diferenciável de dimensão 2. Usando estas coordenadas, o produto $(z, z') \mapsto zz'$, com $z = x + iy$ e $z' = x' + iy'$ é dado nessas coordenadas por

$$(x,y)(x',y') \mapsto (xx' - yy', xy' + yx')$$

e a aplicação $z \mapsto z^{-1}$ por

$$(x,y) \mapsto \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right).$$

Portanto, zz' e z^{-1} são diferenciáveis., donde $\mathbb{C}^*$ é um grupo de Lie.

Proposição 2.1. *Se G_1 e G_2 são grupos de Lie, então o produto cartesiano $G_1 \times G_2$ com a estrutura de variedade produto é um grupo de Lie.*

Demonstração. Sejam $m_1 : G_1 \times G_1 \longrightarrow G_1$ e $m_2 : G_2 \times G_2 \longrightarrow G_2$ os produtos em G_1 e G_2, respectivamente. Defina o produto $m : (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) \longrightarrow G_1 \times G_2$ em $G_1 \times G_2$ por

$$m((g_1,h_1),(g_2,h_2)) = (g_1g_2, h_1h_2), \quad g_1, g_2 \in G_1, \quad h_1, h_2 \in G_2.$$

Seja $\alpha = (f,g)$ uma parametrização (da variedade produto) em torno de $(g_1g_2, h_1h_2) \in G_1 \times G_2$ e β uma parametrização em torno de $((g_1,h_1),(g_2,h_2)) \in (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2)$. Sejam f_1, f_1' parametrizações em torno de g_1 e g_2, respectivamente, em G_1 e f_2, f_2' parametrizações em torno de h_1 e h_2, respectivamente, em G_2. Temos que mostrar que a expressão de m

$$\alpha^{-1} \circ m \circ \beta : \beta^{-1}(V') \subset \mathbb{R}^{2(m+n)} \longrightarrow \alpha^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

é diferenciável, onde V é uma vizinhança de (g_1g_2, h_1h_2) em $G_1 \times G_2$ e V' é uma vizinhança de $((g_1,h_1),(g_2,h_2))$ em $(G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2)$. Se $((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in \beta^{-1}(V') \subset \mathbb{R}^{2(m+n)}$, teremos que

$$\begin{aligned}
\alpha^{-1} \circ m \circ \beta((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &= \alpha^{-1}(m((f_1(x_1), f_2(y_1)), (f_1'(x_2), f_2'(y_2)))\\
&= \alpha^{-1}(f_1(x_1)f_1'(x_2), f_2(y_1)f_2'(y_2))\\
&= \alpha^{-1}(m_1(f_1(x_1), f_1'(x_2)), m_2(f_2(y_1), f_2'(y_2)))\\
&= \alpha^{-1}(m_1 \circ (f_1, f_1')(x_1,x_2), m_2 \circ (f_2, f_2')(y_1,y_2))\\
&= (f^{-1} \circ m_1 \circ (f_1, f_1')(x_1,x_2), g^{-1} \circ m_2 \circ (f_2, f_2')(y_1,y_2)),
\end{aligned}$$

é diferenciável, uma vez que suas entradas são as expressões de m_1 e m_2 em coordenadas locais, que são diferenciáveis. Análogamente, mostre-se que $g \mapsto g^{-1}$ é diferenciável. Portanto, $G_1 \times G_2$ é um grupo de Lie.

$\square$

O toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1$ é um exemplo de variedade produto que é um grupo de Lie, de acordo com o Exemplo 1.13 e com a Proposição 1.5.

Daremos a seguir um importante critério para determinarmos mais exemplos de grupos de Lie.

Teorema 2.1. *Seja G um grupo de Lie e seja $H \subset G$ um subgrupo de G que também é uma subvariedade de G. Então H é um grupo de Lie.*

Demonstração. Como H é uma subvariedade de G, segue que a aplicação inclusão $I : H \times H \longrightarrow G \times G$ é um mergulho, ou seja, I é diferenciável. Se $P_1 : G \times G \longrightarrow G$ é a aplicação $(g, g') \mapsto gg'$ e $P = P_1 \circ I$ a composta, então P é uma aplicação diferenciável de $H \times H \longrightarrow G$ com imagem contida em H. Seja $\tilde{P}$ esta aplicação considerada como uma aplicação sobre H; note que $\tilde{P} \neq P$, pois seus contradomínios são diferentes. Mas, pela Proposição 1.3, como $\tilde{P}(H \times H) = H \subset G$ é uma subvariedade de G, temos que P é uma aplicação diferenciável como uma aplicação sobre H, i.e, $\tilde{P}$ é diferenciável. Segue que o produto em H é diferenciável. Similarmente, mostra-se que $g \mapsto g^{-1}$ é diferenciável em H. Logo, H é um grupo de Lie.

$\square$

Aplicaremos o teorema acima para mostrarmos que, de fato, as esferas $\mathbb{S}^1$ e $\mathbb{S}^3$ são grupos de Lie.

Exemplo 2.3 ($\mathbb{S}^1$)**.** Vamos identificar a esfera unitária $\mathbb{S}^1$ com o conjunto dos números complexos de norma 1. Como o produto e a inversão de números complexos de norma igual a 1 preservam essa norma, temos que $\mathbb{S}^1$ é um subgrupo de $\mathbb{C}^*$.

Como $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 - \{0\}$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ (e portanto de $\mathbb{C}^*$), pelo teorema acima, $\mathbb{S}^1$ é um grupo de Lie.

Exemplo 2.4 ($\mathbb{S}^3$)**.** O conjunto dos *quatérnios* é definido como sendo o conjunto dos elementos da forma

$$w = t + xi + yj + zk,$$

onde $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ e os vetores i, j, k são chamados *unidades imaginárias* do conjunto dos quatérnios enquanto $1 = 1 + 0i + 0j + 0k$ é chamado *unidade real.* Dizemos que um tal elemento é um *quatérnio.* Neste conjunto, dados dois quatérnios $w = t + xi + yj + zk$ e $w' = t' + x'i + y'j + z'k$ e um número real α, definimos a soma e o produto por escalar por

$$w + w' = (t + t') + (x + x')i + (y + y')j + (z + z')k$$

e

$$\alpha w = \alpha t + \alpha xi + \alpha yj + \alpha zk.$$

É imediato que com essas operações, o conjunto dos quatérnios é um espaço vetorial.

A multiplicação de quatérnios fica definida, por bilinearidade, quando são dados os produtos das unidades $1, i, j, k$, como apresentado na tabela abaixo

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Assim, dados dois quatérnios $w = t+xi+yj+zk$ e $w' = t'+x'i+y'j+z'k$, o produto ww' é dado por

$$ww' = (tt' - xx' - yy' - zz') + (tx' + t'x + yz' - zy')i + (ty' - xz' + yt' + zx')j$$

$$+(tz' + xy' - yx' + zt')k.$$

Como $1w = w1 = w$, a unidade real é o elemento neutro dessa multiplicação. Além disso, temos que todo quatérnio $w \neq 0$, $0 = 0 + 0i + 0j + 0k$, possui um inverso multiplicativo w^{-1}. Para verificarmos este fato, defina o *conjugado* $\bar{w}$ de $w = t + xi + yj + zk$ por $\bar{w} = t - xi - yj - zk$. Tem-se que $w\bar{w} = \bar{w}w = t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = |w|^2$, onde denotamos por $|w| = \sqrt{w\bar{w}}$ o *módulo* do quatérnio w. Logo se $w \neq 0$, temos que

$$w^{-1} = \frac{\bar{w}}{|w|^2}$$

cumpre $ww^{-1} = w^{-1}w = 1$. Portanto, com a multiplicação de quatérnios, o conjunto dos quatérnios não-nulos $\mathbb{R}^4 - \{0\}$ é um grupo. Além disso, o conjunto dos quatérnios não-nulos com a estrutura $\{(\mathbb{R}^4 - \{0\}, \varphi)\}$, $\varphi(t, x, y, z) = t+xi+yj+zk$ é uma variedade diferenciável de dimensão 4. Nesse sistema de coordenadas, temos que a expressão da aplicação $(w, w') \mapsto ww'$, w e w' quatérnios não-nulos, é

$$(t, x, y, z)(t', x', y', z') \mapsto (tt' - xx' - yy' - zz', tx' + t'x + yz' - zy',$$

$$ty' - xz' + yt' + zx', tz' + xy' - yx' + zt'),$$

que é diferenciável em $\mathbb{R}^4 - \{0\} \times \mathbb{R}^4 - \{0\}$. Temos também que a expressão da aplicação aplicação $w \mapsto w^{-1}$ nesse sistema de coordenadas é

$$(t, x, y, z) \mapsto (\frac{t}{t^2 + x^2 + y^2 + z^2}, \frac{-x}{t^2 + x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\frac{-y}{t^2 + x^2 + y^2 + z^2}, \frac{-z}{t^2 + x^2 + y^2 + z^2}),$$

que, por sua vez, é diferenciável em $\mathbb{R}^4 - \{0\}$. Segue daí que o conjunto dos quatérnios não-nulos é um grupo de Lie.

Note que o produto dos módulos dos quatérnios w e w' cumpre $|ww'| = |w|\,|w'|$. Segue daí que, se identificarmos a esfera $\mathbb{S}^3$ com o conjunto dos quatérnios de módulo 1, $\mathbb{S}^3$ com o produto de quatérnios é um subgrupo do conjunto dos quatérnios não-nulos. Como $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 - \{0\}$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^4 - \{0\}$ (a aplicação inclusão $i : \mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4 - \{0\}$ é um mergulho), pelo **Teorema 1.3**, $\mathbb{S}^3$ é um grupo de Lie.

Fixado um $g \in G$, definimos as aplicações $L_g, R_g : G \longrightarrow G$ por $L_g(h) = gh$ e $R_g(h) = hg$; L_g é chamada *translação à esquerda* e R_g é chamada *translação à direita.* Decorre diretamente da definição de grupo de Lie que L_g e R_g são diferenciáveis e que suas inversas também são, a saber $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ e $(R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}$.

Dizemos que uma métrica riemanniana em um grupo de Lie G é uma *métrica invariante à esquerda* se L_g for uma isometria, para todo $g \in G$, i.e, se

$$\langle u, v\rangle_h = \langle (dL_g)_h u, (dL_g)_h v\rangle_{gh}\,, \quad u, v \in T_hG,$$

$\forall g, h \in G$. Analogamente define-se métrica invariante à direita em G. Se uma métrica riemanniana for invariante à esquerda e à direita, dizemos que ela é uma *métrica bi-invariante.*

Dado um produto interno qualquer $\langle , \rangle_e$ em T_eG, é possível definir uma métrica riemanniana invariante à esquerda em G por

$$\langle u, v\rangle_g := \langle (dL_{g^{-1}})_g u, (dL_{g^{-1}})_g v\rangle_e\,, \quad \forall g \in G, \quad u, v \in T_gG.$$

Como L_g depende diferencialmente de g em G, segue que $\langle , \rangle_g$ varia diferencialmente em G. Portanto, a métrica acima define uma métrica riemanniana. Além disso, $\langle , \rangle_g$ também é invariante à esquerda pois

$$\begin{aligned}
\langle (dL_g)_h u, (dL_g)_h v\rangle_{gh} &= \left\langle (dL_{(gh)^{-1}})_{gh} \left[(dL_g)_h u\right], (dL_{gh^{-1}})_{gh} \left[(dL_g)_h v\right]\right\rangle_e \\
&= \left\langle (dL_{(gh)^{-1}} \circ L_g)_h u, (dL_{gh^{-1}} \circ L_g)_h v\right\rangle_e \\
&= \langle (dL_{h^{-1}})_h u, (dL_{h^{-1}})_h v\rangle_e = \langle u, v\rangle_h\,.
\end{aligned}$$

De maneira análoga construimos métricas invariantes à direita em G.

Diz-que uma k-forma ω em um grupo de Lie G de dimensão n é uma k-forma invariante à esquerda se $L_g^*\omega = \omega$ e que ω é uma k-forma invariante à direita quando $R_g^*\omega = \omega$, para todo $g \in G$. Quando uma k-forma ω é invariante à esquerda e à direita, diz-se que ω é uma k-forma bi-invariante. Dada qualquer k-forma linear ω_e em T_eG, podemos definir a partir dela, uma k-forma ω em G invariante à esquerda. De fato, basta definirmos

$$\omega(g)(X_1, \ldots, X_k) := \omega_e((dL_{g^{-1}})_g X_1, \ldots, (dL_{g^{-1}})_g X_n),$$

pois

$$\begin{aligned}
L_g^*\omega(h)(X_1, \ldots, X_k) &= \omega(L_g(h))((dL_g)_h X_1, \ldots, (dL_g)_h X_n) \\
&= \omega(gh)((dL_g)_h X_1, \ldots, (dL_g)_h X_n) \\
&= \omega_e((dL_{(gh)^{-1}})_{gh} \left[(dL_g)_h X_1\right], \ldots, (dL_{(gh)^{-1}})_{gh} \left[(dL_g)_h X_n\right]) \\
&= \omega_e((dL_{(gh)^{-1}} \circ L_g)_h X_1, \ldots, (dL_{(gh)^{-1}} \circ L_g)_h X_n \\
&= \omega_e((dL_{h^{-1}})_h X_1, \ldots, (dL_{h^{-1}})_h X_n) \\
&= \omega(h)(X_1, \ldots, X_k),
\end{aligned}$$

o que mostra que ω é invariante à esquerda. A seguir, vamos mostrar que todo grupo de Lie compacto admite uma métrica bi-invariante.

Proposição 2.2. *Seja G um grupo de Lie compacto, conexo e de dimensão n. Então, G admite uma métrica bi-invariante.*

Demonstração. Seja ω uma n-forma positiva diferenciável em G, invariante à direita e seja $\langle , \rangle$ uma métrica invariante à direita em G. Defina

$$\langle\langle u, v\rangle\rangle_x := \int_G \langle (dL_y)_x u, (dL_y)_x v\rangle_{yx}\, \omega, \quad \forall u, v \in T_xG, \quad x, y \in G.$$

Note que $\langle\langle , \rangle\rangle_g$ é diferenciável, positiva e definida, donde é uma métrica riemanniana. Vamos mostrar que $\langle\langle , \rangle\rangle_g$ é bi-invariante. Vamos mostrar isto em duas etapas.

(1) $\langle\langle \cdot, \cdot\rangle\rangle_g$ é invariante à esquerda. De fato, dados $x, y, z \in G$, temos

$$\begin{aligned}
\langle\langle (dL_z)_x u, (dL_z)_x v\rangle\rangle_{zx} &= \int_G \langle (dL_y)_{zx}\left[(dL_z)_x u\right], (dL_y)_{zx}\left[(dL_z)_x v\right]\rangle_{y(zx)}\, \omega \\
&= \int_G \langle d(L_y \circ L_z)_x u, d(L_y \circ L_z)_x v\rangle_{(yz)x}\, \omega \\
&= \int_G \langle (dL_{yz})_x u, (dL_{yz})_x v\rangle_{(yz)x}\, \omega, \quad u, v \in T_xG. \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

Fixados $u, v \in T_xG$, seja $\psi(y) = \langle (dL_y)_x u, (dL_y)_x v\rangle_{yx}$. Então

$$\begin{aligned}
\int_G \langle (dL_{yz})_x u, (dL_{yz})_x v\rangle_{(yz)x}\, \omega &= \int_G \psi(yz)\omega \\
&= \int_G \psi \circ R_z(y) R_z^*\omega \\
&= \int_G R_z^*(\psi\omega) \\
&= \int_{R_z(G)=G} \psi\omega \\
&= \int_G \psi(y)\omega \\
&= \int_G \langle (dL_y)_x u, (dL_y)_x v\rangle_{yx}\, \omega \\
&= \langle\langle u, v\rangle\rangle_x . \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

De (1.2) e (1.3) segue que $\langle\langle \cdot, \cdot\rangle\rangle_g$ é invariante à esquerda.

(2) $\langle\langle \cdot, \cdot\rangle\rangle_g$ é invariante à direita. De fato, temos

$$
\begin{aligned}
\langle\langle (dR_z)_x u, (dR_z)_x v\rangle\rangle_{xz} &= \int_G \left\langle (dL_y)_{xz}\left[(dR_z)_x u\right], (dL_y)_{xz}\left[(dR_z)_x v\right]\right\rangle_{y(xz)} \omega \\
&= \int_G \left\langle d(L_y \circ R_z)_x u, d(L_y \circ R_z)_x v\right\rangle_{(yx)z} \omega \\
&= \int_G \left\langle d(R_z \circ L_y)_x u, d(R_z \circ L_y)_x v\right\rangle_{(yz)x} \omega \\
&= \int_G \left\langle (dR_z)_{yx} u, (dR_z)_{yx} v\right\rangle_{(yz)x} \omega \\
&= \int_G \left\langle (dL_y)_x u, (dL_y)_x v\right\rangle_{yx} \omega \\
&= \left\langle\langle u, v\rangle\right\rangle_x .
\end{aligned}
$$

□

2.2 Representação adjunta de um grupo de Lie

Dizemos que um campo X sobre um grupo de Lie G é um *campo invariante à esquerda* se $(dL_g)_h X(h) = X(gh)$, para quaisquer $g, h \in G$. A fim de simplificarmos a notação, diremos que um campo X é invariante à esquerda se $(dL_g)X = X$, onde (dL_g) é o campo dado por $V \ni T_gG \mapsto (dL_g)_h V \in T_{gh}G, \forall h \in G$.

Se $F : G \longrightarrow G$ é uma aplicação diferenciável em G, $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e X um campo em G, temos que

$$dF(X)f = X(f \circ F).$$

De fato, se as funções coordenadas da expressão de F em coordenadas locais são as funções $y_1, \ldots, y_n$, $n = \dim G$, e considerando a expressão de f nessas mesmas coordenadas, temos

$$
\begin{aligned}
X(g)(f \circ F) &= \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial(f \circ F)}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} \\
&= \sum_{i,j} a_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}. \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

Como

$$(dF)X = (\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial y_1}{\partial x_i}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial y_n}{\partial x_i}),$$

temos

$$
\begin{aligned}
(dF)X(f) &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}a_i\right)\frac{\partial f}{\partial x_j} \\
&= \sum_{i,j} a_i\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}. \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

Portanto, segue de (2.3) e de (2.4) a nossa afirmação. Segue desse fato que, se X e Y são campos em G, invariantes à esquerda, então o colchete desses campos $[X, Y]$ é invariante à esquerda. De fato, dado $g \in G$, temos

$$
\begin{aligned}
dL_g\,[X, Y]\,f &= [X, Y]\,(f \circ L_g) \\
&= XY(f \circ L_g) - YX(f \circ L_g) \\
&= X(Y(f \circ L_g)) - Y(X(f \circ L_g)) \\
&= X((dL_g)Y)f - Y((dL_g)X)f \\
&= XYf - YXf = [X, Y]\,f.
\end{aligned}
$$

Definição 2.2 (Álgebra de Lie). *Dizemos que um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$ é uma* álgebra de Lie *(real) se além de sua estrutura de espaço vetorial, possui um produto, i.e, uma aplicação $V \times V \longrightarrow V$ que associa a cada par (X, Y) um elemento $[X, Y]$ em V, possuindo as seguintes propriedades:*

(1) *bilinearidade sobre $\mathbb{R}$:*

$$[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, Y] = \alpha_1 [X_1, Y] + \alpha_2 [X_2, Y]$$

e

$$[X, \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2, Y] = \alpha_1 [X, \alpha_1 Y_1] + \alpha_2 [X, \alpha_2 Y_2];$$

(2) *anticomutatividade:*

$$[X, Y] = -[Y, X].$$

(3) *satisfaz a identidade de Jocobi:*

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

Exemplo 2.5. Seja $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes $n \times n$ em $\mathbb{R}$. Com o produto usual de matrizes XY de X e Y em $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, temos que o *comutador* $[X, Y] = XY - YX$, define uma estrutura de álgebra de Lie sobre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemplo 2.6. Seja $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto de todos os campos diferenciáveis de vetores sobre uma variedade diferenciável M. É imediato que $\mathfrak{X}(M)$ é um espaço vetorial. Além disso, já vimos na *Proposição 1.4*, que o colchete $[X, Y]$ de dois campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, satifaz as condições *(1), (2)* e *(3)* da definição acima. Temos portanto que $\mathfrak{X}(M)$ é uma álgebra de Lie.

Considere $\mathcal{G} \subset \mathfrak{X}(G)$ o subespaço de $\mathfrak{X}(G)$ de todos os campos invariantes à esquerda, onde G é um grupo de Lie. Vimos que o colchete de campos invariantes à esquerda também é invariante à esquerda. Se do fato do colchete de campos ser uma operação que satisfaz (1), (2) e (3) e do mesmo ser uma operação fechada em $\mathcal{G}$ que $\mathcal{G}$ é uma álgebra de Lie, com a operação colchete de campos de campos de vetores. Diz-se que $\mathcal{G}$ é a *álgebra de Lie do grupo G.*

Definição 2.3. *Seja $F : G_1 \longrightarrow G_2$ um homomorfismo entre os grupos de Lie G_1 e G_2. Diz-se que F é um* homomorfismo de grupos de Lie *se F também é diferenciável.*

Exemplo 2.7. Seja $G_1 = \mathbb{R}$ o grupo aditivo dos números reais e seja $G_2 = \mathbb{S}^1$. Então a aplicação $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $F(t) = e^{2\pi it}$ é um homomorfismo de grupos de Lie, pois F é analítica e é claramente um homomorfismo. Similarmente, fazendo $G_1 = \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ e $G_2 = \mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1$, a aplicação $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n$ dada por $F(t_1, \ldots, t_n) = (e^{2\pi it_1}, \ldots, e^{2\pi it_n})$ é um homomorfismo de grupos de Lie entre $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{T}^n$.

A fim de definirmos representação adjunta de um grupo de Lie G, faremos algumas observações a respeito das translações L_g e R_g e do *automorfismo interno de G*, $I_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$. Dado $X \in \mathcal{G}$, ou seja, dado X invariante à esquerda, temos

$$dL_g(dR_g(X)) = dR_g(dL_g(X)) = dR_g(X),$$

i.e, $R_h(X) \in \mathcal{G}$. Em particular, fazendo $h = g^{-1}$, temos que $dI_g(X) \in \mathcal{G}$. Logo dI_g leva vetores de $\mathcal{G}$ em vetores de $\mathcal{G}$. Note também que $I_{gh} = I_g \circ I_h$, de modo que $dI_{gh} = dI_g \circ dI_h$. Além disso, $dI_{gh} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ é um automorfismo da álgebra de Lie $\mathcal{G}$ de G. Essa última afirmação é uma consequência do

Teorema 2.2. *Seja $F : N \longrightarrow M$ uma aplicação diferenciável e sejam X_1 e X_2 campos de vetores diferenciáveis em N. Então*

$$dF\,[X_1, X_2] = [dFX_1, dFX_2]\,.$$

Demonstração. Provaremos inicialmente o seguinte lema.

Lema 2.1. *Seja Y um campo em M e X um campo em N. Então*

$$dF(X) = Y \Leftrightarrow (Yg) \circ F = X(g \circ F) \quad \text{em} \quad F^{-1}(V), \tag{2.5}$$

onde $V \subset M$ é um aberto e $g : V \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável.

Demonstração do Lema 1.2.
Dado $q \in F^{-1}(V)$, sabemos que $dF_q(X(q))g = X(g \circ F)(q)$. Além disso, temos que o valor da função diferenciável Yg em $F(q)$, i.e, $(Yg \circ F)(q)$ é igual a $Y_{F(q)}g$. Portanto, $(dF)_q X(q) = Y(F(q)) \Leftrightarrow (Yg \circ F)(q) = X(g \circ F)(q)$. Como a função g é arbitrária, (2.5) vale para toda g diferenciável.

Vamos agora à demonstração do Teorema. Considere então f uma função diferenciável em um aberto $V \subset M$, de modo que $Y_1 f$ e $Y_2 f$ são funções diferenciáveis, onde $Y_1 = dF(X_1)$ e $Y_2 = dF(X_2)$. Aplicando (1.6) com $g = Y_2 f$ e em seguida com $g = f$, teremos

$$[Y_1(Y_2 f)] \circ F = X_1((Y_2 f) \circ F) = X_1\,[X_2(f \circ F)]\,.$$

Analogamente,
$$[Y_2(Y_1 f)] \circ F = X_2 \left[X_1(f \circ F) \right].$$

Portanto,

$$\begin{aligned} ([Y_1, Y_2] f) \circ F &= [Y_1(Y_2 f)] \circ F - [Y_2(Y_1 f)] \circ F \\ &= X_1 \left[X_2(f \circ F) \right] - X_2 \left[X_1(f \circ F) \right] \\ &= [X_1, X_2] (f \circ F). \end{aligned}$$

Segue de (1.6) que

$$dF [X_1, X_2] = [Y_1, Y_2] = [dF X_1, dF X_2].$$

$\square$

Como $I_g : G \longrightarrow G$ é um difeomorfismo, temos $dI_g [X, Y] = [dI_g X, dI_g Y]$ para todo $X, Y \in \mathcal{G}$, pelo **Teorema 1.4** acima. Além disso, temos que dI_g é uma bijeção. Portanto, $dI_g : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ é um automorfismo da álgebra de Lie $\mathcal{G}$, como havíamos afirmado. Denotemos por $Ad : G \longrightarrow Gl(\mathcal{G})$, com $Gl(\mathcal{G})$ representando o grupo das aplicações lineares não-singulares de $\mathcal{G}$, a aplicação definida por

$$Ad(g) = dI_g.$$

Vimos que $dI_{gh} = dI_g \circ dI_h$, para quaisquer $g, h \in G$. Portanto, Ad é um homomorfismo (algébrico) dos grupos G e $Gl(\mathcal{G})$. Temos que Ad também é diferenciável. Para verificarmos isto, será conviniente interpretarmos Ad da seguinte forma:

Dado $e \in G$ o elemento neutro de G, como $\mathcal{G}$ e T_eG são isomorfos pelo isomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \Pi : & T_eG & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ & X_e & \longmapsto & \Pi(X_e) \end{array}$$

dado por $\Pi(X_e) = X$, onde $X : G \longrightarrow TG$ é o campo sobre G defido por

$$X(g) = (dL_g)_e(X_e),$$

podemos identificar $\mathcal{G}$ com T_eG e $Ad(g) = dI_g$ com $(dI_g)_e : T_eG \longrightarrow T_eG$, i.e, podemos olhar para $Ad(g)$ como um automorfismo de T_eG.

Dessa forma, a matriz $(\alpha_{ij}(g))$ de $Ad(g)$ é uma submatriz da matriz jocobiana, avaliada em (g, e), da matriz da aplicação diferenciável $G \times G \longrightarrow G$ dada por $(g, h) \mapsto ghg^{-1} = I_g(h)$. Portanto, $g \mapsto (\alpha_{ij}(g))$ é diferenciável, donde $Ad(g)$ é diferenciável. Com isso, concluimos que $Ad :\longrightarrow Gl(\mathcal{G})$ é um homomorfismo dos grupos de Lie G e $\mathcal{G}$.

Definição 2.4 (Representação adjunta)**.** *Uma* representação *de um grupo de Lie sobre um espaço vetorial V é um homomorfismo de grupos de Lie de G no grupo $Gl(V)$ das aplicações lineares não-singulares de V em V. O seu* grau *ou* dimensão *é a dimensão de V. Uma* representação matricial *de G de grau n é um homomorfismo de G em $Gl(n, \mathbb{R})$. A representação $Ad : G \longrightarrow Gl(\mathcal{G})$ é chamada* representação adjunta *de G.*

2.3 Grupos de Cohomologia De Rham

Nesta seção, estabeleceremos o conceito de grupo de cohomologia de De Rham de uma variedade diferenciável. Além de apresentarmos sua definição precisa, apresentaremos alguns exemplos que ilustram como calculá-los em alguns casos particulares assim como exemplos que nos fornecem critérios mais gerais para determinarmos alguns destes grupos.

Definição 2.5. *Uma k-forma ω em uma variedade M (com bordo possivelmente vazio) é uma k-*forma fechada *se $d\omega = 0$ em todo ponto de M e é uma k-*forma exata *se existir uma $(k-1)$-forma η em M tal que $d\eta = \omega$.*

Seja $Z^k(M)$ o conjunto das k-formas fechadas em M. Como $Z^k(M)$ é o núcleo da aplicação $d : \Lambda^k(M) \longrightarrow \Lambda^{k+1}(M)$, dada por $\omega \mapsto d\omega$, onde $\Lambda^k(M)$ denota o conjunto de todas as k-formas em M, temos que $Z^k(M) \subset \Lambda^k(M)$ é um subespaço vetorial de $\Lambda^k(M)$. Seja agora $B^k(M)$ o conjunto das k-formas exatas em M. Como $B^k(M)$ é a imagem da aplicação linear $d : \Lambda^{k-1}(M) \longrightarrow \Lambda^k(M)$, temos que $B^k(M)$ também é um subespaço vetorial de $\Lambda^k(M)$. Como toda forma exata é fechada, uma vez que $d^2\omega = 0$, temos $B^k(M) \subset Z^k(M)$. Isso nos permite definir o seguinte conjunto de classes de equivalência.

Definição 2.6 (Grupo de cohomologia de De Rham). *O espaço quociente $H^k(M) = Z^k(M)/B^k(M)$ é chamado* grupo de cohomologia De Rham de dimensão k *da variedade M.*

Observação 2.1. Um elemento de $H^k(M)$ é uma classe de equivalência $[\omega]$ de uma k-forma fechada ω; duas k-formas ω_1 e ω_2 são equivalentes se, e somente se, diferem por uma k-forma exata, i.e, se e somente se

$$\omega_1 - \omega_2 = d\eta,$$

para alguma $(k-1)$-forma η em M.

Vamos calcular $H^k(M)$ em alguns casos particulares. Inicialmente, trataremos do caso em que M é *contrátil*, no seguinte sentido.

Definição 2.7. *Uma veriedade diferenciável M é dita uma* variedade contrátil *(à algum ponto $p_0 \in M$) se existe uma aplicação diferenciável $H : M \times [0,1] \longrightarrow M$, $H(p,t) \in M$, $p \in M$, $t \in \mathbb{R}$, tal que*

$$H(p,1) = p, \quad H(p,0) = p_0, \quad \forall p \in M.$$

É fácil ver que $\mathbb{R}^n$ é contrátil a qualquer ponto $p_0 \in \mathbb{R}^n$; basta definirmos $H(p,t) = p_0 + (p-p_0)t$. Temos também que a bola $B(r,0) = \{p \in \mathbb{R}^n; \mid p \mid < r\}$ é contrátil ao ponto $0 \in \mathbb{R}^n$, pois $H(p,t) = tp$, $p \in B(r,0)$, satisfaz as condições da definição de variedade contrátil. Vamos enunciar em seguida o importante *Lema de Poincaré*.

Teorema 2.3 (Lema de Poincaré). *Seja M uma variedade diferenciável contrátil, e seja ω uma k-forma diferenciável fechada em M. Então ω é exata, i.e, existe uma $(k-1)$-forma α em M tal que $d\alpha = \omega$.*

Demonstração. Ver [3].

Pelo lema de Poincaré, se M é contrátil e se $k > 0$, teremos $H^k(M) = \{0\}$; de fato, como toda k-forma fechada em M também é exata, segue que $Z^k(M) = B^k(M)$ e, portanto, a única classe de equivalência de $H^k(M)$ é a classe da k-forma identicamente nula.

Seja agora M uma variedade conexa (contrátil ou não). Para calcularmos $H^0(M)$, note que $B^0(M) = \{0\}$, pois não existem 0-formas exatas não-nulas. Logo $H^0(M) = Z^0(M)$, i.e, $H^0(M)$ é o conjunto das funções $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ com $df = 0, \forall p \in M$. Como M é conexo, $df = 0 \Rightarrow f = const.$. Portanto, $H^0(M) \cong \mathbb{R}$. Mais geralmente, $H^0(M)$ é um espaço vetorial de dimensão r (sobre $\mathbb{R}$), pois $H^0(M) \cong \{(a_1, \dots, a_r); a_i \in \mathbb{R}\}$, onde $(a_1, \dots, a_r)$ corresponde à função tomando o valor constante a_i em M_i, $i = 1, \dots, r$, M_i sendo uma componente conexa de M.

Provaremos a seguir uma afirmação a respeito do grupo de cohomologia de De Rham $H^n(M)$ de maior dimensão de uma variedade M de dimensão n.

Teorema 2.4. *Seja M uma variedade compacta e orientada de dimensão n e com $\partial M = \emptyset$. Então existe um homomorfismo sobrejetivo de $H^n(M)$ sobre $\mathbb{R}$. Em particular, $H^n(M) \neq \{0\}$.*

Demonstração. Como $\dim M = n$, toda n-forma em M é fechada; portanto $Z^n(M) = \Lambda^n(M)$. Defina o homomorfismo $h : Z^n(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ por $h(\Omega) = \int_M \Omega$. Se $\Omega \in B^n(M)$, então $\Omega = d\omega$ para alguma $(n-1)$-forma $\omega \in \Lambda^{n-1}(M)$. Como $\partial M = \emptyset$, pelo teorema de Stokes temos

$$h(\Omega) = h(d\omega) = \int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega = 0.$$

Logo, $B^n(M) = \ker h$. Portanto, h determina o homomorfismo natural

$$h' : Z^n(M)/B^n(M) = H^n(M) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Como M é orientada, existe uma n-forma Ω_0 que é não-nula sobre M e que determina a orientação de M. Então $h(\Omega_0) = \int_M \Omega_0 \neq 0$. A última afirmação segue do fato de que se considerarmos um sistema de coordenadas compatível com a orientação Ω_0, teremos uma representação $\Omega_0 = p(x)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, $\; p(x) > 0$, onde $(x_1, \dots, x_n)$ são as coordenadas desse sistema. Logo, teremos $\int_M \Omega_0 > 0$.

Então, para uma escolha apropriada de uma constante c, podemos fazer $h(c\Omega) = c\int_M \Omega_0 = ch(\Omega_0)$ assumir qualquer valor real. Logo, h e h' são sobrejetivas.

□

A partir de agora, desenvolveremos as ferramentas necessárias para o cálculo do grupo de cohomologia De Rham de dimensão k da esfera $\mathbb{S}^{n-1}$, $H^k(\mathbb{S}^{n-1})$, para todo $0 < k < n-1$. Este cálculo será essencial na demonstração do resultado final deste trabalho, a saber:

"As únicas esferas que admitem uma estrutura de grupo de Lie são $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$".

Primeiro, precisamos da noção de aplicações *deferencialmente homotópicas.* Duas aplicações $f, g : M \longrightarrow N$ entre duas variedades diferenciáveis são ditas diferencialmente homotópicas se existe uma aplicação diferenciável

$$H : M \times [0,1] \longrightarrow N$$

com

$$\begin{cases} H(p,0) = f(p) \\ H(p,1) = g(p) \end{cases}$$

para todo $p \in M$; a aplicação H é chamada de *homotopia diferenciável* entre f e g.

Para $t \in [0,1]$ definimos $i_t : M \longrightarrow M \times [0,1]$ por

$$i_t(p) = (p,t).$$

A proposição abaixo será útil na demonstração do próximo teorema.

Proposição 2.3. *Se ω é uma k-forma fechada em $M \times [0,1]$, então $i_1^*\omega - i_0^*\omega$ é uma k-forma exata em M.*

Demonstração. Ver Spivak [7], pp 301-03.

Seja $f : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável entre duas variedades diferenciáveis. Se ω é uma k-forma fechada em N, então $f^*\omega$ também é fechada, pois $df^*\omega = f^*d\omega = 0$; então f^* leva $Z^k(N)$ em $Z^k(M)$. Por outro lado, f^* também leva $B^k(N)$ em $B^k(M)$, pois $f^*(d\eta) = d(f^*\eta)$. Isso mostra que f^* induz uma aplicação $Z^k(N)/B^k(N) \longrightarrow Z^k(M)/B^k(M)$ que também denotaremos por f^*, definida por $[\omega] \mapsto [f^*w]$.

Teorema 2.5. *Se $f, g : M \longrightarrow N$ são diferencialmente homotópicas, então as aplicações*

$$f^* : H^k(N) \longrightarrow H^k(M)$$

$$g^* : H^k(N) \longrightarrow H^k(M)$$

são iguais, i.e, $f^* = g^*$.

Demonstração. Por hipótese, existe uma aplicação diferenciável $H : M \times [0,1] \longrightarrow N$ com

$$f = H \circ i_0$$

$$g = H \circ i_1.$$

Qualquer elemento de $H^k(N)$ é uma classe de equivalência $[\omega]$ de uma k-forma fechada em N. Então

$$\begin{aligned} g^*\omega - f^*\omega &= (H \circ i_1)^*\omega - (H \circ i_0)^*\omega \\ &= i_1^*(H^*\omega) - i_0^*(H^*\omega) \\ &= d\eta, \end{aligned}$$

para alguma $(k-1)$-forma η em M, pois como $H^*\omega$ é uma k-forma fechada em $M\times[0,1]$, pela **Proposição 2.1**, temos que $i_1^*(H^*\omega) - i_0^*(H^*\omega)$ é exata. Mas isso quer dizer que $[f^*\omega] = [g^*\omega]$, ou seja, como ω uma k-forma fechada qualquer, temos $f^* = g^*$.

□

Vamos aplicar o **Teorema 2.3** para mostrarmos que $H^k(\mathbb{S}^{n-1})$ é isomorfo a $H^k(\mathbb{R}^n - \{0\}$, para todo k. Para isso, considere a retração

$$r : \mathbb{R}^n - \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}, \quad r(p) = p/|p|\,.$$

Se $i : \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ é a aplicação inclusão, então

$$r \circ i : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$$

é a aplicação identidade de $\mathbb{S}^{n-1}$.

A aplicação

$$i \circ r : \mathbb{R}^n - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}, \quad i\circ r(p) = p/|p|$$

não é a aplicação identidade, mas é homotópica a identidade; podemos definir a homotopia $H : (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$, entre $i \circ r$ e a identidade, por

$$H(p,t) = tp + (1-t)i\circ r(p) \in (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times [0,1]\,.$$

Uma retração com esta propriedade é chamada *deformação por retração*. Note que sempre que r for uma deformação por retração, pelo **Teorema 2.3**, concluimos que $(r\circ i)^*$ e $(i\circ r)^*$ são iguais a identidade. Em particular, temos que $(r\circ i)^*$ e $(i\circ r)^*$ são iguais a identidade de $H^k(\mathbb{S}^{n-1})$ e $H^k(\mathbb{R}^n - \{0\})$, respectivamente. Como

$$r^* : H^k(\mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow H^k(\mathbb{R}^n - \{0\})$$

$$i^* : H^k(\mathbb{R}^n - \{0\}) \longrightarrow H^k(\mathbb{S}^{n-1})$$

e

$$r^* \circ i^* = (i\circ r)^* = \text{identidade de } \; H^k(\mathbb{R}^n - \{0\})$$

$$i^* \circ r^* = (r\circ i)^* = \text{identidade de } \; H^k(\mathbb{S}^{n-1}),$$

temos que i^* e r^* são inversas uma da outra. Então

$$H^k(\mathbb{S}^{n-1}) \cong H^k(\mathbb{R}^n - \{0\}), \quad \forall k.$$

Vamos agora calcular $H^k(\mathbb{S}^{n-1})$, para todo $0 < k < n-1$. Precisamos de mais uma observação. A variedade

$$M \times \{0\} \subset M \times \mathbb{R}^n$$

é uma deformação por retração de $M\times\mathbb{R}^n$. De fato, a retração $r : M\times\mathbb{R}^n \longrightarrow M\times\{0\}$ dada por $r(p,v) = (p,0)$ é uma deformação por retração. Logo,

$$H^k(M) = H^k(M\times\{0\}) \cong H^k(M\times\mathbb{R}^n),$$

para todo n.

Podemos agora enunciar e provar o seguinte teorema.

Teorema 2.6. *Para $0 < k < n-1$ temos $H^k(\mathbb{R}^n - \{0\}) = H^k(\mathbb{S}^{n-1}) = \{0\}$.*

Demonstração. Aplicaremos um processo indutivo para chegarmos ao resultado geral. O primeiro caso a ser considerado é quando $n = 3$, i.e, iremos, primeiramente, mostrar que $H^1(\mathbb{R}^3 - \{0\}) = \{0\}$.
Primeiro caso: $H^1(\mathbb{R}^3 - \{0\}) = \{0\}$.

Seja ω uma 1-forma fechada em $\mathbb{R}^3 - \{0\}$. Queremos mostrar que ω também é exata. Defina os conjuntos A e B por

$$A = \mathbb{R}^3 - \{(0,0) \times (-\infty, 0]\}$$

$$B = \mathbb{R}^3 - \{(0,0) \times [0, \infty)\}.$$

Como A e B são contráteis aos pontos $(0,0,1)$ e $(0,0,1)$, respectivamente, e como ω é fechada em A e em B, pelo lema de Poinceré, existem 0-formas, i.e, funções diferenciáveis f_A em A e f_B e B tais que

$$\begin{cases} \omega = df_A & \text{em } A \\ \omega = df_B & \text{em } B. \end{cases}$$

Assim, temos

$$df_A - df_B = d(f_A - f_B) = 0 \quad \text{em} \quad A \cap B = (\mathbb{R}^2 - \{0\}) \times \mathbb{R}.$$

Como $A \cap B$ é conexo, temos que $f_A - c = f_B$ em $A \cap B$, onde c é uma constante real. Então

$$\begin{cases} \omega &= d(f_A - c) & \text{em } A \\ \omega &= df_B & \text{em } B. \end{cases}$$

e como $df_A = df_B$ em $A \cap B$, temos que ω é uma 1-forma exata bem definida em $A \cup B = \mathbb{R}^3 - \{0\}$. Segue que $H^1(\mathbb{R}^3 - \{0\} = \{0\}$.
Segundo caso: $n = 4$ $(H^1(\mathbb{R}^4 - \{0\}) = H^2(\mathbb{R}^4 - \{0\}) = \{0\})$.

Se ω é uma 1-forma em $\mathbb{R}^4 - \{0\}$, usando o mesmo argumento para

$$A = \mathbb{R}^4 - \{(0,0,0) \times (-\infty, 0]\}$$

$$B = \mathbb{R}^4 - \{(0,0,0) \times [0, \infty)\}.$$

obtemos que $H^1(\mathbb{R}^4 - \{0\}) = 0$.

Se ω é uma 2-forma fechada em $\mathbb{R}^4 - \{0\}$ entã, como A e B são contráteis a $(0,0,1)$ e $(0,0,-1)$ respectivamente, pelo lema de Poincaré, temos que existem 1-formas η_A em A e η_B em B tais que

$$\begin{cases} \omega &= d\eta_A & \text{em } A \\ \omega &= d\eta_B & \text{em } B. \end{cases}$$

Portanto $d(\eta_A - \eta_B) = 0$ em $A \cap B = (\mathbb{R}^2 - \{0\}) \times \mathbb{R}$. Usando o fato de que $H^1([\mathbb{R}^3 - \{0\}] \times \mathbb{R}) = H^1(\mathbb{R}^3 - \{0\}) = \{0\}$, temos que $\eta_A - \eta_B$ é uma 1-forma exata em $A \cap B$.

Portanto, $\eta_A - \eta_B = d\lambda$, para alguma função diferenciável λ em $A \cap B$. Ao contrário do primeiro caso, $d\lambda$ não está definida em A (no primeiro caso, a forma constante c está definida em A). Portnato, não podemos simplesmente definir $\omega = \eta_A - d\lambda$ em A. Para contornarmos essa dificuldade, note que existe uma partição da unidade $\{\Phi_A, \Phi_B\}$

subordinada a cobertura $\{A, B\}$ de $\mathbb{R}^4 - \{0\}$, i.e, existem Φ_A e Φ_B diferenciáveis em $\mathbb{R}^4 - \{0\}$ tais que

$$\begin{cases} \Phi_A + \Phi_B & = & 1 \\ d\Phi_A + d\Phi_B & = & 0 \\ \text{supp } \Phi_A \subset A \\ \text{supp } \Phi_B \subset B. \end{cases}$$

Defina

$$\Phi_B\lambda := \begin{cases} \Phi_B\lambda & \text{em} & A \cap B \\ 0 & \text{em} & A - (A \cap B), \end{cases}$$

e

$$\Phi_A\lambda := \begin{cases} \Phi_A\lambda & \text{em} & A \cap B \\ 0 & \text{em} & B - (A \cap B), \end{cases}$$

Portanto, $\Phi_B\lambda$ é uma 0-forma diferenciável em A e $\Phi_A\lambda$ é uma 0-forma diferenciável em B. Em $A \cap B$ temos

$$\begin{aligned} \eta_A - d(\Phi_B\lambda) &= \eta_A - \Phi_B d\lambda - d\Phi_B \wedge \lambda \\ &= \eta_A + (\Phi_A - 1)d\lambda + d\Phi_A \wedge \lambda \\ &= \eta_A - d\lambda + d(\Phi_A\lambda) \\ &= \eta_B + d(\Phi_A\lambda). \end{aligned}$$

Portanto, podemos definir ω em $\mathbb{R}^4 - \{0\}$ por

$$\begin{cases} \omega & = & d\eta_A = d(\eta_A - d(\Phi_B\lambda) \quad \text{em } A \\ \omega & = & d\eta_B = d(\eta_B + d(\Phi_A\lambda) \quad \text{em } B. \end{cases} \tag{2.6}$$

Segue que ω é exata em $\mathbb{R}^4 - \{0\}$ e, portanto, $H^2(\mathbb{R}^4 - \{0\}) = \{0\}$.

No caso geral, para calcularmos $H^1(\mathbb{R}^n - \{0\})$ procedemos como no primeiro caso para

$$A = \mathbb{R}^n - \{(0, \ldots, 0) \times (-\infty, 0]\}, \quad (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

e

$$B = \mathbb{R}^n - \{(0 \ldots, 0) \times [0, \infty)\}, \quad (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Nos demais casos, usamos a partição da unidade $\{\Phi_A, \Phi_B\}$ subordinada a cobertura $\{A, B\}$ de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ para definirmos

$$\Phi_B\lambda := \begin{cases} \Phi_B\lambda & \text{em} & A \cap B \\ 0 & \text{em} & A - (A \cap B), \end{cases}$$

e

$$\Phi_A\lambda := \begin{cases} \Phi_A\lambda & \text{em} & A \cap B \\ 0 & \text{em} & B - (A \cap B), \end{cases}$$

onde η_A e η_B são $(k-1)$-formas em A e B, respectivamente, tais que $\omega = d\eta_A$ em A e $\omega = d\eta_B$ em B e λ é uma $(k-2)$-forma tal que

$$\eta_A - \eta_B = d\lambda$$

em $A\cap B = (\mathbb{R}^{n-1} - \{0\}) \times \mathbb{R}$. Isso é garantido pois $d(\eta_A - \eta_B) = 0$ em $A \cap B = (\mathbb{R}^{n-1} - \{0\}) \times \mathbb{R}$ e pelo fato de $H^{k-1}(A\cap B) = H^{k-1}(\mathbb{R}^{n-1} - \{0\} \times \mathbb{R}) = H^{k-1}(\mathbb{R}^{n-1} - \{0\}) = \{0\}$. Assim, podemos definir a k-forma ω de maneira similar a equação (2.6), donde ω é exata, como queríamos provar.

$\square$

Capítulo 3

As Esferas que Admitem Estrutura de Grupo de Lie

Neste capítulo, demonstraremos que as únicas esferas que admitem estrutura de grupo de Lie são $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$. Para cumprirmos essa tarefa, é necessário apresentarmos alguns resultados que, juntos com outros apresentados ao longo deste trabalho, nos permitirão provar a nossa afirmação. Começamos com a

Definição 3.1. *Uma k-*forma multilinear *Φ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação que a cada ponto $p \in M$ associa uma aplicação k-linear em $T_pM \times \ldots \times T_pM$. Diz-se que Φ é diferenciável se dados quaisquer $X_1, \ldots, X_k$ campos diferenciáveis de vetores em um aberto U de M, a função $\Phi(X_1, \ldots, X_k) : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Phi(X_1, \ldots, X_k)(p) = \Phi(p)(X_1(p), \ldots, X_k(p))$ é diferenciável.*

Uma k-forma multilinear Φ em uma variedade M é uma *k-forma alternada* se, para cada $p \in M$, $\Phi(p)$ é uma aplicação k-linear alternada em $T_pM \times \ldots \times T_pM$, ou seja, Φ é uma k-forma diferencial; Φ é uma *k-forma simétrica* se $\Phi(p)$ é uma aplicação k-linear tal que

$$\Phi(p)(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots, X_k) = \Phi(p)(X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_i, \ldots, X_k),$$

$\forall i, j = 1, \ldots, k$, qualquer que seja $p \in M$. Diz-se que uma k-forma multilinear Φ em um grupo de Lie G é *invariante à esquerda (à direita)* se, para quaisquer campos diferenciáveis de vetores $X_1, \ldots, X_k$ em G, tivermos $L_g^*\Phi = \Phi$ ($R_g^*\Phi = \Phi$), isto é

$$\begin{aligned} L_g^*\Phi(p)(X_1(p), \ldots, X_k(p)) &= \Phi(L_g(p))((dL_g)_pX_1(p), \ldots, (dL_g)_pX_k(p)) \\ &= \Phi(L_g(p))((dL_g)_pX_1(p), \ldots, (dL_g)_pX_k(p)) \\ &= \Phi(p)(X_1(p), \ldots, X(p)), \end{aligned}$$

para todo $g, p \in G$, onde L_g (R_g) representa uma translação à esquerda (à direita) em G por g. Dizemos que Φ é *bi-invariante* se for invariante à esquerda e invariante à direita.

Seja G um grupo de Lie e seja Φ uma k-forma multilinear sobre G. Se Φ é tal que

$$\Phi(X_1, \ldots, X_k) = \Phi(Ad(g)X_1, \ldots, Ad(g)X_k),$$

para quaisquer $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{G}$, Φ é dita *invariante sobre* $\mathcal{G}$.

Note que se Φ é uma k-forma multilinear bi-invariante, então, dados $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{G}$ temos

$$\begin{aligned}
\Phi(Ad(g)X_1, \ldots, Ad(g)X_k) &= \Phi((dL_g \circ dR_{g^{-1}})X_1, \ldots, (dL_g \circ dR_{g^{-1}})X_k) \\
&= L_g^*\Phi((dR_{g^{-1}})X_1, \ldots, (dR_{g^{-1}})X_k) \\
&= L_g^*(R_{g^{-1}}^*\Phi)(X_1, \ldots, X_k) \\
&= L_g^*(\Phi)(X_1, \ldots, X_k) \\
&= \Phi(X_1, \ldots, X_k),
\end{aligned}$$

ou seja, Φ é invariante sobre a $\mathcal{G}$.

Podemos agora enunciar o seguinte resultado.

Teorema 3.1. *Seja G um grupo de Lie compacto e conexo e seja Φ uma k-forma multilinear em G. Então Φ é invariante sobre $\mathcal{G}$ se, somente se,*

$$\sum_{i=1}^{k} \Phi(g)(X_1(g), \ldots, X_{i-1}(g), [Y, X_i](g), X_{i+1}(g), \ldots, X_k(g)) = 0, \tag{3.1}$$

para todo $Y, X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{G}$ e $g \in G$.

Demonstração. Ver [1], páginas 308-309. Na proposição seguinte, temos uma importante caracterização das k-formas diferenciais bi-invariantes em um grupo de Lie compacto e conexo.

Proposição 3.1. *Se G é um grupo de Lie compacto e conexo, toda k-forma diferencial bi-invariante sobre é fechada.*

Demonstração. Seja ω uma r-forma diferencial bi-invariante em G. De acordo com a **Proposição 1.5**, dados os campos $X_1, \ldots, X_{r+1} \in \mathcal{G}$, temos

$$
\begin{aligned}
d\omega(X_1,\ldots,X_{r+1}) &= \sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i-1}X_i(\omega(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_{r+1}))\\
&+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_{r+1}),
\end{aligned}
$$

onde cada termo $\hat{X}_i$ está omitido. Note que cada função $\omega(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_{r+1})$ é constante, pois, como cada um dos campos $X_1,\ldots,X_{r+1}$ são invariantes à esquerda e, além disso, ω é em invariante à esquerda, dados $p,g\in G$ temos

$$
\begin{aligned}
\omega(p)(X_1(p),\ldots,\hat{X}_i(p),\ldots,X_{r+1}(p)) &= L^*_{gp^{-1}}\omega(p)(X_1(p),\ldots,\hat{X}_i(p),\ldots,X_{r+1}(p))\\
&= \omega(g)((dL_{gp^{-1}})X_1(p),\ldots,(dL_{gp^{-1}})X_{r+1}(p))\\
&= \omega(g)(X_1(g),\ldots,\hat{X}_i(g),\ldots,X_{r+1}(g)).
\end{aligned}
$$

Segue que $X_i(\omega(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_{r+1}))$ é identicamente nula. E como ω é por hipótese bi-invariante, pelo **Teorema 3.1**, o segundo somatório na fórmula de $d\omega$ é nulo. Portanto,

$$
d\omega(X_1,\ldots,X_{r+1})=0
$$

para todo $g\in G$. Isso nos mostra que $\omega(e)$ é fechada em $\mathcal{G}$ e, portanto, que ω é fechada em G.

□

É possível mostrar que k-formas alternadas invariantes sobre $\mathcal{G}$, com G compacto e conexo, são fechadas. Apresentaremos um resultado essencial para as nossas pretenções. Ele nos permite obter resultados sobre grupos de cohomologia de De Rham $H^p(G)$ de um grupo de Lie compacto e conexo G utilizando um conjunto isomorfo a este, porém, relativamente mais simples.

Teorema 3.2. *Para um grupo de Lie G compacto e conexo, $H^p(G)$ é isomorfo ao espaço vetorial de todas as p-formas lineares invariantes sobre $\mathcal{G}$.*

Demonstração. Faremos apenas um esboço da demonstração. Para maiores detalhes, ver [1], página 309. Seja $\Omega(G)$ o espaço das p-formas em G e $\Omega_{inv}(G)$ o espaço das p-formas bi-invariantes sobre G. Dada $\omega\in\Omega(G)$, defina $I:\Omega(G)\longrightarrow\Omega_{inv}(G)$ por

$$
I(\omega)(g)(X_1,\ldots,X_p)=\int c^*_\sigma\omega(g)(X_1,\ldots,X_p)d\sigma=\int\omega(c_\sigma(g))(d(c_\sigma)X_1,\ldots,d(c_\sigma)X_p)d\sigma,
$$

onde $c:G\times G\longrightarrow G$, $(g,\sigma)\mapsto c_\sigma(g)$, é a ação de $G\times G$ sobre G dada por $c_\sigma(g)=\sigma g\sigma^{-1}$. É possível mostrar que $I(\omega)$ é bi-invariante, se ω é bi-invariante $I(\omega)=\omega$ e que $dI(\omega)=I(d\omega)$. Além disso, se considerarmos a classe de ω, $[\omega]\in H^p(G)$, teremos que $[\omega]=[I(\omega)]$ (observe que, como $I(\omega)$ é bi-invariante, temos que $I(\omega)$ também é fechada); isso pode ser verificado se usarmos o isomorfismo de De Rham $H^p(G)\longrightarrow\hom(H_p(G))$, onde $H_p(G)$ é o grupo de *homologia* de dimensão p de G, dado por $[\omega]\mapsto\int_c\omega$, onde c é um p-ciclo e ω é um representante fixado da classe $[\omega]$.

Sabemos que cada p-forma invariante sobre $\mathcal{G}$ determina unicamente uma p-forma bi-invariante em G. Com isso, podemos estabelecer um isomorfismo do espaço das p-formas invariantes em $\mathcal{G}$ no espaço $H^p(G)$, tomando, para cada p-forma $\omega(e)$ em $\mathcal{G}$ a classe $[\omega] \in H^p(G)$ da p-forma ω em G determinada por $\omega(e)$. De fato, dada uma classe qualquer $[\omega] \in H^p(G)$, associamos a esta classe a p-forma invariante em $\mathcal{G}$ dada pela forma $I(\omega)(e)$ em $\mathcal{G}$, onde ω é um representante da classe $[\omega] = [I(\omega)]$. Por outro lado, se uma p-forma em $\mathcal{G}$ determina a classe nula em $H^p(G)$, isto é, se a p-forma bi-invariante ω em G determinada por ela for exata, teremos que $\omega = d\eta$, onde η é uma $(p-1)$-forma em G, bi-invariante. De fato, $\omega = I(\omega) = I(d\eta) = d(I(\eta))$, donde $I(\eta)$ é bi-invariante. Com isso, temos que η é fechada, ou seja, $d\eta = 0$. Assim, teremos $\omega = 0$. Segue que $H^p(G)$ é isomorfo ao espaço das p-formas invariantes em $\mathcal{G}$.

$\square$

Daqui por diante, assumiremos que G é um grupo de Lie compacto e conexo. Seja $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ o subespaço de $\mathcal{G}$ gerado pelos elementos da forma $[X, Y]$, $X, Y \in \mathcal{G}$.

Corolário 3.1.

$$[\mathcal{G}, \mathcal{G}] = \mathcal{G} \Leftrightarrow H^1(G) = \{0\}.$$

Demonstração. Suponha que $[\mathcal{G}, \mathcal{G}] = \mathcal{G}$ e seja $\omega(e)$ uma p-forma invariante sobre $\mathcal{G}$. Como $\omega(e)$ é fechada, dado $Z = [X, Y] \in \mathcal{G}$, temos

$$0 = d\omega(e)(X, Y) = X(\omega(e)(Y)) - Y(\omega(e)(X)) - \omega([X, Y]) = -\omega([X, Y]) = -\omega(Z),$$

pois $X(\omega(e)(Y)) = Y(\omega(e)(X)) = 0$. Segue que $\omega \equiv 0$, e portanto, pelo **Teorema 3.2**, $H^1(G)$ é isomorfo ao espaço trivial $\{0\}$, donde $H^1(G) = \{0\}$.

Por outro lado, se $[\mathcal{G}, \mathcal{G}] \neq \mathcal{G}$, i.e, se $[\mathcal{G}, \mathcal{G}] \subsetneq \mathcal{G}$, defina $\omega(e)$ sobre $\mathcal{G}$ como sendo a projeção ortogonal de $\mathcal{G}$ sobre o complemento ortogonal de $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ em $\mathcal{G}$; dessa forma teremos uma 1-forma não-nula sobre $\mathcal{G}$ que se anula em $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$. Logo, $\omega(e)([X, Y]) = 0$, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{G}$. Portanto, pelo **Teorema 3.1**, temos que $\omega(e)$ é invariante. Como $H^1(G)$ é isomorfo ao espaço das 1-formas invariantes sobre $\mathcal{G}$, temos que ter $H^1(G) \neq \{0\}$.

$\square$

Corolário 3.2.

$$H^1(G) = \{0\} \Rightarrow H^2(G) = \{0\}.$$

Demonstração. Seja $\omega(e)$ uma 2-forma invariante sobre $\mathcal{G}$. Como $\omega(e)$ é fechada e $X(\omega(e)(Y, Z)) = Y(\omega(e)(X, Z)) = Z(\omega(e)(X, Y)) = 0$, usando a fórmula para $d\omega$, temos

$$\begin{aligned}
0 &= d\omega(e)(X, Y, Z) = -\omega(e)([X, Y], Z) + \omega(e)([X, Z], Y) - \omega(e)([Y, Z], X) \\
&= -\omega(e)([X, Y], Z) - \{\omega(e)([Z, X], Y) + \omega(e)(X, [Z, Y])\} \\
&= -\omega(e)([X, Y], Z),
\end{aligned}$$

pois, como $\omega(e)$ é invariante, a parcela entre chaves na segunda igualdade acima é nula. Com isso, como $[\mathcal{G},\mathcal{G}]=\mathcal{G}$ pelo **Corolário 3.1**, segue que $\omega(e)\equiv 0$.

$\square$

Vamos agora apresentar o principal resutado desta seção. Ele nos fornece, sob condições adequadas, uma correspondência biunívoca entre o conjunto das 2-formas multilineares invariantes simétricas e o conjunto das 3-formas alternadas invariantes sobre $\mathcal{G}$, onde G é um grupo de Lie compacto e conexo.

Teorema 3.3. *Se $H^1(G)=\{0\}$, então a correspondência $\eta\mapsto\omega$, dada por $\omega(X,Y,Z)=\eta([X,Y],Z)$, é uma correspondência biunívoca do espaço das 2-formas simétricas invariantes sobre $\mathcal{G}$ no espaço das 3-formas alternadas invariantes sobre $\mathcal{G}$.*

Demonstração. Dada uma 3-forma alternada ω invariante sobre $\mathcal{G}$, defina, para cada $Z\in\mathcal{G}$, uma 2-forma alternada invariante ω_Z sobre $\mathcal{G}$ por $\omega_Z(X,Y)=\omega(X,Y,Z)$. Afirmamos que ω_Z é fechada. De fato, como ω é invariante, temos

$$\begin{aligned}
0 &= d\omega(X_0,X_1,X_2,Z)\\
&= -\omega([X_0,X_1],X_2,Z)+\omega([X_0,X_2],X_1,Z)-\omega([X_1,X_2],X_0,Z)\\
&\quad -\omega([X_0,Z],X_1,X_2)+\omega([X_1,Z],X_0,X_2)-\omega([X_2,Z],X_0,X_1)\\
&= -\omega([X_0,X_1],X_2,Z)+\omega([X_0,X_2],X_1,Z)-\omega([X_1,X_2],X_0,Z)\\
&= d\omega_Z(X_0,X_1,X_2),
\end{aligned}$$

pois os trez últimos termos formam o somatório que se anulam, de acordo com o **Teorema 3.1**, devido à invariância de ω. Pelo **Corolário 3.2**, temos que $H^2(G)=\{0\}$; segue que ω_Z é exata, ou seja, $\omega_Z=d\zeta_Z$, para alguma 1-forma (invariante) ζ_Z sobre $\mathcal{G}$. Então temos

$$\omega(X,Y,Z)=\omega_Z(X,Y)=\omega_Z(X,Y)=d\zeta_Z(X,Y)=-\zeta_Z([X,Y]).$$

Defina $\eta(S,T)=\zeta_T(S)$. Pela linearidade de ζ_Z, temos que η é linear em S. Note que η também é linear em T, pois, como $[\mathcal{G},\mathcal{G}]=\mathcal{G}$, dados $S=[X,Y]$, $T=[X',Y']$ e R em $\mathcal{G}$, temos

$$\begin{aligned}
\eta(S,R+T)=\zeta_{T+R}(S) &= \zeta_{[X',Y']+R}(S)=\zeta_{[X',Y']+R}([X,Y])\\
&= -\omega(X,Y,[X',Y']+R)\\
&= -\omega(X,Y,[X',Y'])-\omega(X,Y,R)\\
&= \zeta_T([X,Y])+\zeta_R([X,Y])\\
&= \zeta_T(S)+\zeta_R(S)\\
&= \eta(S,T)+\eta(S,R).
\end{aligned}$$

Para $g\in G$ e $X\in\mathcal{G}$, denote $Ad(g)(X)$ por X^g. Lembremos que $Ad(g)([X,Y])=[Ad(g)(X),Ad(g)(Y)]$. Então, pela invariância de ω, temos

$$\begin{aligned}
\eta([X,Y],Z) &= \omega(X,Y,Z)=\omega(X^g,Y^g,Z^g)\\
&= \eta([X^g,Y^g],Z^g)=\eta([X,Y]^g,Z^g).
\end{aligned}$$

Como $[\mathcal{G}, \mathcal{G}] = \mathcal{G}$, segue que η é invariante.

Agora, para mostrar que η é simétrica, considere a decomposição $\eta = \eta_1 + \eta_2$, onde $\eta_1(S,T) = \frac{1}{2}(\eta(S,T) + \eta(T,S))$ é simétrica e $\eta_2(S,T) = \frac{1}{2}(\eta(S,T) - \eta(T,S))$ é alternada. Como a única 2-forma que é ao mesmo tempo simétrica e alternada é a 2-forma nula, temos que essa decomposição é única. Com isso, temos que η_1 e η_2 são ambas invariantes. Como $H^2(G) = 0$, temos que $\eta_2 = 0$. Logo, η é simétrica.

Reciprocamente, se η é dada e ω é definida por $\omega(X,Y,Z) = \eta([X,Y], Z)$, então ω é invariante pelo mesmo argumento. Pela invariância de η temos $\eta([X,Y], Z) = -\eta(Y, [X,Z])$. Usando isto com o fato de η ser simétrica, verifica-se que ω é alternada.

□

Vimos na **Proposição 2.2** que todo grupo de Lie compacto e conexo admite uma métrica bi-invariante $\langle , \rangle$, isto é, admite uma 2-forma não-trivial simétrica (positiva e definida) e bi-invariante sobre G. Consequentemente, teremos uma 2-forma não-trivial simétrica invariante sobre $\mathcal{G}$. Portanto, temos o seguinte resultado.

Corolário 3.3. *Se $G \neq \{0\}$ e $H^1(G) = \{0\}$, então $H^3(G) \neq \{0\}$.*

Demonstração. De fato, teremos, associada ao produto interno em $\mathcal{G}$ uma 3-forma (alternada) invariante sobre $\mathcal{G}$ que, por sua vez, determina uma classe não-nula em $H^3(G)$, como vimos anteriormente.

□

Estamos agora prontos para estabelecer o resultado ao qual se dedica todo este trabalho. Ele nos fornece uma importamte caracterização das esferas $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, no que diz respeito à possibilidade de se obter uma estrutura de grupo de Lie definida nestas esferas. Na verdade, nem toda esfera $\mathbb{S}^n$ admite uma tal estrutura. No capítulo 2, verificamos que as esferas $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ (**Exemplo 2.3** e **Exemplo 2.4** respectivamente) admitem uma estrutura de grupo de Lie. O nosso resultado principal será dado pelo seguinte teorema:

Teorema 3.4. *As únicas esferas euclidianas compactas e conexas que admitem uma estrtura de grupo de Lie são $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$.*

Demonstração. De fato, de acordo com o **Crolário 3.3**, se G é não-trivial e $H^1(G) = \{0\}$, temos que ter $H^3(G) \neq \{0\}$. Ora, mas pelo **Teorema 2.6**, para $0 < k < n-1$, temos $H^k(\mathbb{S}^{n-1}) = \{0\}$. Logo, se existisse uma outra esfera $\mathbb{S}^n$, $n \neq 1, 3$, que admite uma estrutura de grupo de Lie, por ser compacta e conexa, teríamos que ter $H^3(\mathbb{S}^n) \neq \{0\}$; a esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ não pode admitir uma estrutura de grupo de Lie, uma vez que $H^1(\mathbb{S}^2) = \{0\}$ e, como a única 3-forma sobre $\mathbb{S}^2$ é a identicamente nula, temos $H^3(\mathbb{S}^2) = \{0\}$. Também pelo teorema citado acima, $H^1(\mathbb{S}^{n-1}) = H^3(\mathbb{S}^{n-1}) = \{0\}$, para todo $n > 4$, isto é, as esferas $\mathbb{S}^m$, $m \geq 4$, também não admitem uma estrutura de grupo de Lie.

□

Referências Bibliográficas

[1] BREDON, E. Glen. *Topology and Geometry.* Springer-Verlag, New York, 1993.

[2] BOOTHBY, Willian M. *An Introduction To Differentiable Manifolds And Riemannian Geometry.* 2ª ed, Elsevier Science, USA, 2003.

[3] DO CARMO, Manfredo P. *Differential Forms And Applications.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1994.

[4] DO CARMO, Manfredo P. *Geometria Riemanniana.* 4ª ed, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, IMPA, 2008.

[5] LIMA, E. Lages. *Análise Real, vol. 2.* 11ªed, Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro, IMPA, 2006.

[6] GUILLERMIN, V.; POLACK, A. *Differential Topology.* Prentice-Hall, New Jersey, 1974.

[7] SPIVAK, M. *Differential Geometry, Vol. 1*, 2ª ed, Publish or Perish, Houston, Texas, 1979.

[8] WARNER, Frank W. *Foundations Of Differentiable Manifolds And Lie Groups.* Sccot, Foresman and Company, Glenview, Illinois, 1971.

Índice Remissivo