



Universidade Federal de Alagoas  
Instituto de Matemática  
Curso de Pós-Graduação em Matemática  
Dissertação de Mestrado

# **Hipersuperfícies Mínimas Completas Estáveis Com Curvatura Total Finita**

Robério Batista da Rocha

Maceió, Brasil  
30 de Março de 2010

ROBÉRIO BATISTA DA ROCHA

# **Hipersuperfícies Mínimas Completas Estáveis com Curvatura Total Finita**

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 30 de março de 2010 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Petrucio de Almeida Cavalcante

Maceió, Brasil  
30 de Março de 2010

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**  
**Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale**

R672h Rocha, Robério Batista da.  
Hipersuperfícies mínimas completas estáveis com curvatura total finita /  
Robério Batista da Rocha, 2010.  
99 f.

Orientador: Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante.  
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas.  
Instituto de Matemática. Maceió, 2010.

Bibliografia: f. 97-98.  
Índices: f. 99.

1. Ricci, Curvatura de. 2. Curvatura total finita. 3. Hipersuperfícies mínimas.  
4. Morse, Índice de. 5. Operador de estabilidade. 6. Catenóide. 7. Segunda forma  
fundamental. I. Título.

CDU: 514.772.2

# Hipersuperfícies Mínimas Completas Estáveis com Curvatura Total Finita

Robério Batista da Rocha

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 30 de março de 2010 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:



---

Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitória (UFAL)



---

Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira (UFC)



---

Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva (UFAL)

*Aos meus pais Delvani e José,  
aos meus irmãos Emanuel, Rogério e Maura  
e a minha querida esposa Maiara.*

*“A Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida.”*

*Jacques Bernoulli*

---

# AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado força, saúde, coragem e determinação diante de tantas dificuldades que a vida nos oferece.

Aos meus pais Delvani e José pelo amor, carinho e dedicação. Bem como aos meus irmãos Emanuel e Rogério por serem minha fonte de inspiração, e a minha irmã Maura pelo carinho que sempre tivera por mim.

A todos os meus tios e primos que de algum modo me deram força para esta vitória. Em especial, agradeço a Ivania e Ivone as quais estiveram sempre dispostas a me ajudar.

A minha esposa Maiara Souza Mendes, que com determinação, amor e carinho esteve sempre ao meu lado me dando força e incentivo para chegar até o final deste trabalho.

Aos professores da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia e aos colegas do mestrado em Matemática da UFBA. Em especial, aos professores Isaac Lázaro e Enaldo Vergasta pela motivação, aos amigos João Paulo, Roberto, Teles e Wendell pelo companheirismo e Ângela Soldatelli pelo apoio neste final de dissertação.

Ao professor Jorge Ferreira, pelo incentivo e pela confiança.

Ao meu orientador, Prof. Marcos Petrúcio, pela sua orientação, confiança, determinação e por acreditar que eu seria capaz de ir até o final deste trabalho. Agradeço-o também por me motivar a continuar na busca pelo conhecimento.

Ao professor Feliciano Vitório, que com muita competência, dedicação e paciência me orientou no último capítulo, na correção e na apresentação deste trabalho. Agradeço-o ainda por me incentivar a seguir nos estudos.

Aos professores Hilário Alencar e Jorge Herbert de Lira, pelas sugestões, correções e dicas de escrita, bem como por concordarem em participar da banca.

Aos professores da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aos colegas de mestrado em Matemática da UFAL. Em especial, ao professor Adán Corchó pelo incentivo e pelo apoio como coordenador do programa e aos colegas Fábio, Kennerson, Rodrigo, Viviane, Natália e Alex que estiveram sempre dispostos a me ajudar.

Ao Instituto Federal de Ciência e Tecnologia de Alagoas. Em especial, às direções e às coordenações do campus Marechal Deodoro que com muita flexibilidade foram essenciais para esta vitória. Bem como a todos os colegas de trabalho que direta ou indiretamente deram suas contribuições.

Por fim, agradeço a todos que de alguma maneira contribuíram para que esse momento se concretizasse.



---

# RESUMO

O objetivo principal desta dissertação é apresentar alguns resultados importantes sobre hipersuperfícies mínimas no espaço Euclidiano relacionados com o operador de estabilidade.

Inicialmente, apresentaremos as demonstrações das fórmulas da primeira e da segunda variações da área bem como a demonstração da desigualdade de Simons. Estes resultados, que são básicos da teoria, serão usados posteriormente. Em seguida, apresentaremos a demonstração do teorema de do Carmo-Peng, o qual assegura que uma hipersuperfície mínima completa estável imersa no espaço Euclidiano com a norma  $L^2$  da segunda forma fundamental finita é um hiperplano. Incluiremos na dissertação um resultado análogo com a norma  $L^3$  da segunda forma fundamental. Este último resultado foi provado por Li-Wei no caso em que a hipersuperfície tem dimensão 3, mas notamos que a demonstração se aplica para  $3 \leq n \leq 7$ .

Concluiremos apresentando alguns resultados sobre hipersuperfícies mínimas não estáveis no  $\mathbb{R}^3$  obtido por Fischer-Colbrie e López-Ros. Em particular, mostraremos que o catenóide e a superfície de Enneper são as únicas superfícies mínimas completas e orientadas com índice igual a um.

**Palavras-chave:** Curvatura de Ricci, Curvatura Total finita, Hipersuperfícies Mínimas, Índice de Morse, Operador de Estabilidade, Catenóide, Segunda Forma Fundamental.

---

# ABSTRACT

The main goal of this dissertation is to present some results on minimal hypersurfaces in the Euclidean space related to the stability operator.

Initially, we will present the demonstrations of the formulas of first and second variations of area and also the demonstration of the Simons' inequality. These results (which are basic results of the theory) will be used later. Next we will present the proof of the do Carmo-Peng's theorem showing that a complete stable minimal hypersurface immersed in the Euclidean space with finite  $L^2$  norm of the second fundamental form is a hyperplane. We will include in this dissertation a similar result with the  $L^3$  norm of the second fundamental form. This last result was proved by Li-Wei in the case where the hypersurface has dimension 3, but we note that proof applies to  $3 \leq n \leq 7$ .

We will conclude by presenting some results on non-stable minimal hypersurfaces in  $\mathbb{R}^3$  due to Fischer-Colbrie and Lopez-Ros. In particular, we will show that the catenoid and Enneper's surface are the only minimal complete orientable surfaces with index equal to one.

**Keywords:** Ricci Curvature, Finite Total Curvature, Minimal Hypersurfaces, Morse Index, Stability Operator, Catenoid, Second Fundamental Form.

---

# SUMÁRIO

<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>15</b>
1.1 Tensores . . . . .	15
1.2 Curvaturas . . . . .	20
1.3 Imersões Isométricas . . . . .	24
1.3.1 Hipersuperfícies . . . . .	29
<b>2 Variações de Área e Desigualdade de Simons</b>	<b>32</b>
2.1 Primeira Variação da Área . . . . .	32
2.2 Segunda Variação da Área . . . . .	38
2.3 Desigualdade de Simons . . . . .	47
<b>3 Hipersuperfícies Mínimas Completas Estáveis</b>	<b>56</b>
3.1 Estimativas $L^2$ da Norma da Segunda Forma Fundamental . . . . .	56
3.2 Estimativas $L^3$ da Norma da Segunda Forma Fundamental . . . . .	63
<b>4 Superfícies Mínimas com Índice Finito no <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>66</b>
4.1 Superfícies Mínimas de Índice Finito em $N^3$ com Curvatura Escalar não negativa	67
4.2 Superfícies Mínimas com Índice Finito no $\mathbb{R}^3$ . . . . .	83
4.3 Superfícies Mínimas com Índice 1 . . . . .	86

<b>A</b>	<b>A Derivada do Determinante</b>	<b>90</b>
<b>B</b>	<b>Desigualdade de Young</b>	<b>92</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>94</b>

---

# INTRODUÇÃO

Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana orientada  $M^n = M$  no espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^{n+1}$  (uma hipersuperfície em  $\mathbb{R}^{n+1}$ ) e seja  $A$  a sua segunda forma fundamental. Se denotarmos por  $\mathcal{A}$  o funcional área, então a fórmula da primeira variação da área estabelece que

$$\mathcal{A}'(0) = -n \int_M \langle T, \vec{H} \rangle dM,$$

onde  $T$  é o campo variacional associado a variação de  $x$  e  $\vec{H}$  é o vetor curvatura média de  $M$ . Como uma consequência deste resultado, as hipersuperfícies mínimas são caracterizadas como pontos críticos para o funcional área, ou seja, a curvatura média dessas hipersuperfícies é identicamente nula.

A teoria das superfícies mínimas tem sua origem com as pesquisas de J. L. Lagrange, em 1760 (veja [4] p. 236). Desde então recebeu colaborações de importantes matemáticos, como por exemplo, Euler, Gauss, Riemann, Plateau, Meusnier, Scherk, Schwarz, Enneper, Weierstrass, Bernstein, Darboux, Douglas, Radó; e mais recentemente, Nitsche, Chern, de Giorgi, Giusti, Miranda, Bombieri, Osserman, Schoen, Simons, Yau, Simon, Gray, White, Bryant, Fischer-Colbrie, Ros, Pérez, Barbosa, do Carmo, Peng, Rosenberg, Meeks, Minicozzi, Colding, Nadirashvili, para citar alguns.

A segunda variação da área é dada pela seguinte fórmula

$$\mathcal{A}''(0)(f) = \int_M \{-f\Delta f - |A|^2 f^2\} dM = - \int_M fLfdM,$$

onde  $\Delta$  é o Laplaciano de  $M$ ,  $|A|^2$  quadrado da norma da segunda forma fundamental e  $L : C_0^\infty(M) \rightarrow C_0^\infty(M)$  dado por  $L = \Delta + |A|^2$  é chamado de *operador de estabilidade* (ou *operador de Jacobi*). O operador  $L$  induz de maneira natural a forma quadrática  $Q : C_0^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$Q(f) = - \int_M fLfdM,$$

que atua no espaço das funções suaves em  $M$ . Neste caso, o *índice de Morse* da hipersuperfície  $M$ , denotado por  $Ind(M)$ , é definido como a dimensão máxima do subespaço  $V$  de  $C_0^\infty(M)$  em que  $Q$  é negativa definida. Equivalentemente,  $Ind(M)$  é o número de autovalores negativos do operador  $L$  contados com multiplicidade (veja [3], [8] ou [18]).

Diremos que uma hipersuperfície mínima é *estável* se  $Q(f) \geq 0$  para todo  $f \in C_0^\infty(M)$ . Em termos do índice, estabilidade significa que  $Ind(M) = 0$ .

É bem conhecido que gráficos mínimos no espaço Euclidiano são hipersuperfícies mínimas estáveis. Apesar deste fato, temos o famoso problema de Bernstein, a saber, "uma hipersuperfície mínima que é um gráfico inteiro no  $\mathbb{R}^{n+1}$  é um hiperplano?". Este problema foi mostrado ser afirmativo para  $n \leq 7$  e negativo para  $n \geq 8$  (veja [1]). Diante da solução do problema de Bernstein, a seguinte pergunta é natural: quais são as hipersuperfícies mínimas completas estáveis no  $\mathbb{R}^{n+1}$ ? Este problema foi resolvido no caso em que  $n = 2$  por do Carmo-Peng (veja [6]) e, independentemente, por Fischer-Colbrie-Schoen (veja [9]). Eles mostraram que tal superfície é o plano. Mas será que toda hipersuperfície mínima completa e estável é um hiperplano? Para  $n \geq 8$  a solução do problema de Bernstein fornece a existência de hipersuperfícies que são gráficos mínimos completos, porém não são hiperplanos. No caso em que  $3 \leq n \leq 7$  este problema encontra-se completamente em aberto.

Nesta dissertação, apresentaremos a demonstração de um outro teorema de do Carmo-Peng, feito em 1980 (veja [7]), onde este problema é resolvido com uma condição sobre o decaimento da norma da segunda forma fundamental, mais precisamente:

**Teorema A (do Carmo - Peng).** *Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície mínima completa e estável.*

Assuma que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\int_{B_R} |A|^2 dM}{R^{2+2q}} = 0,$$

onde  $0 < q < \sqrt{\frac{2}{n}}$ ,  $B_R \subset M$  é uma bola geodésica de raio  $R$  centrada em algum ponto de  $M$  e  $A$  a segunda forma fundamental de  $x$ . Então  $x(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é um hiperplano.

Como para hipersuperfícies mínimas  $|A|^2 = -2K$ , onde  $K$  é a curvatura escalar, temos como consequência desse Teorema que hipersuperfície mínima, completa e estável com curvatura total finita é um hiperplano.

Usando as técnicas da demonstração do Teorema  $A$ , provaremos o seguinte resultado

**Teorema B (Li-Wei).** *Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  ( $3 \leq n \leq 7$ ) uma hipersuperfície mínima completa e estável. Assuma que*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\int_{B_R} |A|^3 dM}{R^{1+2q}} = 0,$$

onde  $0 < q < \sqrt{\frac{2}{n}}$ ,  $B_R \subset M$  é uma bola geodésica de raio  $R$  centrado em algum ponto de  $M$  e  $A$  a segunda forma fundamental de  $x$ . Então  $x(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é um hiperplano.

Este teorema foi provado por Li-Wei em 2006 (veja [16]) apenas para  $n = 3$ , mas notamos que a demonstração se aplica para  $3 \leq n \leq 7$ .

Para finalizar esse trabalho, faremos um estudo sobre superfícies mínimas completas  $M$  com índice finito em uma variedade Riemanniana  $N^3$  (veja [8] e [18]). Mostraremos que se  $M$  tem índice finito então  $M$  é estável fora de um conjunto compacto e mostraremos também que  $M$  tem índice finito se, e somente se, existe um número finito de autofunções em  $L^2(M)$  com autovalores negativos de tal forma que o operador  $L$  é não-negativo no complemento ortogonal do espaço gerado pelas autofunções. No caso em que  $N$  é o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^3$ , provaremos que para qualquer superfície mínima completa e orientável a condição de que  $M$  tenha índice finito é equivalente a condição de que  $M$  tenha curvatura total finita. Mostraremos que se  $M$  é uma superfície mínima completa então  $M$  é conforme a uma superfície de Riemann menos um número finito de pontos. No caso em que a curvatura escalar de  $N$  é limitada inferiormente por uma constante positiva então  $M$  será compacta. Se  $N$  tem curvatura de Ricci não-negativa, mostraremos que  $|A|^2$  é integrável em  $M$  e isso implica o resultado para  $\mathbb{R}^3$ . Esses resultados foram estudados, em 1985, por Fischer-Colbrie (veja [8]).

Para finalizar este trabalho, mostraremos que

*"O catenóide e a superfície de Enneper são as únicas superfícies mínimas completas e orientáveis com índice igual a 1."*



---

---

# CAPÍTULO 1

---

## PRELIMINARES

Neste capítulo, introduziremos algumas definições e alguns resultados básicos de Geometria Riemanniana com o intuito de fixar a notação, admitindo que o leitor esteja familiarizado com os pré-requisitos necessários. Ao longo desta dissertação, a palavra diferenciável sempre significará de classe  $C^\infty$ . Para este capítulo as principais referências são [5] e [14].

### 1.1 Tensores

A ideia de tensor é uma generalização natural da ideia de campos de vetores, e o ponto importante é que, analogamente aos campos de vetores, os tensores podem ser derivados covariantemente.

Seja  $M^n$  uma variedade diferenciável orientada de dimensão  $n$ . Vamos denotar por  $\mathfrak{X}(M)$  o conjunto dos campos diferenciáveis em  $M$  e por  $C^\infty(M)$  o conjunto das funções diferenciáveis em  $M$ . Convém observar que  $\mathfrak{X}(M)$  é um módulo sobre o anel  $C^\infty(M)$ , isto é,  $\mathfrak{X}(M)$  tem uma estrutura linear quando tomamos como “escalares” os elementos de  $C^\infty(M)$ .

**Definição 1.1.1.** *Um tensor covariante  $T$  de ordem  $r$  é uma aplicação multilinear*

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{r \text{ fatores}} \rightarrow C^\infty(M).$$

Isto quer dizer que, dados  $Y_1, \dots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $T(Y_1, \dots, Y_r)$  é uma função diferenciável em  $M$ , e  $T$  é linear em cada argumento, ou seja,

$$T(Y_1, \dots, fX_i + gY_i, \dots, Y_r) = fT(Y_1, \dots, X_i, \dots, Y_r) + gT(Y_1, \dots, Y_i, \dots, Y_r)$$

para todo  $i = 1, \dots, r$ ,  $X_i, Y_1, \dots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f, g \in C^\infty(M)$ .

O tensor  $T$  é diferenciável em  $p \in M$  se, escolhido um referencial móvel  $\{E_1, \dots, E_n\}$ , as componentes de  $T$  em relação a esse referencial são diferenciáveis em  $p$ . O tensor  $T$  é diferenciável em  $M$  se é diferenciável em cada  $p \in M$ . No decorrer desta dissertação, diremos somente que  $T$  é um tensor, omitindo a palavra diferenciável.

Para o que se segue,  $(M^n, g)$  é uma variedade Riemanniana orientada de dimensão finita  $n \geq 2$ , munido da métrica Riemanniana  $g$ , ou simplesmente  $\langle, \rangle$ , a qual denotaremos apenas por  $M$  e com a Conexão de Levi-Civita de  $M$  denotada por  $\nabla$ .

Analogamente a um campo de vetores, um tensor pode também ser derivado. A seguinte definição introduz a noção de derivada de tensores.

**Definição 1.1.2.** Seja  $T$  um tensor de ordem  $r$ . A diferencial covariante  $\nabla T$  de  $T$  é um tensor de ordem  $(r + 1)$  dado por

$$\nabla T(Y_1, \dots, Y_r, Z) = Z(T(Y_1, \dots, Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1, \dots, Y_r) - \dots - T(Y_1, \dots, \nabla_Z Y_r),$$

para todo  $Y_1, \dots, Y_r, Z \in \mathfrak{X}(M)$ .

Para cada  $Z \in \mathfrak{X}(M)$  a derivada covariante  $\nabla_Z T$  de  $T$  em relação a  $Z$  é um tensor de ordem  $r$  dado por

$$\nabla_Z T(Y_1, \dots, Y_r) = \nabla T(Y_1, \dots, Y_r, Z).$$

Antes de prosseguir, vamos relembrar alguns operadores diferenciais que serão usados com frequência no decorrer desta dissertação.

Dada uma função  $f \in C^\infty(M)$ , definimos o *gradiente* de  $f$  como sendo o único campo vetorial  $\nabla f : M \rightarrow TM$  dado por

$$\langle \nabla f(p), X \rangle = df_p(X), \quad p \in M, \quad X \in T_p M.$$

Em outras palavras,  $\nabla f$  é o dual da forma  $df$  na métrica Riemanniana.

Considerando um referencial ortonormal  $\{E_1, \dots, E_n\}$  em um aberto  $U \subset M$  podemos escrever,

$$df = \sum_{i=1}^n f_i w_i,$$

onde  $w_i, i = 1, \dots, n$ , são as  $n$  1-formas duais associadas ao referencial  $\{E_1, \dots, E_n\}$ , ou seja,  $w_i(E_j) = \delta_{ij}$ . A função  $f_i$  é chamada a *derivada de  $f$*  na direção  $E_i$ . Além disso,  $f_i = df(E_i)$ , isto é,

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n f_i E_i.$$

Outro conceito importante é o de divergência de um campo. Dado  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , definimos a *divergência* de  $X$  como sendo a aplicação  $\text{div} X : M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\text{div} X(p) = \text{Tr}(Y(p) \mapsto (\nabla_Y X)(p)),$$

onde  $\text{tr}(Y(p) \mapsto (\nabla_Y X)(p))$  é o traço da aplicação linear  $Y(p) \mapsto (\nabla_Y X)(p)$ .

Sejam  $X$  um campo diferenciável de vetores em  $M$  e  $\{E_1, \dots, E_n\}$  um referencial geodésico. Escrevendo  $X = \sum_{k=1}^n x_k E_k$  temos que

$$\begin{aligned} \text{div} X &= \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{E_i} X, E_j \rangle \langle E_i, E_j \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{E_i} \sum_{k=1}^n x_k E_k, E_j \rangle \langle E_i, E_j \rangle \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n \langle E_i(x_k) E_k, E_j \rangle \langle E_i, E_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n E_i(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n x_{i;i}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde usamos a seguinte notação,  $x_{i;i} = E_i(x_i)$ .

Agora, dada uma função  $f \in C^\infty(M)$ , definiremos o *Laplaciano* de  $f$  como sendo a aplicação  $\Delta f : M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\Delta f(p) = \text{div}(\nabla f)(p)$ . Observe que  $\Delta f \in C^\infty(M)$  e tomando o

referencial geodésico  $\{E_1, \dots, E_n\}$  podemos expressar o Laplaciano de  $f$  por

$$\begin{aligned}\Delta f &= \operatorname{div}(\nabla f)(p) \\ &= \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^n f_i E_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n f_{ii}.\end{aligned}$$

O operador linear  $\Delta : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ , dado por

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f),$$

é chamado de *Laplaciano* de  $M$ .

Finalmente, o *Hessiano* de  $f$ , que denotaremos por  $\operatorname{Hess}f$ , é a forma bilinear simétrica

$$\operatorname{Hess}f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

dada por

$$\operatorname{Hess}f(p)(X, Y) = (XYf)(p) - \nabla_X Y(f)(p).$$

Observe que sendo  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Podemos considerar  $f$  como sendo um tensor covariante de ordem 0, o qual denotaremos por  $\nabla^0 f$ . De forma geral, podemos definir indutivamente o tensor covariante  $\nabla^{k+1} f$  da seguinte forma:

$$\nabla^{k+1} f = \nabla(\nabla^k f),$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\nabla^{k+1} f(Y_1, \dots, Y_k, Z) &= Z(\nabla^k f(Y_1, \dots, Y_k)) \\ &\quad - \nabla^k f(\nabla_Z Y_1, \dots, Y_k) - \dots - \nabla^k f(Y_1, \dots, \nabla_Z Y_k).\end{aligned}$$

Assim, por exemplo, dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  temos que  $\nabla^1 f$  e o  $\nabla^2 f$  coincidem, respectivamente, com o gradiente e o Hessiano de  $f$ . De fato, dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$\nabla^1 f(X) = X(\nabla^0 f) = df(X)$$

e

$$\nabla^2 f(X, Y) = Y(\nabla^1 f(X)) - \nabla^1 f(\nabla_Y^1 X) = YX(f) - \nabla_Y X(f).$$

Por simplicidade, denotaremos  $\nabla^1 f$  apenas por  $\nabla f$ .

O lema a seguir é um fato bem simples e incluiremos aqui a sua demonstração para completude do texto.

**Lema 1.1.1.** *Seja  $f \in C^\infty(M)$ . Então*

$$\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle.$$

*Demonstração.* Fixe  $p \in M$  e escolha um referencial ortonormal geodésico  $\{E_1, \dots, E_n\}$  em uma vizinhança de  $p$ . Então,

$$\begin{aligned} \Delta(fg)(p) &= \sum_{k=1}^n E_k E_k (fg)(p) \\ &= \sum_{k=1}^n E_k (g E_k f + f E_k g) \\ &= \sum_{k=1}^n g E_k E_k f + \sum_{k=1}^n E_k g E_k f + \sum_{k=1}^n E_k g E_k f + \sum_{k=1}^n f E_k E_k g \\ &= f\Delta g + g\Delta f + 2 \sum_{k=1}^n E_k g E_k f \\ &= f\Delta g + g\Delta f + 2 \sum_{k=1}^n g_k E_k f_k E_k \\ &= f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle. \end{aligned}$$

□

Em particular,

$$\frac{1}{2}\Delta f^2 = f\Delta f + |\nabla f|^2, \tag{1.2}$$

onde  $|\nabla f|^2$  é o quadrado da norma do campo  $\nabla f$ .

## 1.2 Curvaturas

Nesta seção, recordaremos os conceitos básicos de curvatura em uma variedade Riemanniana. A curvatura, intuitivamente, mede o quanto localmente uma variedade Riemanniana deixa de ser o espaço Euclidiano. Dando sequência, definiremos mais especificamente a curvatura seccional, a curvatura de Ricci e a curvatura escalar. Nossa principal referência foi o livro [5].

**Definição 1.2.1.** A curvatura  $R$  de uma variedade Riemanniana  $M$  é uma correspondência que associa a cada par  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  uma aplicação  $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M),$$

onde  $[X, Y] = XY - YX$  é o Colchete de Lie.

Observe que é frequente na literatura encontrarmos a definição de curvatura que difere da definição acima por sinal, (veja por exemplo [14]).

A seguir, enunciaremos algumas das principais propriedades de curvatura.

**Proposição 1.2.1.** A curvatura  $R$  de uma Variedade Riemanniana goza das seguintes propriedades:

(i)  $R$  é bilinear em  $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ , isto é,

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1)$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2)$$

$f, g \in C^\infty(M)$  e  $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$ ;

(ii) Para todo  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  o operador curvatura  $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  é linear, isto é,

$$R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W$$

$$R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z$$

$f \in C^\infty(M)$ ,  $Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ ;

(iii) (Primeira Identidade de Bianchi). Para quaisquer  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  vale

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

**Observação 1.2.1.** *Uma análise da proposição acima mostra que a necessidade do aparecimento do termo  $\nabla_{[X,Y]}Z$  na definição de curvatura está ligado ao fato de desejarmos que a aplicação  $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  seja linear.*

De agora em diante, usaremos a notação

$$\langle R(X, Y)Z, T \rangle = (X, Y, Z, T).$$

E temos as seguintes propriedades decorrentes das anteriores.

**Proposição 1.2.2.** *Para quaisquer  $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$  são válidas as seguintes relações:*

- (a)  $(X, Y, Z, T) + (Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) = 0$  (Bianchi);
- (b)  $(X, Y, Z, T) = -(Y, X, Z, T)$ ;
- (c)  $(X, Y, Z, T) = -(X, Y, T, Z)$ ;
- (d)  $(X, Y, Z, T) = (Z, T, X, Y)$ .

É conveniente escrever o que foi visto acima em um sistema de coordenadas  $(U, x)$  em torno do ponto  $p \in M$ . Indicaremos  $\frac{\partial}{\partial x_i} = E_i$ . Ponhamos

$$R(E_i, E_j)E_k = \sum_l R_{ijkl}E_l. \quad (1.3)$$

Assim  $R_{ijkl}$  são as componentes da curvatura  $R$  em  $(U, x)$ .

Relacionado com o tensor curvatura está a curvatura seccional, que passaremos a definir. Dado um espaço vetorial  $V$  e  $x, y \in V$ , indicaremos por  $|x \wedge y|$  a expressão

$$\sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2},$$

que representa a área do paralelogramo bi-dimensional determinado pelo par de vetores  $x, y \in V$

**Definição 1.2.2.** *Dado  $p \in M$  e um subespaço bi-dimensional  $\sigma \subset T_pM$ , o número real*

$$K(\sigma) = K(x, y) = \frac{\langle x, y, x, y \rangle}{|x \wedge y|^2},$$

onde  $x, y$  é uma base qualquer de  $\sigma$ , é chamado curvatura seccional de  $\sigma$  em  $p$ .

Observe que  $K$  não depende da escolha dos vetores  $x, y \in \sigma$ . De fato, dados  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tais que  $ax + by$  e  $cx + dy$  sejam linearmente independentes, temos que

$$|ax + by \wedge cx + dy|^2 = (ad - bc)^2$$

e, usando a linearidade, a Proposição (1.2.2) e o fato de que  $(x, x, y, z) = 0$  para todo  $x, y, z \in T_pM$ , temos também que

$$\begin{aligned} & (ax + by, cx + dy, ax + by, cx + dy) = \\ &= a(x, cx + dy, ax + by, cx + dy) + b(y, cx + dy, ax + by, cx + dy) \\ &= ad(x, y, ax + by, cx + dy) + bc(y, x, ax + by, cx + dy) \\ &= a^2d(x, y, x, cx + dy) + adb(x, y, y, cx + dy) + bca(y, x, x, cx + dy) \\ &\quad + b^2c(x, y, y, cx + dy) \\ &= a^2d^2(x, y, x, y) - adbc(x, y, x, y) - adbc(x, y, x, y) + b^2c^2(x, y, x, y) \\ &= (a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2)(x, y, x, y) \\ &= (ad - bc)^2(x, y, x, y). \end{aligned}$$

Portanto,

$$K(ax + by, cx + dy) = \frac{(ax + by, cx + dy, ax + by, cx + dy)}{|ax + by \wedge cx + dy|^2} = K(x, y).$$

Algumas combinações das curvaturas seccionais aparecem com tanta frequência que elas merecem nomes.

Seja  $x = E_n$  um vetor unitário em  $T_pM$ ; tomemos uma base ortonormal  $\{E_1, \dots, E_{n-1}\}$  do hiperplano de  $T_pM$  ortonormal a  $x$  e consideremos as seguintes médias:

$$Ric_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(x, E_i)x, E_i \rangle$$

e

$$K(p) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Ric_p(E_j).$$



As médias acima são denominadas, respectivamente, *curvatura de Ricci* na direção de  $x$  e *curvatura escalar* em  $p$ .

Portanto, podemos escrever a curvatura escalar da seguinte forma:

$$K(p) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \langle R(E_i, E_j)E_i, E_j \rangle. \quad (1.4)$$

Vamos provar que essas médias não dependem da escolha das correspondentes bases ortonormais de  $T_pM$ .

Considere a seguinte aplicação  $Q : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $Q(x, y) = \text{Tr}(z \mapsto R(x, z)y)$ .

**Proposição 1.2.3.** *Q é uma aplicação bilinear simétrica.*

*Demonstração.* Com efeito, considerando o referencial ortonormal de  $T_pM$  escolhido acima, temos que

$$Q(x, y) = \sum_{i=1}^n (x, E_i, y, E_i) = \sum_{i=1}^n (y, E_i, x, E_i) = Q(y, x).$$

Logo,  $Q$  é simétrica. Além disso,

$$\begin{aligned} Q(x + \alpha y, z) &= \sum_{i=1}^n (x + \alpha y, E_i, z, E_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (x, E_i, z, E_i) + \alpha \sum_{i=1}^n (y, E_i, z, E_i) \\ &= Q(x, z) + \alpha Q(y, z) \end{aligned}$$

para todos  $x, y, z \in T_pM$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Usando a simetria e a bilinearidade na primeira entrada de  $Q$  obtemos assim, a sua bilinearidade.  $\square$

Notemos que

$$\frac{1}{n-1} Q(x, x) = \text{Ric}_p(x),$$

logo, a curvatura de Ricci na direção de  $x$  está bem definida de tal modo que não depende da base de  $T_pM$  escolhida.

Por outro lado, à forma bilinear  $Q$  em  $T_pM$  corresponde uma aplicação linear auto-adjunta  $J : T_pM \rightarrow T_pM$ , dada por

$$\langle Jx, y \rangle = Q(x, y),$$

para todo  $x, y \in T_p M$ .

Portanto,

$$Ric_p(x) = \frac{1}{n-1} \langle Jx, y \rangle.$$

Neste caso,

$$\text{tr}(J) = \sum_{i=1}^n \langle JE_1, E_i \rangle = (n-1) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Ric_p(E_i) = (n-1)nJ(p).$$

Conseqüentemente  $J(p)$  também não depende da forma bilinear simétrica escolhida.

Observe que  $Q$  é um tensor de ordem 2 e a forma bilinear  $\frac{1}{n-1}Q$  é, às vezes, chamada de *tensor de Ricci*.

### 1.3 Imersões Isométricas

Seja  $x : M \rightarrow \bar{M}$  uma imersão de uma variedade diferenciável  $M$  de dimensão  $n$  em uma variedade Riemanniana  $\bar{M}$  de dimensão  $k = n + m$ . A métrica Riemanniana de  $\bar{M}$  induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em  $M$ : se  $v_1, v_2 \in T_p M$ , define-se  $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle dx_p(v_1), dx_p(v_2) \rangle$ . Nesta situação,  $x$  passa a ser uma imersão isométrica de  $M$  em  $\bar{M}$ .

O intuito desta seção é estudar as relações entre as geometrias de  $M$  e  $\bar{M}$ . Inicialmente notamos que, para cada  $p \in M$ , existe uma vizinhança  $U \subset M$  de  $p$  tal que  $x(U) \subset \bar{M}$  é uma subvariedade de  $\bar{M}$ . Isto quer dizer que existe uma vizinhança  $\bar{U} \subset \bar{M}$  de  $x(p)$  e um difeomorfismo  $\varphi : \bar{U} \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k$  em um aberto  $V$  do  $\mathbb{R}^k$ , tais que  $\varphi$  aplica difeomorficamente  $x(U) \cap \bar{U}$  em um aberto do subespaço  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$ .

Para simplificar a notação, identificaremos  $U$  com  $x(U)$  e cada vetor  $v \in T_q M$ ,  $q \in U$ , com  $dx_q(v) \in T_{x(q)} \bar{M}$ .

Para cada  $p \in M$ , o produto interno em  $T_{x(p)} \bar{M}$  decompõe  $T_{x(p)} \bar{M}$  na soma direta

$$T_{x(p)} \bar{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp,$$

onde  $(T_p M)^\perp$  é o complemento ortogonal de  $T_p M$  em  $T_{x(p)} \bar{M}$ .

Denominamos *espaço normal da imersão  $x$  em  $p$*  ao conjunto  $(T_p M)^\perp$ . Assim, cada  $v \in T_{x(p)} \bar{M}$ , pode ser escrito como

$$v = v^T + v^N, \quad v^T \in T_p M \quad e \quad v^N \in (T_p M)^\perp.$$

Diz-se que  $v^T$  é a *componente tangencial* de  $v$  e  $v^N$  a *componente normal* de  $v$ . Tal decomposição é evidentemente diferenciável no sentido que as aplicações de  $T\bar{M}$  em  $T\bar{M}$  dadas por

$$(p, v) \mapsto (p, v^T) \quad e \quad (p, v) \mapsto (p, v^N)$$

são diferenciáveis.

A partir da decomposição acima, obtemos o *fibrado normal* em  $M$

$$TM^\perp = \bigcup_{p \in M} (T_p M)^\perp.$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} T\bar{M}|_{x(M)} &= \{X \in T\bar{M}; \pi(X) \in x(M), \pi : T\bar{M} \rightarrow \bar{M} \text{ é a projeção}\} \\ &= TM \oplus TM^\perp. \end{aligned}$$

A conexão Riemanniana de  $\bar{M}$  será indicada por  $\bar{\nabla}$ . Se  $X$  e  $Y$  são campos locais de vetores em  $M$ , e  $\bar{X}, \bar{Y}$  são extensões locais a  $\bar{M}$ , definimos a conexão em  $M$  por

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T.$$

Queremos definir a segunda forma fundamental da imersão  $x : M \rightarrow \bar{M}$ . Para isto convém introduzir previamente a seguinte definição: Se  $X, Y$  são campos locais em  $M$ ,

$$A(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y := (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^N \tag{1.5}$$

é um campo local em  $\bar{M}$  normal a  $M$ .

Afirmamos que  $A(X, Y)$  não depende das extensões  $\bar{X}_1$  e  $\bar{Y}_1$ . Com efeito, se  $\bar{X}_1$  e  $\bar{Y}_1$  são extensões de  $X$  e  $Y$ , respectivamente, então temos

$$(\nabla_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y) - (\nabla_{\bar{X}_1} \bar{Y}_1 - \nabla_X Y) = \nabla_{\bar{X} - \bar{X}_1} \bar{Y} - \nabla_{\bar{X}_1} (\bar{Y} - \bar{Y}_1) = 0 + 0 = 0,$$

pois  $\bar{X} - \bar{X}_1 = 0$  em  $M$  e  $\bar{Y} - \bar{Y}_1 = 0$  ao longo de uma trajetória de  $X$ . Portanto  $A(X, Y)$  está

bem definido e vale que:

$$\nabla_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y = \nabla_{\bar{X}_1}\bar{Y}_1 - \nabla_X Y = A(X, Y).$$

No que se segue, indicaremos por  $\mathfrak{X}(U)^\perp$  o espaço vetorial dos campos de vetores normais a  $x(U)$ .

**Proposição 1.3.1.** *Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ , a aplicação  $A : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)^\perp$  dada por*

$$A(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y$$

*é bilinear e simétrica.*

*Demonstração.* Dados  $g \in C^\infty(M)$  e  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$ , e sejam  $\bar{g}, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  suas respectivas extensões locais a  $\bar{M}$ , então

$$\begin{aligned} A(X, Y) &= \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y \\ &= \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X} + \bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X} - \nabla_X Y - (-\nabla_Y X + \nabla_Y X) \\ &= [\bar{X}, \bar{Y}] - [X, Y] + A(Y, X) = A(Y, X) \end{aligned}$$

pois, em  $M$ ,  $[\bar{X}, \bar{Y}] = [X, Y]$ . Provando, com isso, que  $A$  é simétrica.

Observe também que em  $M$

$$A(gX, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{g}\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_{gX} Y = \bar{g}\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - g\nabla_X Y = gA(X, Y).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} A(X + Y, Z) &= \bar{\nabla}_{\bar{X} + \bar{Y}}\bar{Z} - \nabla_{X+Y} Z \\ &= \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z} - \nabla_X Z + \bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{Z} - \nabla_Y Z \\ &= A(X, Z) + A(Y, Z). \end{aligned}$$

Usando a simetria de  $A$  provamos assim a linearidade na segunda componente.

Portanto  $A$  é bilinear. □

Como  $A$  é bilinear, concluímos, exprimindo  $A$  em um sistema de coordenadas, que o valor  $A(X, Y)(p)$  depende apenas de  $X(p)$  e  $Y(p)$ .

Agora podemos definir a segunda forma fundamental. Sejam  $p \in M$  e  $\eta \in (T_p M)^\perp$ . A aplicação  $H_\eta : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$H_\eta(z, y) = \langle A(z, y), \eta \rangle, \quad z, y \in T_p M$$

que é, pela Proposição (1.3.1), uma forma bilinear simétrica é chamada *segunda forma fundamental de  $x$  em  $p$* .

Às vezes se utiliza também a expressão *segunda forma fundamental* para designar a aplicação  $A$ .

Observe que à aplicação bilinear  $H_\eta$  fica associada uma aplicação linear auto-adjunta  $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$  dada por

$$\langle S_\eta(z), y \rangle = H_\eta(z, y) = \langle A(z, y), \eta \rangle.$$

A proposição seguinte nos dá uma expressão da aplicação linear associada à segunda forma fundamental em termos da derivada covariante.

**Proposição 1.3.2** (Fórmula de Weingarten). *Sejam  $p \in M$ ,  $z \in T_p M$  e  $\eta \in (T_p M)^\perp$ . Seja  $N$  uma extensão local de  $\eta$  normal a  $M$ . Então*

$$S_\eta(z) = -(\bar{\nabla}_z N)^T.$$

*Demonstração.* Dados  $z, y \in T_p M$  denotamos por  $Z$  e  $Y$  as extensões locais, respectivamente, de  $z$  e  $y$  tangentes a  $M$  e por  $\bar{Z}$  e  $\bar{Y}$  as extensões locais de  $Z$  e  $Y$ , respectivamente, tangente a  $\bar{M}$ , então,

$$\begin{aligned} \langle S_\eta(z), y \rangle &= H_\eta(z, y) = \langle A(z, y), \eta \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\bar{Z}} \bar{Y} - \nabla_Z Y, N \rangle(p) \\ &= \langle \bar{\nabla}_{\bar{Z}} \bar{Y}, N \rangle(p) - \langle \nabla_Z Y, N \rangle(p) = \langle \bar{\nabla}_{\bar{Z}} \bar{Y}, N \rangle(p) \\ &= -\langle \bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{Z}} N \rangle(p) = -\langle \bar{Y}, (\bar{\nabla}_{\bar{Z}} N)^T \rangle(p) \\ &= -\langle y, (\bar{\nabla}_{\bar{Z}} N)^T \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,  $S_\eta(z) = -(\bar{\nabla}_z N)^T$ . □

Escolhendo um referencial ortonormal  $\{\eta_1, \dots, \eta_m\}$  de vetores em  $\mathfrak{X}(U)^\perp$ , onde  $U$  é uma vizinhança de  $p \in M$  no qual  $x$  é um mergulho, podemos escrever, em  $p$ ,

$$A(z, y) = \sum_{i=1}^m H_i(z, y) \eta_i \quad z, y \in T_p M,$$

onde  $H_i = H_{\eta_i}$ .

O vetor normal

$$\vec{H}(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m A(E_i, E_i) \quad (1.6)$$

não depende do referencial  $E_i$  escolhido. Fica assim bem definido, em cada  $p \in M$ , um vetor  $\vec{H}(p)$  normal a  $M$  em  $p$ , denominado o *vetor curvatura média* de  $x$  em  $p$ . Além disso, o quadrado da norma da segunda forma fundamental de  $x$  é definido por

$$|A|^2 = \sum_{i,j=1}^k |A(E_i, E_j)|^2. \quad (1.7)$$

A seguir apresentaremos duas equações importantes da teoria das imersões isométricas, a saber, equação de Gauss e Codazzi.

**Teorema 1.3.1.** *As seguintes equações se verificam:*

(a) *Equação de Gauss*

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(X, Y)Z, T \rangle &= \langle R(X, Y)Z, T \rangle - \langle A(Y, T), A(X, Z) \rangle \\ &\quad + \langle A(X, T), A(Y, Z) \rangle; \end{aligned}$$

(b) *Equação de Codazzi*

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, \eta \rangle = (\bar{\nabla}_Y A)(X, Z, \eta) - (\bar{\nabla}_X A)(Y, Z, \eta).$$

Dada uma imersão isométrica, convém indicar por  $\mathfrak{X}(M)^\perp$  o espaço dos campos de vetores normais a  $M$ . A segunda forma fundamental da imersão pode então ser considerada como um

tensor

$$A : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp \rightarrow \mathfrak{D}(M)$$

definido por

$$A(X, Y, \eta) = \langle A(X, Y), \eta \rangle.$$

A definição de derivada covariante se estende a este tipo de tensor de maneira bem natural:

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X A)(Y, Z, \eta) &= X(A(Y, Z, \eta)) - A(\nabla_X Y, Z, \eta) - A(Y, \nabla_X Z, \eta) \\ &\quad - A(Y, Z, \nabla_X^\perp \eta). \end{aligned}$$

O teorema a seguir relaciona a curvatura de  $M$  com a curvatura de  $\bar{M}$  e as segundas formas fundamentais. Se  $x, y \in T_p M \subset T_p \bar{M}$ , são linearmente independentes, indicaremos por  $K(x, y)$  e  $\bar{K}(x, y)$  as curvaturas seccionais de  $M$  e  $\bar{M}$ , respectivamente, no plano gerado por  $x$  e  $y$ .

**Teorema 1.3.2 (Gauss).** *Sejam  $p \in M$  e  $x, y$  vetores ortonormais de  $T_p M$ . Então*

$$K(x, y) - \bar{K}(x, y) = \langle A(x, x), A(y, y) \rangle - |A(x, y)|^2.$$

### 1.3.1 Hipersuperfícies

É conveniente expressar algumas fórmulas vista nesta seção no caso particular em que a imersão isométrica  $x : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$  é dada em codimensão 1. Neste caso  $x(M) \subset \bar{M}$  é chamada de *hipersuperfície*. Às vezes se utiliza também a expressão *hipersuperfície* para designar a imersão isométrica  $x$ .

Sejam  $p \in M$  e  $N \in (T_p M)^\perp$ ,  $|N| = 1$ . Seja  $\{E_1, \dots, E_n\}$  uma base de vetores de  $T_p M$ . Se  $M$  e  $\bar{M}$  são ambas orientáveis e estão orientadas então o vetor  $N$  fica univocamente determinado se exigirmos que sendo  $\{E_1, \dots, E_n\}$  uma base na orientação de  $M$ ,  $\{E_1, \dots, E_n, N\}$  seja uma base na orientação  $\bar{M}$ .

Assim, a segunda forma fundamental será dada por

$$H_N(Z, Y) = \langle A(Z, Y), N \rangle, \quad Z, Y \in T_p M \text{ e } N \in (T_p M)^\perp,$$

e podemos definir o operador  $h : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$h(X, Y) = H_N(X, Y) = \langle A(X, Y), N \rangle, \quad X, Y \in T_p M, \quad (1.8)$$

onde  $N$  é o campo unitário normal a  $M$ .

No caso em que a hipersuperfície está imersa no  $\mathbb{R}^{n+1}$  podemos ver que a equação de Gauss admite uma expressão mais simples. De fato, seja  $\{E_1, \dots, E_n\}$  um referencial geodésico e defina  $h_{ij} := h(E_i, E_j)$ . Usando (1.3), a equação de Gauss se resumirá a

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \bar{R}(E_i, E_j)E_k, E_l \rangle = \langle R(E_i, E_j)E_k, E_l \rangle - \langle A(E_j, E_l), A(E_i, E_k) \rangle \\
&\quad + \langle A(E_i, E_l), A(E_j, E_k) \rangle \\
&= \left\langle \sum_{m=1}^n R_{ijklm} E_m, E_l \right\rangle - \langle A(E_j, E_l), \langle A(E_i, E_k), N \rangle N \rangle \\
&\quad + \langle A(E_i, E_l), \langle A(E_j, E_k), N \rangle N \rangle \\
&= R_{ijkl} - h_{jl}h_{ik} + h_{il}h_{jk}.
\end{aligned}$$

Portanto podemos escrever a equação de Gauss como

$$R_{ijkl} = h_{jl}h_{ik} - h_{il}h_{jk}. \quad (1.9)$$

Em particular, fazendo  $k = i$  e  $l = j$ , obtemos a curvatura seccional em termos da segunda forma,

$$K(E_i, E_j) = h_{jj}h_{ii} - h_{ij}^2.$$

Além disso, se  $\{E_1, \dots, E_n\}$  é uma base que diagonaliza  $A$ , temos que  $h_{ij} = 0$  e, portanto, podemos escrever a equação acima como sendo

$$K(E_i, E_j) = h_{jj}h_{ii}.$$

Em particular, usando (1.4), a curvatura escalar de  $M$  é dada por

$$K(p) = \sum_{i \neq j} h_{ii}h_{jj}.$$

Finalmente, se supusermos que  $\text{tr}A = 0$ , então  $\sum_i h_{ii} = 0$ . Elevando esta equação ao quadrado, obtemos



$$\sum_i h_{ii} + 2 \sum_{i \neq j} h_{ii} h_{jj} = 0,$$

ou seja,

$$|A|^2 = -2K. \tag{1.10}$$

Esta equação será utilizada no capítulo 3 e no capítulo 4 desta dissertação.

---

---

## CAPÍTULO 2

---

# VARIAÇÕES DE ÁREA E DESIGUALDADE DE SIMONS

Neste capítulo, vamos derivar a equação das superfícies mínimas como a equação de Euler-Lagrange do funcional área de gráficos e assim encontrar a fórmula paramétrica da equação das superfícies mínimas (a primeira variação da área). Encontraremos a segunda variação da área e por último a desigualdade de Simons. Tais resultados darão suporte para demonstrarmos os principais resultados desta dissertação. Nossas principais referências foram os livros [15] e [3].

### 2.1 Primeira Variação da Área

Iniciaremos apresentando a definição de variação de uma hipersuperfície imersa em uma variedade Riemanniana.

**Definição 2.1.1.** *Seja  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  uma hipersuperfície. Uma variação de  $x$  é uma aplicação diferenciável*

$$F : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \overline{M}$$

*satisfazendo as seguintes condições:*

1. *A aplicação  $F(\cdot, t) : M \rightarrow \overline{M}$  é uma imersão para todo  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  e  $F(\cdot, 0) = x$ ;*

2.  $F(\cdot, t)|_{\partial M} = x|_{\partial M}$  para todo  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

O campo de vetores  $T = dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\Big|_{t=0}$  em  $M$  é chamado de *campo variacional* associado à variação  $F$ .

O funcional área  $\mathcal{A} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  associado à variação  $F$  é dado por

$$\mathcal{A}(t) = \int_M dM_t, \quad (2.1)$$

onde  $dM_t$  denota o elemento de volume da métrica induzida em  $M$  por  $F_t$ . Note que se a orientação de  $M$  coincide com aquela induzida por  $\bar{M}$ , então  $dM_0 = dM$  e  $\mathcal{A}(0) = \mathcal{A}$ .

O lema abaixo é um resultado básico de espaços métricos que será útil no próximo teorema.

**Lema 2.1.1.** *Sejam  $M$  compacta e  $f : M \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ . Então*

$$\frac{d}{dt} \left( \int_M f(x, t) dM \right) \Big|_{t=t_0} = \int_M \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) dM,$$

onde  $t_0 \in [a, b]$ .

*Demonstração.* Vide [17], p.144. □

Tomando em  $M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  a métrica produto e  $\{E_1, \dots, E_n\}$  um referencial móvel em uma vizinhança de  $p \in M$ , temos que, para todo  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $\varphi : M \rightarrow M \times \{t\}$  dado por  $\varphi_t(p) = (t, p)$  é uma isometria. Sejam  $F : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \bar{M}$  uma variação de  $x$  e  $\Phi_t$  o fluxo local de  $dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ . Logo,  $F_t \circ \varphi_t = \Phi_t \circ x$  implica  $dF_t \circ d\varphi_t = d\Phi_t \circ dx$ . Sendo  $E_k = E_k(t, p) = (d\varphi)_p E_k$  temos, pela proposição 5.4, p. 30 de [5] a qual diz que se  $V, W \in \mathfrak{X}(M)$  e  $\psi$  é um fluxo local de  $V$  numa vizinhança de  $M$ , então

$$[V, W](p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [d\psi_t^{-1}(W_{\psi_t p}) - W_p],$$

que

$$[T, \tilde{E}_k] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [d\Phi_t^{-1} \tilde{E}_k(\Phi_t(p)) - \tilde{E}_k(0, p)], \quad (2.2)$$

onde  $T = dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$  e  $\tilde{E}_k = dF_t \circ d\varphi_t(E_k)$ . Como  $dF_t \circ d\varphi_t = d\Phi_t \circ dx$  então

$$\begin{aligned}
[T, \tilde{E}_k] &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [d\Phi_t^{-1} d\Phi_t \circ dx(E_k(p)) - E_k(p)] \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [dx(E_k(p)) - E_k(p)] \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [E_k(p) - E_k(p)] = 0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$[T, \tilde{E}_k] = 0. \quad (2.3)$$

Segue da simetria da conexão  $\tilde{\nabla}$  que

$$\langle [T, \tilde{E}_k], \tilde{E}_k \rangle = \langle \tilde{\nabla}_T \tilde{E}_k, \tilde{E}_k \rangle - \langle \tilde{\nabla}_{\tilde{E}_k} T, \tilde{E}_k \rangle.$$

Como  $[T, \tilde{E}_k] = 0$  então

$$\langle \tilde{\nabla}_T \tilde{E}_k, \tilde{E}_k \rangle = \langle \tilde{\nabla}_{\tilde{E}_k} T, \tilde{E}_k \rangle. \quad (2.4)$$

Agora estamos aptos a demonstrar o principal resultado desta seção, a saber, a primeira variação da área.

**Teorema 2.1.1.** *Seja  $x : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$  uma hipersuperfície com vetor curvatura média  $\vec{H}$ . Se  $F : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \bar{M}^{n+1}$  é uma variação de  $x$ , então*

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt}(0) = -n \int_M \langle T, \vec{H} \rangle dM,$$

onde  $T = dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ .

*Demonstração.* Sejam  $p \in M$  e  $\{E_1, \dots, E_n\}$  um referencial móvel em uma vizinhança de  $p \in M$ , geodésico em  $p$  e seja ainda  $E_i(t) = dF_t(E_i)$  com  $i = 1, \dots, n$ . A métrica induzida por  $F_t = F(\cdot, t)$  em  $\bar{M}^{n+1}$  é dada, neste sistema de coordenadas, por  $g_{ij}(t) = \langle E_i(t), E_j(t) \rangle$ .

Seja também  $v_t = \sqrt{\det(g_{ij}(t))\det(g^{ij}(0))}$ , onde  $g^{ij}$  denota a matriz inversa de  $g_{ij}$ . Então,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(t) &= \int dM_t = \int \sqrt{\det(g_{ij}(t))} dx_1 \dots dx_n \\ &= \int \sqrt{\det(g_{ij}(t))\det(g^{ij}(0))} \sqrt{\det(g_{ij}(0))} dx_1 \dots dx_n = \int v_t dM.\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{A}(t) = \int_M v_t dM.$$

Assim, pelo Lema (2.1.1), temos que

$$\left. \frac{d\mathcal{A}}{dt} \right|_{t=0} = \int_M \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (v_t) dM.$$

Observe que, sendo  $A$  a segunda forma fundamental de  $M$  e  $N$  o campo normal unitário a  $M$  em uma vizinhança de  $p \in M$ , então

$$\langle A(X, Y), N \rangle = \langle \nabla_X Y, N \rangle = - \langle Y, \nabla_X N \rangle, \quad (2.5)$$

pois  $0 = X \langle Y, N \rangle = \langle \nabla_X Y, N \rangle + \langle Y, \nabla_X N \rangle$ . Além disso, temos também de (1.1) que

$$\operatorname{div}(X) = \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{E_i} X, E_j \rangle \langle E_i, E_j \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle. \quad (2.6)$$

Usando no Lema (A.0.3), ver apêndice A,  $G(t) = g_{ij}(t)g^{ij}(0)$  temos

$$\begin{aligned}\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (v_t) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\sqrt{\det(g_{ij}(t)g^{ij}(0))}) = \frac{1}{2} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \frac{(\det(g_{ij}(t)g^{ij}(0)))}{\sqrt{\det(g_{ij}(0)g^{ij}(0))}} \\ &= \frac{1}{2} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\det(g_{ij}(t)g^{ij}(0))) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(g'_{ij}(0)g^{ij}(0)).\end{aligned}$$

Podemos escolher o referencial  $\{E_1, \dots, E_n\}$  ortonormal na métrica induzida por  $F_0$  e, no ponto  $p$ ,  $\nabla_{E_i} E_j = 0$  para todo  $i, j = 1, \dots, n$ . Com isso  $g_{ij}(0) = \langle E_i(0), E_j(0) \rangle = \langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}$ . Portanto,  $g^{ij}(0) = \delta_{ij}$ .

Assim,

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (v_t) &= \text{tr}(g'_{ij}(0)g^{ij}(0)) = \text{tr}(g'_{ij}(0)) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \langle E_i, E_i \rangle \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\langle \nabla_T E_i, E_i \rangle + \langle E_i, \nabla_T E_i \rangle) \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_T E_i, E_i \rangle.
\end{aligned}$$

Logo, usando (2.4), temos que

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (v_t) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_T E_i, E_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} T, E_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} (T^T + T^N), E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} T^T, E_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} T^N, E_i \rangle.
\end{aligned}$$

Aplicando (2.5) , (2.6) e (1.6) nesta última equação e usando o fato de  $T^N = \langle T, N \rangle N$  encontramos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(v_t) &= \operatorname{div}(T^T) + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \langle T, N \rangle N, E_i \rangle \\
&= \operatorname{div}(T^T) + \sum_{i=1}^n \langle T, N \rangle \langle \nabla_{E_i} N, E_i \rangle \\
&= \operatorname{div}(T^T) + \left\langle T, \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} N, E_i \rangle N \right\rangle \\
&= \operatorname{div}(T^T) + \left\langle T, - \sum_{i=1}^n \langle A(E_i, E_i), N \rangle N \right\rangle \\
&= \operatorname{div}(T^T) + \left\langle T, - \sum_{i=1}^n A(E_i, E_i) \right\rangle \\
&= \operatorname{div}(T^T) - n \langle T, \vec{H} \rangle.
\end{aligned}$$

Logo, pelo teorema da divergência, obtemos

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt}\Big|_{t=0} = -n \int_M \langle T, \vec{H} \rangle dM + \int_M \operatorname{div}(T^T) dM = -n \int_M \langle T, \vec{H} \rangle dM.$$

□

Tomando  $\vec{H} = HN$  e  $f = \langle T, N \rangle$ , observamos que a primeira variação da área se resume a

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt}(0) = -n \int_M \langle T, \vec{H} \rangle dM = -n \int_M Hf dM.$$

Portanto  $M$  é um ponto crítico para o funcional área se, e somente se, a curvatura média  $H$  é identicamente nula.

**Definição 2.1.2.** Uma hipersuperfície  $M^n \subset \overline{M}^{n+1}$  é dita mínima, se a sua curvatura média é identicamente nula.

## 2.2 Segunda Variação da Área

Para estudarmos a segunda variação da área de uma hipersuperfície mínima, observamos primeiro que, sendo  $H_t$  a curvatura média de  $F_t$  e  $f_t = \langle T, N_t \rangle$ , onde  $N_t$  é o campo unitário normal a  $F_t$ , temos, do Teorema (2.1.1), que

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = -n \int_M H_t f_t dM_t.$$

Daí, como  $H_0 = H = 0$ ,  $f_0 = f$  e  $dM_0 = dM$ , temos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}''(0) &= -n \left[ \int_M \left( \frac{\partial}{\partial t} H_t \right) \Big|_{t=0} f_0 dM_0 + \int_M H_0 \left( \frac{\partial f_t}{\partial t} dM_t \right) \Big|_{t=0} \right] \\ &= -n \int_M \left( \frac{\partial}{\partial t} H_t \right) \Big|_{t=0} f dM. \end{aligned} \quad (2.7)$$

**Teorema 2.2.1.** *Seja  $x : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$  uma imersão mínima e  $F$  uma variação de  $x$ . Então  $\mathcal{A}''(0)$  dado por*

$$\mathcal{A}''(0)(f) = \int_M \{-f\Delta f - (\text{Ric}(N, N) + |A|^2)f^2\} dM \quad (2.8)$$

*depende somente de  $f$ .*

*Demonstração.* De (2.7) observamos que, para demonstrar o teorema, basta calcular  $n \left( \frac{\partial}{\partial t} H_t \right) \Big|_{t=0}$ . Para isso, sejam  $p \in M$  e  $\{E_1, \dots, E_n\}$  um referencial móvel em uma vizinhança de  $p \in M$ , geodésico em  $p$ . Sejam ainda  $E_i(t) = dF_t(E_i)$  e  $g_{ij}(t) = \langle E_i(t), E_j(t) \rangle$ . Se  $\{\tilde{E}_1(t), \dots, \tilde{E}_n(t)\}$  denota um referencial ortonormal em uma vizinhança de  $F(p, t)$  contida em  $F_t(M)$ , com  $E_i(t) = \sum_k a_{ik}(t) \tilde{E}_k(t)$  então

$$\tilde{E}_i(t) = \sum_k a^{ik}(t) E_k(t).$$

Note que



$$g_{ij}(t) = \langle E_i(t), E_j(t) \rangle = \sum_k a_{ik}(t)a_{jk}(t) = (BB^T)_{ij},$$

onde  $B = (a_{ij})$  e  $B^{-1} = (a^{ij})$ .

Sendo  $A_{N_t}$  a segunda forma fundamental na direção normal  $N_t$  e  $(g_{ij})^{-1} = g^{ij}$  então, fixando  $t$ , temos

$$nH_t = \langle nH_t N_t, N_t \rangle = \langle n\vec{H}_t, N_t \rangle = \sum_i \langle A_{N_t}(\tilde{E}_i(t), \tilde{E}_i(t)), N_t \rangle.$$

Assim, usando (2.5),

$$\begin{aligned} nH_t &= \sum_i \langle \tilde{\nabla}_{\tilde{E}_i(t)} \tilde{E}_i(t), N_t \rangle = \sum_{i,k,l} \langle \tilde{\nabla}_{a^{ik}E_k(t)} a^{il} E_l(t), N_t \rangle \\ &= \sum_{i,k,l} a^{ik} a^{il} \langle \tilde{\nabla}_{E_k(t)} E_l(t), N_t \rangle = \sum_{k,l} ((B^{-1})^T B^{-1})_{kl} \langle \tilde{\nabla}_{E_k(t)} E_l(t), N_t \rangle \\ &= \sum_{k,l} ((BB^T)^{-1})_{kl} \langle \tilde{\nabla}_{E_k(t)} E_l(t), N_t \rangle = \sum_{k,l} g^{kl}(t) \langle \tilde{\nabla}_{E_k(t)} E_l(t), N_t \rangle. \end{aligned}$$

Como o referencial  $\{E_1(t), \dots, E_n(t)\}$  é geodésico em  $p$  temos que  $g^{kl}(0) = \delta_{kl}$  e assim

$$\begin{aligned} n \frac{dH_t}{dt} \Big|_{t=0} &= \sum_{k,l} \frac{dg^{kl}}{dt}(0) \langle \tilde{\nabla}_{E_k} E_l, N \rangle + \sum_{k,l} g^{kl}(0) T \langle \tilde{\nabla}_{E_k(t)} E_l(t), N_t \rangle \Big|_{t=0} \\ &= \sum_{k,l} \frac{dg^{kl}}{dt}(0) \langle \tilde{\nabla}_{E_k} E_l, N \rangle + \sum_{k,l} \delta^{kl} T \langle \tilde{\nabla}_{E_k(t)} E_l(t), N_t \rangle \Big|_{t=0} \\ &= \sum_{k,l} \frac{dg^{kl}}{dt}(0) \langle \tilde{\nabla}_{E_k} E_l, N \rangle + \sum_k T \langle \tilde{\nabla}_{E_k(t)} E_k(t), N_t \rangle \Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Com o intuito de simplificar os passos da demonstração, calcularemos em separado o primeiro e o segundo somatório em  $n \frac{dH_t}{dt} \Big|_{t=0}$ .

Para calcularmos o primeiro somatório, veja que

$$\sum_j g^{kj}(t)g_{jl}(t) = \delta_{kl} \Rightarrow \sum_j \frac{dg^{kj}}{dt}(0)g_{jl}(0) + \sum_j g^{kj}(0)\frac{dg_{jl}}{dt}(0) = 0 \Rightarrow \frac{dg^{kl}}{dt}(0) = -\frac{dg_{jl}}{dt}(0).$$

Como  $g_{kl}(t) = \langle E_k(t), E_l(t) \rangle$  segue, de (2.4), que

$$\begin{aligned} -\frac{dg_{jl}}{dt}(0) &= -T \langle E_k(t), E_l(t) \rangle \Big|_{t=0} \\ &= -\left\langle \tilde{\nabla}_T E_k(t), E_l(t) \right\rangle \Big|_{t=0} - \left\langle E_k(t), \tilde{\nabla}_T E_l(t) \right\rangle \Big|_{t=0} \\ &= -\left\langle \tilde{\nabla}_{E_k} T, E_l \right\rangle - \left\langle E_k, \tilde{\nabla}_{E_l} T \right\rangle. \end{aligned}$$

Logo de (2.5) segue que

$$\begin{aligned} \sum_{k,l} \frac{dg^{kl}}{dt}(0) \left\langle \tilde{\nabla}_{E_k(t)} E_l(t), N \right\rangle &= -2 \sum_{k,l} \left\langle \tilde{\nabla}_{E_k} T, E_l \right\rangle \left\langle \tilde{\nabla}_{E_k(t)} E_l(t), N \right\rangle \\ &= -2 \sum_{k,l} \left( \left\langle \tilde{\nabla}_{E_k} T^T, E_l \right\rangle + \left\langle \tilde{\nabla}_{E_k} T^N, E_l \right\rangle \right) \langle A(E_k, E_l), N \rangle \\ &= -2 \sum_{k,l} \left( \left\langle \tilde{\nabla}_{E_k} T^T, E_l \right\rangle + \left\langle \tilde{\nabla}_{E_k} fN, E_l \right\rangle \right) \langle A(E_k, E_l), N \rangle \\ &= -2 \sum_{k,l} \left\langle \tilde{\nabla}_{E_k} T^T, E_l \right\rangle \langle A(E_k, E_l), N \rangle \\ &\quad -2 \sum_{k,l} \left( \left\langle f \tilde{\nabla}_{E_k} N, E_l \right\rangle + \langle E_k(f)N, E_l \rangle \right) \langle A(E_k, E_l), N \rangle \\ &= -2 \sum_{k,l} \left\langle \tilde{\nabla}_{E_k} T^T, E_l \right\rangle \langle A(E_k, E_l), N \rangle \\ &\quad -2f \sum_{k,l} \left\langle \tilde{\nabla}_{E_k} N, E_l \right\rangle \langle A(E_k, E_l), N \rangle \\ &= 2 \sum_{k,l} \left\langle \tilde{\nabla}_{E_k} T^T, E_l \right\rangle \left\langle \tilde{\nabla}_{E_k} N, E_l \right\rangle + 2f \sum_{k,l} \langle A(E_k, E_l), N \rangle^2 \\ &= 2 \sum_k \left\langle \tilde{\nabla}_{E_k} T^T, (\tilde{\nabla}_{E_k} N)^T \right\rangle + 2f |A|^2, \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos o fato de

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1} \langle A(E_i, E_j), N \rangle^2 &= \sum_{i,j=1} \langle A(E_i, E_j), \langle A(E_i, E_j), N \rangle N \rangle \\ &= \sum_{i,j=1} \langle A(E_i, E_j), A(E_i, E_j) \rangle = |A|^2. \end{aligned}$$

Observando que  $[T, E_k(t)] = 0$ , e daí  $\tilde{\nabla}_{E_k} T = \tilde{\nabla}_T E_k$ , temos para o segundo somatório de  $n \frac{dH_t}{dt} \Big|_{t=0}$  que

$$\begin{aligned} \sum_k T \langle \tilde{\nabla}_{E_k(t)} E_k(t), N_t \rangle \Big|_{t=0} &= \sum_k \langle \tilde{\nabla}_T \tilde{\nabla}_{E_k(t)} E_k(t), N_t \rangle \Big|_{t=0} + \sum_k \langle \tilde{\nabla}_{E_k(t)} E_k(t), \tilde{\nabla}_T N_t \rangle \Big|_{t=0} \\ &= \sum_k \langle \tilde{\nabla}_T \tilde{\nabla}_{E_k(t)} E_k(t), N_t \rangle \Big|_{t=0} - \sum_k \langle \tilde{\nabla}_{E_k(t)} \tilde{\nabla}_T E_k(t), N_t \rangle \Big|_{t=0} \\ &\quad + \sum_k \langle \tilde{\nabla}_{E_k(t)} \tilde{\nabla}_T E_k(t), N_t \rangle \Big|_{t=0} + \sum_k \langle \tilde{\nabla}_{[T, E_k(t)]} E_k(t), N_t \rangle \Big|_{t=0} \\ &\quad + \sum_k \langle \tilde{\nabla}_{E_k(t)} E_k(t), \tilde{\nabla}_T N_t \rangle \Big|_{t=0} \\ &= \sum_k \langle \tilde{\nabla}_T \tilde{\nabla}_{E_k(t)} E_k(t) - \tilde{\nabla}_{E_k(t)} \tilde{\nabla}_T E_k(t) + \tilde{\nabla}_{[T, E_k(t)]} E_k(t), N_t \rangle \Big|_{t=0} \\ &\quad + \sum_k \langle \tilde{\nabla}_{E_k(t)} \tilde{\nabla}_T E_k(t), N_t \rangle \Big|_{t=0} + \sum_k \langle \tilde{\nabla}_{E_k(t)} E_k(t), \tilde{\nabla}_T N_t \rangle \Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Assim, usando a definição de curvatura e de curvatura de Ricci, temos

$$\begin{aligned} \sum_k T \langle \tilde{\nabla}_{E_k(t)} E_k(t), N_t \rangle \Big|_{t=0} &= \sum_k \langle \bar{R}(E_k, T) E_k, N_t \rangle \Big|_{t=0} + \sum_k \langle \tilde{\nabla}_{E_k(t)} \tilde{\nabla}_T E_k(t), N_t \rangle \Big|_{t=0} \\ &\quad + \sum_k \langle \tilde{\nabla}_{E_k(t)} E_k(t), \tilde{\nabla}_T N_t \rangle \Big|_{t=0} = \bar{Ric}(T, N) \\ &\quad + \sum_k \langle \tilde{\nabla}_{E_k(t)} \tilde{\nabla}_T E_k(t), N_t \rangle \Big|_{t=0} + \sum_k \langle \tilde{\nabla}_{E_k(t)} E_k(t), \tilde{\nabla}_T N_t \rangle \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \overline{Ric}(T, N) + \sum_k \left( E_k \langle \tilde{\nabla}_T E_k, N \rangle - \langle \tilde{\nabla}_{E_k} T, \tilde{\nabla}_{E_k} N \rangle \right) \\
&\quad + \sum_k \langle \tilde{\nabla}_{E_k} E_k, N \rangle \langle N, \tilde{\nabla}_{E_k} N \rangle \\
&= \overline{Ric}(T, N) + \sum_k E_k E_k \langle T, N \rangle \\
&\quad - \sum_k E_k \langle T, \tilde{\nabla}_{E_k} N \rangle - \sum_k \langle \tilde{\nabla}_{E_k} T, \tilde{\nabla}_{E_k} N \rangle,
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de  $\{E_1, \dots, E_n\}$  ser um referencial geodésico em  $p$ . Mais precisamente,

$$\langle \tilde{\nabla}_{E_k} E_k, \tilde{\nabla}_T N \rangle = \langle \tilde{\nabla}_{E_k} E_k, N \rangle \langle N, \tilde{\nabla}_T N \rangle = 0.$$

Agora, como  $T = T^T + T^N = T^T + fN$ ,  $\langle T, N \rangle = f$  e  $\langle N, \tilde{\nabla}_{E_k} N \rangle = 0$ , temos

$$\begin{aligned}
\sum_k T \langle \tilde{\nabla}_{E_k(t)} E_k(t), N_t \rangle \Big|_{t=0} &= \overline{Ric}(T, N) + \Delta f - \sum_k E_k \langle T^T, \tilde{\nabla}_{E_k} N \rangle - \sum_k E_k \langle fN, \tilde{\nabla}_{E_k} N \rangle \\
&\quad - \sum_k \langle \tilde{\nabla}_{E_k} fN, \tilde{\nabla}_{E_k} N \rangle - \sum_k \langle \tilde{\nabla}_{E_k} T^T, \tilde{\nabla}_{E_k} N \rangle \\
&= \overline{Ric}(T, N) + \Delta f - \sum_k E_k \left( f \langle N, \tilde{\nabla}_{E_k} N \rangle \right) \\
&\quad - f \sum_k \langle \tilde{\nabla}_{E_k} N, \tilde{\nabla}_{E_k} N \rangle - \sum_k E_k (f) \langle N, \tilde{\nabla}_{E_k} N \rangle \\
&\quad - \sum_k \left( E_k \langle T^T, \tilde{\nabla}_{E_k} N \rangle + \langle \tilde{\nabla}_{E_k} T^T, \tilde{\nabla}_{E_k} N \rangle \right) \\
&= \overline{Ric}(T, N) + \Delta f - f \sum_k \|\tilde{\nabla}_{E_k} N\|^2 - 2 \sum_k \langle \tilde{\nabla}_{E_k} T^T, \tilde{\nabla}_{E_k} N \rangle \\
&\quad - \sum_k \langle T^T, \tilde{\nabla}_{E_k} \tilde{\nabla}_{E_k} N \rangle. \tag{2.9}
\end{aligned}$$

Como  $\langle E_k, N \rangle = 0$  então

$$\langle \tilde{\nabla}_{E_k} E_l, N \rangle = - \langle \tilde{\nabla}_{E_k} N, E_l \rangle \tag{2.10}$$

e, portanto,

$$\sum_k \left\| \tilde{\nabla}_{E_k} N \right\|^2 = \sum_{k,l} \left\langle \tilde{\nabla}_{E_k} N, E_l \right\rangle^2 = \sum_{k,l} \left\langle \tilde{\nabla}_{E_k} E_l, N \right\rangle^2 = \sum_{k,l} \left\langle A(E_k, E_l), N \right\rangle^2 = |A|^2. \quad (2.11)$$

Escrevendo  $T = \sum_l \beta_l E_l + fN$  temos

$$\begin{aligned} \overline{Ric}(T, N) &= - \sum_l \beta_l \overline{Ric}(N, E_l) + f \overline{Ric}(N, N) \\ &= - \sum_{k,l} \beta_l \langle \bar{R}(E_k, E_l) E_k, N \rangle + f \overline{Ric}(N, N). \end{aligned}$$

Visto que  $[E_k, E_l] = 0$  e o referencial é ortonormal e geodésico em  $p$ , segue que

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(E_k, E_l) E_k, N \rangle_p &= \left\langle \tilde{\nabla}_{E_l} \tilde{\nabla}_{E_k} E_k - \tilde{\nabla}_{E_k} \tilde{\nabla}_{E_l} E_k, N \right\rangle_p \\ &= E_l \left\langle \tilde{\nabla}_{E_k} E_k, N \right\rangle_p - \left\langle \tilde{\nabla}_{E_k} E_k, \tilde{\nabla}_{E_l} N \right\rangle_p \\ &\quad - E_k \left\langle \tilde{\nabla}_{E_l} E_k, N \right\rangle_p + \left\langle \tilde{\nabla}_{E_l} E_k, \tilde{\nabla}_{E_l} N \right\rangle_p \\ &= -E_l \left\langle E_k, \tilde{\nabla}_{E_k} N \right\rangle_p + E_k \left\langle E_k, \tilde{\nabla}_{E_l} N \right\rangle_p, \end{aligned}$$

onde na última igualdade estamos usando (2.10) e o fato de que  $\tilde{\nabla}_{E_l} E_k \in (T_p M)^\perp$  e  $\tilde{\nabla}_{E_l} N \in T_p M$  para todo  $k, l = 1, \dots, n$ .

Logo, de (1.8) e (2.5) temos

$$\langle \bar{R}(E_k, E_l) E_k, N \rangle_p = -E_l(h_{kk}) + E_k(h_{kl}),$$

onde  $h_{ij} = h(E_i, E_j) = \left\langle E_k, \tilde{\nabla}_{E_l} N \right\rangle_p$  é a segunda forma fundamental escalar de  $\bar{M}$ . Sendo assim,

$$\overline{Ric}(T, N)_p = \sum_{k,l} \beta_l E_l(h_{kk}) - \sum_{k,l} \beta_l E_k(h_{kl}) + f \overline{Ric}(N, N)_p.$$

Veja também que,

$$\begin{aligned}
\beta_l \langle \tilde{\nabla}_{E_k} \tilde{\nabla}_{E_k} N, E_l \rangle &= \beta_l \langle \nabla_{E_k} \tilde{\nabla}_{E_k} N, E_l \rangle + \beta_l \langle (\tilde{\nabla}_{E_k} \tilde{\nabla}_{E_k} N)^N, E_l \rangle \\
&= \beta_l \langle \nabla_{E_k} \tilde{\nabla}_{E_k} N, E_l \rangle = \beta_l \left\langle \nabla_{E_k} \left( \sum_j \langle \tilde{\nabla}_{E_k} N, E_j \rangle E_j \right), E_l \right\rangle \\
&= -\beta_l \sum_j \langle \nabla_{E_k} (\langle \tilde{\nabla}_{E_k} E_j, N \rangle E_j), E_l \rangle = -\beta_l \sum_j \langle \nabla_{E_k} h_{kj} E_j, E_l \rangle \\
&= -\beta_l \sum_j \{ E_k(h_{kj}) \delta_{lj} + h_{kj} \langle \nabla_{E_k} E_j, E_l \rangle \} \\
&= -\beta_l E_k(h_{kl}),
\end{aligned}$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
-\sum_{k,l} \beta_l E_k(h_{kl}) &= \sum_{k,l} \beta_l \langle \tilde{\nabla}_{E_k} \tilde{\nabla}_{E_k} N, E_l \rangle \\
&= \sum_k \left\langle \sum_l \beta_l E_l, \tilde{\nabla}_{E_k} \tilde{\nabla}_{E_k} N \right\rangle = \sum_k \langle T^T, \tilde{\nabla}_{E_k} \tilde{\nabla}_{E_k} N \rangle.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\overline{Ric}(T, N)_p = \sum_{k,l} \beta_l E_l(h_{kk}) + \sum_k \langle T^T, \tilde{\nabla}_{E_k} \tilde{\nabla}_{E_k} N \rangle + f \overline{Ric}(N, N)_p. \quad (2.12)$$

Substituindo (2.11) e (2.12) em (2.9), obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_k T \langle \tilde{\nabla}_{E_k(t)} E_k(t), N_t \rangle \Big|_{t=0} &= \sum_{k,l} \beta_l E_l(h_{kk}) + \sum_k \langle T^T, \tilde{\nabla}_{E_k} \tilde{\nabla}_{E_k} N \rangle + f \overline{Ric}(N, N)_p \\
&\quad + \Delta f - f|A|^2 - 2 \sum_k \langle \tilde{\nabla}_{E_k} T^T, \tilde{\nabla}_{E_k} N \rangle - \sum_k \langle T^T, \tilde{\nabla}_{E_k} \tilde{\nabla}_{E_k} N \rangle \\
&= f \overline{Ric}(N, N)_p + \Delta f - f|A|^2 - 2 \sum_k \langle \tilde{\nabla}_{E_k} T^T, \tilde{\nabla}_{E_k} N \rangle,
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de

$$\sum_{k,l} \beta_l E_l(h_{kk}) = \left( \sum_l \beta_l E_l \right) \left( \sum_k h_{kk} \right) = T^T(nH) = T^T(0) = 0.$$

Agora, depois de termos calculado o primeiro e o segundo somatório em  $n \frac{dH_t}{dt} \Big|_{t=0}$ , obtemos que

$$\begin{aligned} n \frac{dH_t}{dt} \Big|_{t=0} &= 2 \sum_k \langle \tilde{\nabla}_{E_k} T^T, (\tilde{\nabla}_{E_k} N)^T \rangle + 2f|A|^2 + f \overline{Ric}(N, N)_p \\ &\quad + \Delta f - f|A|^2 - 2 \sum_k \langle \tilde{\nabla}_{E_k} T^T, \tilde{\nabla}_{E_k} N \rangle \\ &= f \overline{Ric}(N, N)_p + \Delta f + f|A|^2, \end{aligned}$$

a última igualdade vem do fato de que  $\langle \tilde{\nabla}_{E_k} N, N \rangle = 0 (\Leftrightarrow (\tilde{\nabla}_{E_k} N)^T = \tilde{\nabla}_{E_k} N)$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}''(0)(f) &= -n \int_M \left( \frac{\partial}{\partial t} H_t \right) \Big|_{t=0} f dM \\ &= \int_M \{-f \Delta f - (Ric(N, N) + |A|^2) f^2\} dM. \end{aligned}$$

□

Sejam  $M$  uma superfície mínima e  $D \subset M$  um domínio limitado de  $M$ . Dizemos que  $D$  é *estável* se  $\mathcal{A}''(0)(f) > 0$ , para toda variação normal de  $M$  que fixa o bordo  $\partial D$  de  $D$ . Isto significa que  $D$  é um ponto (crítico da área) de mínimo relativo para toda variação normal.

Se  $M$  não é estável, então existe uma função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  com  $f|_{\partial M} = 0$  tal que  $\mathcal{A}''(0)(f) \leq 0$ . Se a desigualdade for estrita, então  $M$  é chamada de *instável*. Agora observe que a equação (2.8) se escreve da seguinte forma

$$\mathcal{A}''(0)(f) = - \int_M f L f dM,$$

onde  $L : C_0^\infty \rightarrow C_0^\infty(M)$  é o operador linear dado por  $Lf = \Delta f + (Ric(N, N) + |A|^2)f$ . Por simplicidade denotaremos por  $Q$  forma quadrática associada ao operador  $L$ , ou seja,

$$Q(f) = - \int_M f L f dM.$$

A aplicação linear  $L$  é chamada de *operador de estabilidade* ou *operador de Jacobi*.

Define-se o índice da forma quadrática  $Q$  como a dimensão do maior subespaço de  $C_0^\infty(M)$  no qual  $Q$  é negativa. O índice de  $Q$  nos fornece uma medida de não estabilidade de  $M$ . Tal índice é chamado de *índice de Morse*,  $Ind(M)$  da superfície  $M$ .

Seja  $\lambda$  dado por  $Lf + \lambda f = 0$  para algum  $f \in C_0^\infty(M)$ , isto é,  $\lambda$  é um autovalor de  $L$ . Observe que o operador  $L$  é diagonalizável por uma sequência crescente  $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  de autovalores reais de  $L$ ,

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \nearrow +\infty, \quad (2.13)$$

cujos auto-espacos associados tem dimensão finita. Dessa forma podemos escrever

$$Q(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (f_i, f_i),$$

onde  $f_i$  é uma autofunção correspondente ao autovalor  $\lambda_i$ .

Decorre daí que  $\text{Ind}(M)$  é o número de autovalores negativos (contados com multiplicidade) do operador  $L$ . Uma consequência de (2.13) é que o índice de uma superfície mínima compacta com bordo é finito.

Observe que apesar de  $L$  e  $Q$  serem definidas nos espacos das funções diferenciáveis por partes em  $M$  que se anulam no bordo, eles podem ser expandidos para espacos vetoriais de funções diferenciáveis em quase todos os pontos de  $M$ , isto é, exceto em um conjunto de medida nula.

Para finalizar essa seção, mostraremos, agora, uma desigualdade que será de fundamental importância em argumentos vindouros.

**Lema 2.2.1** (Desigualdade da Estabilidade). *Seja  $M^n \subset \overline{M}^{n+1}$  uma hipersuperfície mínima estável. Então para qualquer função Lipschitz  $\eta$  com suporte compacto*

$$\int_M (|A|^2 + \text{Ric}_{\overline{M}}(N, N)) \eta^2 dM \leq \int_M |\nabla_M \eta|^2 dM.$$

*Demonstração.* Como  $M$  é estável então

$$0 \leq - \int_M \eta L \eta dM = - \int_M (\eta \Delta_M \eta + (|A|^2 + \text{Ric}_{\overline{M}}(N, N)) \eta^2) dM.$$

Assim, vendo que  $\int_M \eta \Delta_M \eta dM = - \int_M |\nabla_M \eta|^2 dM$ , temos que

$$\int_M (|A|^2 + \text{Ric}_{\overline{M}}(N, N)) \eta^2 dM \leq \int_M |\nabla_M \eta|^2 dM.$$

□



Observe que se estivermos em um ambiente onde a curvatura de Ricci é identicamente nula, então a desigualdade acima se resume a

$$\int_M |A|^2 \eta^2 dM \leq \int_M |\nabla_M \eta|^2 dM. \quad (2.14)$$

## 2.3 Desigualdade de Simons

Nesta seção, vamos obter uma desigualdade que envolve o Laplaciano do quadrado da norma da segunda forma fundamental de uma hipersuperfície mínima  $M$  no  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Esta desigualdade foi provada por J. Simons em [21] e afirma, em sua forma mais geral, que para uma hipersuperfície mínima  $M^n \subset \overline{M}^{n+1}$  a

$$\Delta_M |A|^2 \geq -C(1 + |A|^2)^2,$$

onde  $C$  depende apenas de  $\overline{M}$ .

Seja  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície mínima e sejam  $\{E_1, \dots, E_n\}$  um referencial ortonormal em uma vizinhança de  $p \in M$  e  $N$  o vetor unitário normal a  $M$ . Já sabemos de (2.5) que

$$h(X, Y) = \langle A(X, Y), N \rangle = \langle \tilde{\nabla}_X Y, N \rangle = -\langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle.$$

Seja  $h_{ij} := h(E_i, E_j)$ . Logo  $h_{ij} = -\langle \tilde{\nabla}_{E_i} N, E_j \rangle$  e definimos  $h_{ij,k} := \nabla_{E_k} h_{ij}$ . Observe que estamos tomando  $\tilde{\nabla}$  e  $\nabla$  como as conexões do  $\mathbb{R}^{n+1}$  e  $M$ , respectivamente.

**Lema 2.3.1.**  $h_{ij}$  como definido acima é simétrico, isto é,  $h_{ij} = h_{ji}$ .

*Demonstração.* Como  $\tilde{\nabla}_{E_i} E_j = \tilde{\nabla}_{E_j} E_i$  então

$$h_{ij} = h(E_i, E_j) = \langle \tilde{\nabla}_{E_i} E_j, N \rangle = \langle \tilde{\nabla}_{E_j} E_i, N \rangle = h_{ji}.$$

□

Observe que  $h$  é um tensor simétrico de ordem 2.

**Lema 2.3.2.**  $h_{ij}$  é simétrico com relação ao primeiro e terceiro índice, isto é,  $h_{ij,k} = h_{k,j,i}$ .

*Demonstração.* Note que

$$\begin{aligned}
h_{ij,k} &= \nabla_{E_k} h(E_i, E_j) = E_k h(E_i, E_j) - h(\nabla_{E_k} E_i, E_j) - h(E_i, \nabla_{E_k} E_j) \\
&= -E_k \langle \tilde{\nabla}_{E_i} N, E_j \rangle + \langle \tilde{\nabla}_{\nabla_{E_k} E_i} N, E_j \rangle + \langle \tilde{\nabla}_{E_i} N, \nabla_{E_k} E_j \rangle \\
&= -\langle \tilde{\nabla}_{E_k} \tilde{\nabla}_{E_i} N, E_j \rangle - \langle \tilde{\nabla}_{E_i} N, \tilde{\nabla}_{E_k} E_j \rangle + \langle \tilde{\nabla}_{\nabla_{E_k} E_i} N, E_j \rangle + \langle \tilde{\nabla}_{E_i} N, \nabla_{E_k} E_j \rangle \\
&= -\langle \tilde{\nabla}_{E_k} \tilde{\nabla}_{E_i} N, E_j \rangle - \langle \tilde{\nabla}_{E_i} N, \nabla_{E_k} E_j \rangle - \langle \tilde{\nabla}_{E_i} N, (\tilde{\nabla}_{E_k} E_j)^N \rangle + \langle \tilde{\nabla}_{\nabla_{E_k} E_i} N, E_j \rangle \\
&\quad + \langle \tilde{\nabla}_{E_i} N, \nabla_{E_k} E_j \rangle.
\end{aligned}$$

Assim, como a curvatura do  $\mathbb{R}^{n+1}$  é nula, temos que  $0 = R(E_k, E_i)N = \tilde{\nabla}_{E_i} \tilde{\nabla}_{E_k} N - \tilde{\nabla}_{E_k} \tilde{\nabla}_{E_i} N$  e com isso  $\tilde{\nabla}_{E_k} \tilde{\nabla}_{E_i} N = \tilde{\nabla}_{E_i} \tilde{\nabla}_{E_k} N$ . Veja que  $\langle N, N \rangle = 1$  implica  $\langle \tilde{\nabla}_{E_i} N, N \rangle = 0$ , assim  $\langle \tilde{\nabla}_{E_i} N, (\tilde{\nabla}_{E_k} E_j)^N \rangle = 0$ .

Portanto,

$$h_{ij,k} = -\langle \tilde{\nabla}_{E_i} \tilde{\nabla}_{E_k} N, E_j \rangle + \langle \tilde{\nabla}_{\nabla_{E_i} E_k} N, E_j \rangle = h_{kj,i}.$$

□

Usando os Lemas (2.3.1) e (2.3.2) podemos concluir que  $h_{ij,k}$  é simétrico em todos os índices.

Defina  $m(X, Y, Z) := (\nabla_Z h)(X, Y)$ , assim  $m(E_i, E_j, E_k) = h_{ij,k}$ . Seja agora  $h_{ij,kl} := (\nabla_{E_l} m)(E_i, E_j, E_k) = \nabla_{E_l} h_{ij,k}$ . Diferente de  $h_{ij,k}$ , que é simétrico em todos os índices,  $h_{ij,kl}$  não é simétrico em relação ao último índice. Em detalhes temos o seguinte lema.

**Lema 2.3.3.** *Dado  $h_{ij,kl}$  como acima, vale que*

$$h_{ij,kl} = h_{ij,lk} + \sum_{m=1}^n R_{lkim} h_{mj} + \sum_{m=1}^n R_{lkjm} h_{mi}.$$

*Demonstração.* Note que

$$\begin{aligned}
h_{ij,kl} &= (\nabla_{E_l} m)(E_i, E_j, E_k) \\
&= E_l m(E_i, E_j, E_k) - m(\nabla_{E_l} E_i, E_j, E_k) - m(E_i, \nabla_{E_l} E_j, E_k) - m(E_i, E_j, \nabla_{E_l} E_k) \\
&= E_l (\nabla_{E_k} h)(E_i, E_j) - (\nabla_{E_k} h)(\nabla_{E_l} E_i, E_j) - (\nabla_{E_k} h)(E_i, \nabla_{E_l} E_j) - (\nabla_{\nabla_{E_l} E_k} h)(E_i, E_j) \\
&= E_l E_k h(E_i, E_j) - E_l h(\nabla_{E_k} E_i, E_j) - E_l h(E_i, \nabla_{E_k} E_j) \\
&\quad - E_k h(\nabla_{E_l} E_i, E_j) + h(\nabla_{E_k} \nabla_{E_l} E_i, E_j) + h(\nabla_{E_l} E_i, \nabla_{E_k} E_j) \\
&\quad - E_k h(E_i, \nabla_{E_l} E_j) + h(\nabla_{E_k} E_i, \nabla_{E_l} E_j) + h(E_i, \nabla_{E_k} \nabla_{E_l} E_j) \\
&\quad - \nabla_{E_l} E_k h(E_i, E_j) + h(\nabla_{\nabla_{E_l} E_k} E_i, E_j) + h(E_i, \nabla_{\nabla_{E_l} E_k} E_j).
\end{aligned}$$

Ademais,  $E_l E_k h(E_i, E_j) = E_k E_l h(E_i, E_j)$ ,  $\nabla_{E_k} E_l = \nabla_{E_l} E_k$  e, usando a definição de curvatura,

$$h(\nabla_{E_k} \nabla_{E_l} E_i, E_j) = h(R(E_l, E_k) E_i, E_j) + h(\nabla_{E_l} \nabla_{E_k} E_i, E_j).$$

Analogamente,

$$h(E_i, \nabla_{E_k} \nabla_{E_l} E_j) = h(E_i, R(E_l, E_k) E_j) + h(E_i, \nabla_{E_l} \nabla_{E_k} E_j).$$

Logo, arrumando as parcelas,

$$\begin{aligned}
h_{ij,kl} &= E_k E_l h(E_i, E_j) - E_k h(\nabla_{E_l} E_i, E_j) - E_k h(E_i, \nabla_{E_l} E_j) \\
&\quad - E_l h(\nabla_{E_k} E_i, E_j) + h(E_i, \nabla_{E_l} \nabla_{E_k} E_j) + h(\nabla_{E_k} E_i, \nabla_{E_l} E_j) \\
&\quad - E_l h(E_i, \nabla_{E_k} E_j) + h(\nabla_{E_l} E_i, \nabla_{E_k} E_j) + h(E_i, \nabla_{E_l} \nabla_{E_k} E_j) \\
&\quad - \nabla_{E_k} E_l h(E_i, E_j) + h(\nabla_{\nabla_{E_k} E_l} E_i, E_j) + h(E_i, \nabla_{\nabla_{E_k} E_l} E_j) \\
&\quad + h(R(E_l, E_k) E_i, E_j) + h(E_i, R(E_l, E_k) E_j) \\
&= h_{ij,lk} + \sum_{m=1}^n R_{lkim} h_{mj} + \sum_{m=1}^n R_{lkjm} h_{mi}, \tag{2.15}
\end{aligned}$$

onde  $R_{lkim}$  está definido em (1.3). □

Observe, de (1.9), que

$$R_{ijkl} = h_{ik} h_{jl} - h_{jk} h_{il}$$

Usando este fato em (2.15),

$$\begin{aligned}
h_{ik,jk} &= h_{ik,kj} + \sum_{m=1}^n R_{kjim} h_{mk} + \sum_{m=1}^n R_{kjkm} h_{mi} \\
&= h_{ik,kj} + \sum_{m=1}^n (h_{ki} h_{jm} - h_{ji} h_{km}) h_{mk} + \sum_{m=1}^n (h_{kk} h_{jm} - h_{jk} h_{km}) h_{mi}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

De (1.8) vemos que

$$|A|^2 = \sum_{i,j=1}^n \langle A(E_i, E_j), N \rangle^2 = \sum_{i,j=1}^n h_{ij}^2,$$

e sendo  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície mínima, então de (1.6)

$$0 = n\vec{H} = \sum_i A(E_i, E_i) = \sum_i \langle A(E_i, E_i), N \rangle N = \sum_i h_{ii} N.$$

Logo,

$$\sum_i h_{ii} = 0. \tag{2.17}$$

Agora, usando os lemas (2.3.1), (2.3.2) e (2.3.3). temos o seguinte

**Teorema 2.3.1** (Equação de Simons). *Seja  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície mínima. Então*

$$|A| \Delta_M |A| + |\nabla_M |A||^2 = -|A|^4 + \sum_{i,j,k=1}^n h_{ij,k}^2,$$

onde  $A$  é a segunda forma fundamental da imersão isométrica de  $M^n$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\Delta_M$  e  $\nabla_M$  são, respectivamente, o Laplaciano e o gradiente em  $M$ .

*Demonstração.* Usando (1.2),

$$\frac{1}{2} \Delta_M |A|^2 = |A| \Delta_M |A| + |\nabla_M |A||^2.$$

Por outro lado, usando (1.2) e o fato de  $|A|^2 = \sum_{i,j=1}^n h_{ij}^2$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta_M|A|^2 &= \frac{1}{2}\Delta_M\left(\sum_{i,j=1}^n h_{ij}^2\right) = \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2}\Delta_M(h_{ij}^2) \\ &= \sum_{i,j=1}^n h_{ij}\Delta_M h_{ij} + \sum_{i,j=1}^n |\nabla_M h_{ij}|^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$|A|\Delta_M|A| + |\nabla_M|A||^2 = \sum_{i,j=1}^n h_{ij}\Delta_M h_{ij} + \sum_{i,j,k=1}^n h_{ij,k}^2.$$

Assim, basta mostrar que  $\sum_{i,j=1}^n h_{ij}\Delta_M h_{ij} = -|A|^4$ . De fato, usando os Lemas (2.3.1) e (2.3.2) e a equação (2.16), temos

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n h_{ij}\Delta_M h_{ij} &= \sum_{i,j,k=1}^n h_{ij}h_{ij,kk} = \sum_{i,j,k=1}^n h_{ij}h_{ik,jk} \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n h_{ij} \left( h_{ik,kj} + \sum_{m=1}^n (h_{ki}h_{jm} - h_{ji}h_{km})h_{mk} + \sum_{m=1}^n (h_{kk}h_{jm} - h_{jk}h_{km})h_{mi} \right) \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n h_{ij}h_{ik,kj} + \sum_{i,j,k,m=1}^n h_{ij}(h_{ki}h_{jm} - h_{ji}h_{km})h_{mk} \\ &\quad + \sum_{i,j,k,m=1}^n h_{ij}(h_{kk}h_{jm} - h_{jk}h_{km})h_{mi} \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n h_{ij}h_{ik,kj} + \sum_{i,j,k,m=1}^n h_{ij}h_{ki}h_{jm}h_{mk} - \sum_{i,j,k,m=1}^n h_{ij}^2h_{km}^2 \\ &\quad + \sum_{i,j,k,m=1}^n h_{ij}h_{kk}h_{jm}h_{mi} - \sum_{i,j,k,m=1}^n h_{ij}h_{jk}h_{km}h_{mi} \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n h_{ij}h_{ik,kj} + \sum_{i,j,k,m=1}^n h_{ij}h_{mk}(h_{ki}h_{jm} - h_{jk}h_{mi}) \\ &\quad - \sum_{i,j,k,m=1}^n h_{ij}^2h_{km}^2 + \sum_{i,j,k,m=1}^n h_{ij}h_{kk}h_{jm}h_{mi}. \end{aligned}$$

Como  $M$  é uma hipersuperfície mínima, vemos que

$$\sum_k^n h_{kk} = 0 \Rightarrow E_j E_i \sum_k^n h_{kk} = 0.$$

Assim  $\sum_k^n h_{ik,kj} = 0$  e, portanto,

$$\sum_{i,j,k=1}^n h_{ij} h_{ik,kj} = \sum_{i,j=1}^n h_{ij} \left( \sum_{k=1}^n h_{ik,kj} \right) = 0.$$

Temos também que

$$\sum_{i,j,k,m=1}^n h_{ij} h_{kk} h_{jm} h_{mi} = \sum_{i,j,m=1}^n h_{ij} \left( \sum_{k=1}^n h_{kk} \right) h_{jm} h_{mi} = 0,$$

pois  $M$  é uma hipersuperfície mínima. E, fixando  $k$  e  $m$ , temos

$$\sum_{i,j=1}^n h_{ij} h_{mk} (h_{ki} h_{jm} - h_{jk} h_{mi}) = 0,$$

pois chamando  $z_{ij} = h_{ij} h_{mk} (h_{ki} h_{jm} - h_{jk} h_{mi})$ , temos que  $z_{ij} = -z_{ji}$ .

Logo,

$$\sum_{i,j=1}^n h_{ij} \Delta_M h_{ij} = - \sum_{i,j,k,m=1}^n h_{ij}^2 h_{km}^2 = - \sum_{i,j=1}^n h_{ij}^2 \left( \sum_{k,m=1}^n h_{km}^2 \right) = -|A|^4.$$

Portanto,

$$|A| \Delta_M |A| + |\nabla_M |A||^2 = -|A|^4 + \sum_{i,j,k=1}^n h_{ij,k}^2.$$

□

Observe primeiro que, como  $h$  é simétrico, podemos escolher  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  tal que, em  $p$ ,  $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ . Assim, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, teremos que

$$\begin{aligned}
4|A|^2|\nabla|A||^2 &= |\nabla|A|^2|^2 = \left| \left( 2 \sum_{j,i=1}^n h_{ij,1}h_{ij}, \dots, 2 \sum_{i=1}^n h_{ij,n}h_{ij} \right) \right|^2 \\
&= 4 \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j,i=1}^n h_{ij,k}h_{ij} \right)^2 \\
&= 4 \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n h_{ii,k}h_{ii} \right)^2 \\
&\leq 4 \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n h_{ii}^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n h_{ii,k}^2 \right) \\
&\leq 4|A|^2 \sum_{i,k=1}^n h_{ii,k}^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|\nabla|A||^2 \leq \sum_{i,k=1}^n h_{ii,k}^2. \quad (2.18)$$

**Teorema 2.3.2** (Desigualdade de Simons). *Seja  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície mínima. Então*

$$|A|\Delta_M|A| + |A|^4 \geq \frac{2}{n}|\nabla_M|A||^2.$$

*Demonstração.* Como  $M$  é mínima então  $\sum_k h_{kk} = 0$  e, conseqüentemente,  $h_{ii} = -\sum_{j \neq i} h_{jj}$ . Assim, para todo  $i$ , temos

$$\begin{aligned}
h_{ii,i}^2 &= \left( \nabla_{E_i} h_{ii} \right)^2 = \left( -\nabla_{E_i} \sum_{j \neq i} h_{jj} \right)^2 \\
&= \left( \sum_{j \neq i} h_{jj,i} \right)^2.
\end{aligned}$$

E mais, para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $i$  fixo,  $\sum_{j \neq i} (h_{jj,i} + \alpha)^2 \geq 0$ . Logo o discriminante da equação do segundo grau  $\sum_{j \neq i} (h_{jj,i} + \alpha)^2 = 0$  tem que ser menor ou igual a zero, ou seja,

$$4 \left( \sum_{j \neq i} h_{jj,i} \right)^2 - 4(n-1) \sum_{j \neq i} h_{jj,i}^2 \leq 0,$$

logo,

$$\left( \sum_{j \neq i} h_{jj,i} \right)^2 \leq (n-1) \sum_{j \neq i} h_{jj,i}^2. \quad (2.19)$$

Assim, de (2.18) e (2.19), teremos

$$\begin{aligned} |\nabla|A||^2 &\leq \sum_{i,k=1}^n h_{ii,k}^2 = \sum_{i \neq k} h_{ii,k}^2 + \sum_{i=1}^n h_{ii,i}^2 \\ &\leq \sum_{i \neq k} h_{ii,k}^2 + (n-1) \sum_{j \neq i} h_{jj,i}^2 \\ &= n \sum_{j \neq i} h_{ii,k}^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{j \neq i} h_{jj,i}^2 \geq \frac{|\nabla_M|A||^2}{n}.$$

Por outro lado, como  $h_{ij,k}$  é simétrico em todas os índices,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k=1}^n h_{ij,k}^2 &= \sum_{i \neq k} h_{ii,k}^2 + \sum_{i \neq k} h_{ik,i}^2 + \sum_{i \neq k} h_{ki,i}^2 + \sum_{i=1}^n h_{ii,i}^2 + \sum_{k \neq i \neq j \neq k} h_{ij,k}^2 \\ &\geq 3 \sum_{i \neq k} h_{ii,k}^2 + \sum_{i=1}^n h_{ii,i}^2 \\ &= 2 \sum_{i \neq k} h_{ii,k}^2 + \sum_{i=1}^n h_{ii,i}^2 + \sum_{i \neq k} h_{ii,k}^2 \\ &= 2 \sum_{i \neq k} h_{ii,k}^2 + \sum_{i,k=1}^n h_{ii,k}^2 \\ &\geq \frac{2}{n} |\nabla|A||^2 + |\nabla|A||^2. \end{aligned}$$

Logo, usando a equação de Simons, temos que

$$|A|\Delta_M|A| + |\nabla_M|A||^2 \geq -|A|^4 + \frac{2}{n} |\nabla_M|A||^2 + |\nabla_M|A||^2.$$



Portanto,

$$|A|\Delta_M|A| + |A|^4 \geq \frac{2}{n}|\nabla_M|A||^2.$$

□

---

---

## CAPÍTULO 3

---

# HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS COMPLETAS ESTÁVEIS

Neste capítulo, apresentaremos os principais resultados deste trabalho, que consistem em mostrar que uma hipersuperfície mínima completa estável cuja curvatura total é finita é, na verdade, um hiperplano. Esse teorema foi provado por do Carmo-Peng em [7] e ele será enunciado e devidamente provado na primeira seção deste capítulo. Finalizaremos este capítulo fazendo uma pequena extensão do resultado de Li-Wei obtido em [16].

### 3.1 Estimativas $L^2$ da Norma da Segunda Forma Fundamental

Apresentaremos um resultado importante obtido por do Carmo-Peng que consiste em mostrar que, com algumas condições sob a curvatura, hipersuperfícies mínimas completas e orientadas no  $\mathbb{R}^{n+1}$  é um hiperplano. A principal referência para essa seção foi o artigo [7].

**Teorema 3.1.1** (do Carmo-Peng). *Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície mínima completa e estável. Assuma que*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\int_{B_R} |A|^2 dM}{R^{2+2q}} = 0,$$

onde  $0 < q < \sqrt{\frac{2}{n}}$ ,  $B_R \subset M$  é uma bola geodésica de raio  $R$  centrada em algum ponto de  $M$  e  $A$  a

segunda forma fundamental de  $x$ . Então  $x(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é um hiperplano.

*Demonstração.* Sejam  $q > 0$  um número real e  $f$  uma função de Lipschitz com suporte compacto em  $M$ . Assim, multiplicando a desigualdade de Simons por  $|A|^{2q}f^2$  e integrando em  $M$ , obtemos, usando o teorema da divergência, que

$$\begin{aligned} \frac{2}{n} \int_M |A|^{2q} f^2 |\nabla |A||^2 dM &\leq \int_M |A|^{4+2q} f^2 dM + \int_M |A|^{2q+1} f^2 \Delta |A| dM \\ &= \int_M |A|^{4+2q} f^2 dM - \int_M \langle \nabla (|A|^{2q+1} f^2), \nabla |A| \rangle dM \\ &= \int_M |A|^{4+2q} f^2 dM - 2 \int_M |A|^{2q+1} f \langle \nabla f, \nabla |A| \rangle dM \\ &\quad - (2q+1) \int_M |A|^{2q} f^2 |\nabla |A||^2 dM. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(\frac{2}{n} + 2q + 1\right) \int_M |A|^{2q} f^2 |\nabla |A||^2 dM \leq \int_M |A|^{4+2q} f^2 dM - 2 \int_M |A|^{2q+1} f \langle \nabla f, \nabla |A| \rangle dM. \quad (3.1)$$

Agora, usando (2.14) com  $\eta = |A|^{1+q}f$ , temos

$$\begin{aligned} \int_M |A|^2 (|A|^{1+q}f)^2 dM &\leq \int_M |\nabla (|A|^{1+q}f)|^2 dM \\ &= \int_M |(1+q)|A|^q f \nabla |A| + |A|^{1+q} \nabla f|^2 dM \\ &= (1+q)^2 \int_M |A|^{2q} f^2 |\nabla |A||^2 dM + 2(1+q) \int_M |A|^{1+q} f \langle \nabla f, \nabla |A| \rangle dM \\ &\quad + \int_M |A|^{2+2q} |\nabla f|^2 dM. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_M |A|^{4+2q} f^2 dM &\leq (1+q)^2 \int_M |A|^{2q} f^2 |\nabla |A||^2 dM + 2(1+2q) \int_M |A|^{1+2q} f \langle \nabla f, \nabla |A| \rangle dM \\ &\quad + \int_M |A|^{2+2q} |\nabla f|^2 dM. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Multiplicando (3.1) por  $(1 + q)$  e somando (3.2) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_M |A|^{4+2q} f^2 dM &+ (1 + q) \left( \frac{2}{n} + 2q + 1 \right) \int_M |A|^{2q} f^2 |\nabla |A||^2 dM \\
&\leq (1 + q) \int_M |A|^{4+2q} f^2 dM - 2(1 + q) \int_M |A|^{2q+1} f \langle \nabla f, \nabla |A| \rangle dM \\
&\quad + \int_M |A|^{4+2q} f^2 dM \\
&\leq (1 + q) \int_M |A|^{4+2q} f^2 dM - 2(1 + q) \int_M |A|^{2q+1} f \langle \nabla f, \nabla |A| \rangle dM \\
&\quad + (1 + q)^2 \int_M |A|^{2q} f^2 |\nabla |A||^2 dM + 2(1 + q) \int_M |A|^{1+2q} f \langle \nabla f, \nabla |A| \rangle dM \\
&\quad + \int_M |A|^{2+2q} |\nabla f|^2 dM,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&(1 + q) \left( \frac{2}{n} + 2q + 1 \right) \int_M |A|^{2q} f^2 |\nabla |A||^2 dM - (1 + q)^2 \int_M |A|^{2q} f^2 |\nabla |A||^2 dM \\
&\leq q \int_M |A|^{4+2q} f^2 dM + \int_M |A|^{2+2q} |\nabla f|^2 dM.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$(1 + q) \left( \frac{2}{n} + q \right) \int_M |A|^{2q} f^2 |\nabla |A||^2 dM \leq q \int_M |A|^{4+2q} f^2 dM + \int_M |A|^{2+2q} |\nabla f|^2 dM. \quad (3.3)$$

Agora, observe que  $\left( \sqrt{\varepsilon} a - \frac{b}{\sqrt{\varepsilon}} \right)^2 \geq 0$  para todo  $\varepsilon > 0$ , ou seja,  $2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}$ , para todo  $\varepsilon > 0$  e, usando  $a = |\nabla |A|| f$  e  $b = |A| |\nabla f|$  na desigualdade (3.2), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_M |A|^{4+2q} f^2 dM &\leq (1+q)^2 \int_M |A|^{2q} f^2 |\nabla |A||^2 dM + (1+q) \int_M |A|^{2q} 2 \langle |A| \nabla f, f \nabla |A| \rangle dM \\
&\quad + \int_M |A|^{2+2q} |\nabla f|^2 dM \\
&\leq (1+q)^2 \int_M |A|^{2q} f^2 |\nabla |A||^2 dM + \varepsilon(1+q) \int_M |A|^{2q} f^2 |\nabla |A||^2 dM \\
&\quad + \frac{(1+q)}{\varepsilon} \int_M |A|^{2q} |A|^2 |\nabla f|^2 dM + \int_M |A|^{2+2q} |\nabla f|^2 dM \\
&= (1+q)(1+q+\varepsilon) \int_M |A|^{2q} f^2 |\nabla |A||^2 dM + \left( \frac{\varepsilon+1+q}{\varepsilon} \right) \int_M |A|^{2+2q} |\nabla f|^2 dM.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\int_M |A|^{4+2q} f^2 dM &\leq (1+q)(1+q+\varepsilon) \int_M |A|^{2q} f^2 |\nabla |A||^2 dM \\
&\quad + \left( \frac{\varepsilon+1+q}{\varepsilon} \right) \int_M |A|^{2+2q} |\nabla f|^2 dM. \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Assim, substituindo a equação (3.3) na equação (3.4), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_M |A|^{4+2q} f^2 dM &\leq \frac{(1+q)(1+q+\varepsilon)q}{(1+q)(\frac{2}{n}+q)} \int_M |A|^{4+2q} f^2 dM + \frac{(1+q)(1+q+\varepsilon)}{(1+q)(\frac{2}{n}+q)} \int_M |A|^{2+2q} |\nabla f|^2 dM \\
&\quad + \left( \frac{\varepsilon+1+q}{\varepsilon} \right) \int_M |A|^{2+2q} |\nabla f|^2 dM,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_M |A|^{4+2q} f^2 dM \leq \frac{(1+q+\varepsilon)q}{(\frac{2}{n}+q)} \int_M |A|^{4+2q} f^2 dM + \beta_I \int_M |A|^{2+2q} |\nabla f|^2 dM, \tag{3.5}$$

onde  $\beta_I$  é uma constante que depende somente de  $n, \varepsilon$  e  $q$ . Usando o fato de  $q < \sqrt{\frac{2}{n}}$ , obtemos

$$\frac{(1+q)q}{q+\frac{2}{n}} = \frac{q+q^2}{q+\frac{2}{n}} < \frac{q+\frac{2}{n}}{q+\frac{2}{n}} = 1.$$

Assim, podemos escolher  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno tal que  $\frac{(1+q+\varepsilon)q}{(\frac{2}{n}+q)} < 1$ . Logo,

encontramos que

$$\int_M |A|^{4+2q} f^2 dM \leq \beta_2 \int_M |A|^{2+2q} |\nabla f|^2 dM \quad (3.6)$$

onde  $\beta_2$  é uma constante que depende somente de  $n, \varepsilon$  e  $q$ .

Queremos transformar a equação (3.6) de forma que o integrando do lado direito tenha  $|A|^2$ . Para isto, usaremos a desigualdade de Young, veja (B.0.4). Seja  $p, 0 < p < 2 + 2q$  um número ainda a ser determinado. Assim, usando a desigualdade de Young para  $a = |A|^{2+2q-p}$  e  $b = |A|^p \frac{|\nabla f|^2}{f^2}$  chegamos a

$$\begin{aligned} |A|^{2+2q} |\nabla f|^2 &= f^2 \left( |A|^{2+2q} \frac{|\nabla f|^2}{f^2} \right) = f^2 \left( |A|^{2+2q-p} |A|^p \frac{|\nabla f|^2}{f^2} \right) \\ &\leq f^2 \left( \frac{\alpha^s}{s} |A|^{s(2+2q-p)} \right) + f^2 \left( \frac{\alpha^{-t}}{t} \left( |A|^p \frac{|\nabla f|^2}{f^2} \right)^t \right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$|A|^{2+2q} |\nabla f|^2 \leq f^2 \left( \frac{\alpha^s}{s} |A|^{s(2+2q-p)} \right) + f^2 \left( \frac{\alpha^{-t}}{t} \left( |A|^p \frac{|\nabla f|^2}{f^2} \right)^t \right). \quad (3.7)$$

Agora, escolha  $p$  satisfazendo as seguintes equações:

$$s(2 + 2q - p) = 4 + 2q, \quad pt = 2, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1.$$

Isso é realmente possível. De fato, a solução é

$$p = \frac{2}{1+q}, \quad t = 1+q, \quad s = \frac{1+q}{q}.$$

Usando esses valores e o fato de que podemos tomar  $\alpha$  tão pequeno quanto se queira, obtemos de (3.6) e (3.7) que

$$\begin{aligned} \int_M |A|^{4+2q} f^2 dM &\leq \beta_2 \int_M |A|^{2+2q} |\nabla f|^2 dM \\ &= \beta_2 \int_M f^2 \left( \frac{\alpha^s}{s} |A|^{s(2+2q-p)} \right) + \beta_2 \int_M f^2 \left( \frac{\alpha^{-t}}{t} \left( |A|^p \frac{|\nabla f|^2}{f^2} \right)^t \right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\left(1 - \frac{\beta_2 \alpha^{\frac{1+q}{q}}}{1+q}\right) \int_M |A|^{4+2q} f^2 dM \leq \frac{\beta_2 \alpha^{-1-q}}{1+q} \int_M f^2 |A|^2 \frac{|\nabla f|^{2+2q}}{f^{2+2q}},$$

ou seja,

$$\int_M |A|^{4+2q} f^2 dM \leq \beta_3 \int_M |A|^2 \frac{|\nabla f|^{2+2q}}{f^{2q}}. \quad (3.8)$$

Trocando  $f$  por  $f^{1+q}$  em (3.8), chegamos em

$$\begin{aligned} \int_M |A|^{4+2q} f^{2+2q} dM &\leq \beta_3 \int_M |A|^2 \frac{(\langle \nabla(f^{1+q}), \nabla(f^{1+q}) \rangle)^{1+q}}{f^{(1+q)2q}} \\ &= \beta_3 \int_M |A|^2 \frac{f^{(1+q)2q} |\nabla f|^{2+2q}}{f^{(1+q)2q}} = \beta_3 \int_M |A|^2 |\nabla f|^{2+2q}. \end{aligned}$$

Seja  $B_R$  uma família de subconjuntos de  $M$  dada por

$$B_R = \{p \in M \mid \rho(p, p_0) \leq R\},$$

onde  $\rho(p, p_0)$  é a distância geodésica em  $M$  de  $p$  até um ponto fixado  $p_0$ . Por completude,  $B_R$  é compacto e

$$\bigcup_{R \in (0, +\infty)} B_R = M.$$

É conhecido que  $|\nabla \rho| \leq 1$  em quase toda parte de  $M$ . Agora, fixando  $R$  e  $0 < \theta < 1$  e tomando  $f$  em (3.8) dada por

$$f(p) = \begin{cases} 1 & \text{para } \rho(p) \leq \theta R; \\ \frac{R - \rho(p)}{(1 - \theta)R} & \text{para } \theta R \leq \rho(p) \leq R; \\ 0 & \text{para } \rho(p) \geq R. \end{cases}$$

Vemos, por (3.8), que

$$\int_{B_{\theta R}} |A|^{4+2q} dM = \int_{B_{\theta R}} |A|^{4+2q} f^2 dM \leq \int_{B_R} |A|^{4+2q} f^2 dM \leq \beta_3 \frac{\int_{B_R} |A|^2}{((1 - \theta)R)^{2q+2}}, \quad (3.9)$$

onde  $|\nabla f| = \left| \frac{-\nabla \rho}{(1 - \theta)R} \right| \leq \frac{1}{(1 - \theta)R}$ . Usando a nossa hipótese sobre o decaimento de  $|A|^2$

temos que o lado direito de (3.9) vai a zero quando  $R \rightarrow \infty$ . Por outro lado, o esquerdo converge para uma integral em toda  $M$ . Portanto,

$$0 \leq \int_M |A|^{4+2q} dM \leq 0.$$

Como  $|A|$  é uma aplicação contínua então  $|A| = 0$ , isto é,  $x(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é um hiperplano.  $\square$

Como consequência desse teorema temos o seguinte resultado.

**Corolário 3.1.1.** *Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície mínima completa e estável, e seja  $A$  a sua segunda forma fundamental. Assuma que*

$$\int_M |A|^2 dM < \infty.$$

Então  $x(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é um hiperplano.

*Demonstração.* Basta observar que existe um  $c > 0$  tal que  $\int_M |A|^2 dM < c$  e, portanto,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\int_M |A|^2 dM}{R^{2+2q}} \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{c}{R^{2+2q}} = 0.$$

Logo, pelo Teorema (3.1.1),  $x(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é um hiperplano.  $\square$

Agora, seguindo [7] temos a seguinte definição.

**Definição 3.1.1.** *Dizemos que uma hipersuperfície  $M$  tem curvatura total finita quando*

$$\int_M K dM < \infty.$$

Se  $M$  é uma hipersuperfície mínima sabemos, de (1.10), que  $|A|^2 = -2K$ . Portanto, o corolário acima diz que uma hipersuperfície mínima, completa e estável com curvatura total finita é de fato um hiperplano.



## 3.2 Estimativas $L^3$ da Norma da Segunda Forma Fundamental

Nesta seção, consideraremos não mais a estimativa  $L^2$  da norma, como foi obtido na seção anterior, e sim a estimativa  $L^3$  da norma, no qual, estenderemos o resultado de Li-Wei (veja [16]) para  $3 \leq n \leq 7$ , encontrando assim, nas condições do teorema que será enunciado a seguir, que a hipersuperfície terá a norma da segunda forma fundamental nula, i.e.,  $|A| = 0$ , ou seja, a nossa hipersuperfície é um hiperplano. As principais referências para essa seção foram os artigos [7] e [16].

**Teorema 3.2.1** (Li-Wei). *Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  ( $3 \leq n \leq 7$ ) uma hipersuperfície mínima completa e estável. Assuma que*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\int_{B_R} |A|^3 dM}{R^{1+2q}} = 0,$$

onde  $0 < q < \sqrt{\frac{2}{n}}$  e  $B_R \subset M$  é uma bola geodésica de raio  $R$  centrada em algum ponto de  $M$  e  $A$  a segunda forma fundamental de  $x$ . Então  $x(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é um hiperplano.

*Demonstração.* Com os mesmos cálculos da seção anterior obtemos, de (3.6), que

$$\int_M |A|^{4+2q} f^2 dM \leq \beta_2 \int_M |A|^{2+2q} |\nabla f|^2 dM, \quad (3.10)$$

onde  $q < \sqrt{\frac{2}{n}}$ .

E usando a desigualdade de Young (ver apêndice B Lema (B.0.4)) obtemos em (3.7), ou seja,

$$|A|^{2+2q} |\nabla f|^2 \leq f^2 \left( \frac{\alpha^s}{s} |A|^{s(2+2q-p)} \right) + f^2 \left( \frac{\alpha^{-t}}{t} \left( |A|^p \frac{|\nabla f|^2}{f^2} \right)^t \right), \quad (3.11)$$

onde  $\alpha > 0$ ,  $t$  e  $s$  são números reais positivos satisfazendo  $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1$  e  $p$ ,  $0 < p < 2 + 2q$  um número que determinaremos a seguir.

Agora, escolha  $p$  satisfazendo as seguintes equações;

$$s(2 + 2q - p) = 4 + 2q, \quad pt = 3, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1$$

Isso é realmente possível. De fato, a solução é

$$p = \frac{6}{1+2q}, \quad t = \frac{1+2q}{2}, \quad s = \frac{1+2q}{2q-1}.$$

Como  $s > 1$  então  $2q - 1 > 0$ . Logo, como  $q < \sqrt{\frac{2}{n}}$ , temos  $n < 8$ .

Usando esse valores temos

$$\left(1 - \frac{\beta_2 \alpha^{\frac{1+2q}{2q-1}}}{\frac{1+2q}{2q-1}}\right) \int_M |A|^{4+2q} f^2 dM \leq \frac{\beta_2 \alpha^{-\left(\frac{1+2q}{2}\right)}}{\frac{1+2q}{2}} \int_M f^2 |A|^3 \frac{|\nabla f|^{1+2q}}{f^{1+2q}}. \quad (3.12)$$

Assim, tomando  $\alpha$  suficientemente pequeno, temos

$$\beta_3 = \left(1 - \frac{\beta_2 \alpha^{\frac{1+2q}{2q-1}}}{\frac{1+2q}{2q-1}}\right) > 0.$$

Logo, da desigualdade 3.12, temos

$$\int_M |A|^{4+2q} f^2 dM \leq \beta_4 \int_M |A|^3 \frac{|\nabla f|^{1+2q}}{f^{2q-1}} \quad (3.13)$$

onde  $\beta_4$  depende somente de  $\alpha$ ,  $n$ ,  $\varepsilon$  e  $q$ . Agora, usando a arbitrariedade de  $f$  e trocando  $f$  por  $f^{\frac{1+2q}{2}}$  em (3.13) obtemos

$$\int_M |A|^{4+2q} f^{1+2q} dM \leq \beta_4 \int_M |A|^3 |\nabla f|^{1+2q}. \quad (3.14)$$

E, analogamente à seção anterior, temos  $|A| = 0$ , isto é,  $x(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é um hiperplano.  $\square$

Como corolário desse Teorema temos o seguinte resultado.

**Corolário 3.2.1.** *Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  ( $3 \leq n \leq 7$ ) uma hipersuperfície mínima completa e estável, e seja  $A$  a sua segunda forma fundamental. Assuma que*

$$\int_M |A|^3 dM < \infty.$$

*Então  $x(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é um hiperplano.*

*Demonstração.* Segue de modo análogo ao Corolário 3.1.1.

□

---

---

## CAPÍTULO 4

---

# SUPERFÍCIES MÍNIMAS COM ÍNDICE FINITO NO $\mathbb{R}^3$

Neste capítulo, estudaremos superfícies mínimas completas com índice finito no  $\mathbb{R}^3$ . Primeiro discutiremos o índice do operador  $L$ , seguindo com uma discussão geométrica do índice finito de superfícies mínimas em uma variedade Riemanniana  $N$  de dimensão 3, ou seja, em  $N^3$  e finalmente analisaremos essa mesma situação no  $\mathbb{R}^3$ . As principais referências, para este capítulo, são [8], [20] e [18].

Seja  $M$  uma superfície mínima completa e orientada em uma variedade Riemanniana  $N^3$ . O primeiro autovalor do operador estabilidade  $L$ , i.e.,  $\lambda_1$ , em um domínio limitado  $\Omega \subset M$  é dado por

$$\lambda_1(\Omega) = \inf \left\{ Q(\phi) \mid \phi \in C_0^\infty(\Omega), \int_\Omega \phi^2 dM = 1 \right\}$$

onde  $Q$  é a forma quadrática associada ao operador  $L$ .

Sejam  $p \in M$  um ponto de  $M$  e  $B_R(p)$  a bola geodésica em  $M$  de raio  $R$  e centrada em  $p$ . Seja também  $W$  um subespaço de dimensão finita de funções seccionalmente suaves em  $B_R(0)$ .  $Q$  é uma forma negativa definida em  $W$  se  $Q(\phi) < 0$  para todo  $\phi \in W$ ,  $\phi \neq 0$ .

**Lema 4.0.1.** *Se  $\Omega$  e  $\Omega'$  são domínios compactos em  $M$  e  $\Omega \subset \Omega'$ , então*

$$\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(\Omega').$$

Se  $\Omega' - \bar{\Omega} \neq \emptyset$  então a desigualdade é estrita.

## 4.1 Superfícies Mínimas de Índice Finito em $N^3$ com Curvatura Escalar não negativa

Nesta seção, iremos trabalhar com superfícies mínimas de índice finito imersas em  $N^3$  que tem curvatura escalar não negativa.

**Proposição 4.1.1.** *Se  $M$  tem índice finito então existe um conjunto compacto  $C$  em  $M$  tal que  $M - C$  é estável e existe uma função positiva  $g$  em  $M$  de modo que  $Lg = 0$  em  $M - C$ .*

*Demonstração.* Fixe  $p \in M$  e seja  $B_\rho(p)$  a bola geodésica de raio  $\rho$  centrada em  $p$ .

Seja

$$\rho_1 = 2 \cdot \sup\{\rho \mid B_\rho(p) \text{ é estável}\}.$$

Caso  $\rho_1$  seja infinito então  $M$  é estável. Caso contrário, defina

$$\rho_2 = 2 \cdot \sup\{\rho > \rho_1 \mid B_\rho(p) - B_{\rho_1}(p) \text{ é estável}\}.$$

Se  $\rho_2$  é infinito então,  $M - B_{\rho_1}(p)$  é estável, isto é, tomando  $C = B_{\rho_1}(p)$ ,  $M - C$  é estável. Caso  $\rho_2 < \infty$ , então  $B_{\rho_2}(p) - B_{\rho_1}(p)$  é instável. Assim, indutivamente, defina

$$\rho_k = 2 \cdot \sup\{\rho > \rho_{k-1} \mid B_\rho(p) - B_{\rho_{k-1}}(p) \text{ é estável}\}.$$

Se  $\rho_k$  é infinito então  $M - B_{\rho_{k-1}}(p)$  é estável. Caso contrário definimos, de modo análogo,  $\rho_{k+1}$ .

**Afirmção:** Existe  $l \in \mathbb{N}$  tal que  $\rho_l$  é infinito, isto é, existe um  $\rho_l$  tal que  $M - B_{\rho_l}(p)$  é estável. De fato, suponha que exista uma sequência  $(\rho_k)$ ,  $\rho_1 < \rho_2 < \dots$  tal que  $A_{\rho_i} = B_{\rho_i}(p) - B_{\rho_{i-1}}(p)$  é instável para cada  $\rho_i$  da sequência. Assim, para cada  $i$ , o autovalor  $\lambda_1$  de  $L$  em  $A_{\rho_i}$  é negativo. Seja  $f_i$  a autofunção associada a  $\lambda_1$  no anel  $A_{\rho_i}$ , logo  $f_i$  tem suporte em  $A_{\rho_i}$  e  $Q$  é negativa definida sobre o espaço gerado pela  $f_i$ . Como  $M$  tem índice finito, só pode existir um número finito de  $f_i$ 's, isto é, o processo acima deverá parar depois de um número  $l$  de passos e assim  $M$  é estável fora do conjunto compacto  $C = B_{\rho_l}(p)$ .

Como  $M$  é estável fora de  $C$  então o operador  $L$  tem autovalores não negativos em  $M - C$ , assim,  $\lambda_1(D) \geq 0$  para todo domínio limitado  $D \subset M - C$ . Como  $M$  é completo e não

compacto, podemos escolher  $R_0, R_1$  suficientemente grandes tal que  $C$  esteja contido em  $B_{R_0}(p)$  para algum  $p \in M$ ,  $\bar{D} \subset A_{R_1} = B_{R_1}(p) - B_{R_0}(p)$  e  $A_{R_1} - \bar{D} \neq \emptyset$ , ou seja,  $A_{R_1}$  contém propriamente  $D$ . Pelo Lema (4.0.1) e pela estabilidade de  $A_{R_1}$  temos  $\lambda_1(D) > \lambda_1(A_{R_1}) \geq 0$ . Logo,

$$\lambda_1(D) > 0 \tag{4.1}$$

para qualquer domínio limitado  $D \subset M - C$ .

Afirmamos que  $M - B_{R_0}(p)$  é a união de um número finito de componentes conexas  $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ . De fato, seja  $q \in \Omega_i$  e seja  $\gamma$  a menor geodésica de  $p$  a  $q$ . Assim, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\gamma \cap \overline{B_{R_0+2\epsilon}(p) - B_{R_0+\epsilon}(p)} \neq \emptyset$ , então  $\Omega_i$  intersecta  $\overline{B_{R_0+2\epsilon}(p) - B_{R_0+\epsilon}(p)}$ , ou seja  $\cup \Omega_i$  é uma cobertura de  $\overline{B_{R_0+2\epsilon}(p) - B_{R_0+\epsilon}(p)}$ . Como  $\overline{B_{R_0+2\epsilon}(p) - B_{R_0+\epsilon}(p)}$  é compacto então essa cobertura admite uma subcobertura finita, isto é, existe um número finito de componentes conexas  $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ .

Basta provar agora a existência de uma solução positiva  $g$  de  $L$  em  $M$  de modo que  $Lg = 0$  em  $M - C$ . Para isto, fixemos um ponto  $p \in M$ . Para cada  $R > R_0$ , considere o problema

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{em } A_R; \\ u = 1 & \text{em } \partial A_R \end{cases} \tag{4.2}$$

Inicialmente, queremos mostrar que o problema (4.2) possui uma única solução. Para isso, considere a seguinte afirmação

**Afirmação.** Só existe a solução trivial (i.e, identicamente nula) para o problema

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{em } A_R; \\ u = 0 & \text{em } \partial A_R. \end{cases} \tag{4.3}$$

De fato, caso contrário, existiria  $f$  não identicamente nula solução do problema de Dirichlet (4.3). Logo,  $f$  estaria associado ao autovalor zero. Assim, algum  $\lambda_i(A_R)$  seria zero, o que é uma contradição já que  $\lambda_1(A_R) > 0$ .

Pelo Teorema 6.15 de [11], para cada  $R > R_0$  existe uma única função  $v$  em  $A_R$  tal que

$$\begin{cases} Lv = q & \text{em } A_R \\ v = 0 & \text{em } \partial A_R, \end{cases} \quad (4.4)$$

onde  $q = -|A|^2 - Ric(N, N)$ .

Por outro lado, de (4.2), temos que

$$L(u - 1) = Lu + q = q \text{ em } A_R$$

e

$$u - 1 = 0 \text{ em } \partial A_R.$$

Logo,  $u - 1$  também é solução de (4.4). Pela unicidade,

$$v = u - 1 \Leftrightarrow u = v + 1.$$

Assim,  $v + 1$  é a única solução de (4.2) como queríamos inicialmente.

Agora provaremos que  $u > 0$  em  $A_R$ . Em virtude do princípio do máximo forte (teorema 3.5 de [11]), basta provar que  $u \geq 0$  em  $A_R$ . Logo, se  $u \geq 0$  em  $A_R$  então  $u > 0$  em  $A_R$ . Mostraremos que  $u \geq 0$  em  $A_R$  por absurdo, ou seja, suponhamos que

$$K = \{x \in A_r | u(x) < 0\} \neq \emptyset.$$

Diante disso,  $K$  é um domínio limitado e  $K \subset\subset A_R$ . Assim, pelo Lema (4.0.1) e por (4.1), temos que

$$\lambda_1(K) > \lambda_1(A_R) > 0. \quad (4.5)$$

Como  $K \subset\subset A_R$ , então  $Lu = 0$  em  $A_R$  garante que  $Lu = 0$  em  $K$ . Observe também  $u = 0$  em  $\partial K$  por continuidade. Logo, segue de (4.5) e da afirmação acima que

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{em } K; \\ u = 0 & \text{em } \partial K \end{cases} \quad (4.6)$$

não possui solução não trivial, sendo assim,  $u = 0$  em  $K$ , contradizendo a definição de  $K$ . Com isso, mostramos que  $u > 0$  em  $A_R$ .

Dado que  $u(x_0) \neq 0$  com  $x_0 \in A_R$ , consideremos agora uma função  $g_R$  definida em  $M - C$  dada por

$$g_R(x) = (u(x_0))^{-1}u(x).$$

Veja que

$$\begin{aligned} Lg_R &= \Delta g_R - qg_R = \Delta(u(x_0))^{-1}u - q(u(x_0))^{-1}u \\ &= (u(x_0))^{-1}\Delta u - (u(x_0))^{-1}qu \\ &= (u(x_0))^{-1}(\Delta u - qu) \\ &= (u(x_0))^{-1}Lu = 0 \text{ em } A_R, \end{aligned}$$

uma vez que  $Lu = 0$  em  $A_R$ . Assim,

$$\begin{cases} Lg_R = 0 & \text{em } A_R; \\ g_R(x_0) = 1, g_R > 0 & \text{em } \partial A_R. \end{cases} \quad (4.7)$$

Pela desigualdade de Harnack (veja teorema 20, p, 199 de [11]), existe uma constante  $c$  tal que qualquer compacto  $K \subset A_R$ , temos

$$\sup_K g_R \leq c \inf_K g_R. \quad (4.8)$$

Como  $\inf_K g_R \leq g_r(x_0) = 1$ , segue da desigualdade (4.8) que

$$g_R \leq c \text{ em } K.$$

Daí, pelas estimativas de Schauder interiores (veja [11], teorema 6.2, p 90) garantimos que as derivadas de ordem menor ou igual a dois de  $g_R$  são equicontínuas. Logo, segue do teorema de Ascoli-Arzelá que podemos escolher  $R_j \rightarrow +\infty$  tal que  $(g_{R_j})$  converge uniformemente para



uma função  $g$  em  $K$ , e por conseguinte,

$$Lg_{R_i} \rightarrow Lg \text{ em } K.$$

Sendo assim, acabamos de obter uma função  $g$  satisfazendo  $Lg = 0$  e  $g(x_0) = 1$ . Por fim, como  $g$  não é identicamente nula e, pela convergência uniforme,  $g \geq 0$ , segue do princípio do máximo que  $g > 0$  terminando assim a demonstração.  $\square$

Nosso próximo resultado mostrará que o índice pode ser encontrado com a dimensão de um espaço de autofunções  $L^2$  definidos globalmente em  $M$ .

**Proposição 4.1.2.**  *$M$  tem índice finito se, e somente se, existe um subespaço de dimensão finita  $W$  de  $L^2(M)$  tendo uma base ortonormal  $f_1, \dots, f_k$  consistindo de autofunções, com autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , respectivamente. Cada  $\lambda_i$  é negativo e  $Q(\phi) \geq 0$  para todo  $\phi \in C_0^\infty(M) \cap W^\perp$ . Além disso, se  $Ind(M) < \infty$ , então  $dim(W) = Ind(M)$ .*

*Demonstração.* Suponha que exista um subespaço de dimensão finita  $W$  de  $L^2(M)$  tendo uma base ortonormal  $f_1, \dots, f_k$  consistindo de autofunções, com autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , respectivamente. Cada  $\lambda_i$  é negativo e  $Q(\phi) \geq 0$  para todo  $\phi \in C_0^\infty(M) \cap W^\perp$ . Tome agora qualquer ponto  $p \in M$  e  $R$  suficientemente grande. Se  $Ind(B_R(p)) > dim(W)$ , então existe um  $\phi \in C_0^\infty(M) \cap W^\perp$  tal que  $\phi$  é uma outra autofunção de  $L$  com autovalor  $\lambda$  negativo, ou seja,

$$Q(\phi) = - \int_{B_R(p)} \phi L\phi = \lambda \int_{B_R(p)} \phi^2 < 0$$

o que é uma contradição, e com isso  $Ind(M) \leq dim(W)$ . Portanto,  $M$  tem índice finito.

Agora, suponha que  $M$  tenha índice finito, pela proposição (4.1.1) existe uma bola geodésica  $B_{R_0}(p)$  tal que  $M - B_{R_0}(p)$  é estável. Seja  $R > R_0 + 6$  e seja  $\eta$  uma função tal que

$$\eta = 0 \text{ em } B_R(p)$$

$$\eta = 1 \text{ em } M - B_{2R}(p)$$

e

$$|\nabla\eta| \leq \frac{6}{R}.$$

Usando a estabilidade de  $M - B_{R_0}(p)$  e usando a desigualdade de estabilidade temos que

$$\begin{aligned} \int_M q(\eta\phi)^2 dM &\leq \int_M |\nabla(\eta\phi)|^2 dM = \int_M |\eta\nabla\phi + \phi\nabla\eta|^2 dM \\ &= \int_M (\eta^2|\nabla\phi|^2 + 2\eta\phi\nabla\phi \cdot \nabla\eta + \phi^2|\nabla\eta|^2) dM, \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde  $\phi$  é uma função  $C_0^\infty(M)$ .

Com a escolha do  $\eta$  acima, e adicionando  $Q(\phi)$  em ambos os membros da desigualdade (4.9), temos que

$$\int_M q(\eta\phi)^2 dM + \int_M (|\nabla\phi|^2 - q\phi^2) dM \leq Q(\phi) + \int_M (\eta^2|\nabla\phi|^2 + 2\eta\phi\nabla\phi \cdot \nabla\eta + \phi^2|\nabla\eta|^2) dM$$

assim,

$$\int_M (1 - \eta^2)|\nabla\phi|^2 dM - \int_M (1 - \eta^2)q\phi^2 dM \leq Q(\phi) + \int_M 2\eta\phi\nabla\phi \cdot \nabla\eta dM + \int_M \phi^2|\nabla\eta|^2 dM$$

e com isso,

$$\begin{aligned} \int_{B_R(p)} |\nabla\phi|^2 dM + \int_{A_R} (1 - \eta^2)|\nabla\phi|^2 dM &\leq 2Q(\phi) - \int_M (|\nabla\phi|^2 - q\phi^2) dM + \int_M (1 - \eta^2)q\phi^2 dM + \\ &+ \int_M 2\eta\phi\nabla\phi \cdot \nabla\eta dM + \int_M \phi^2|\nabla\eta|^2 dM. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade da média aritmética-geométrica em  $2\eta\phi\nabla\phi \cdot \nabla\eta$  e usando o fato de que  $M - B_{2R}(p)$  é estável, temos que

$$\begin{aligned} \int_{B_R(p)} |\nabla\phi|^2 dM &\leq 2Q(\phi) - \int_{B_{2R}(p)} (|\nabla\phi|^2 - q\phi^2) dM + \int_{B_{2R}(p)} (1 - \eta^2)q\phi^2 dM + \\ &+ \int_M |\nabla\eta|(\phi^2 + |\nabla\phi|^2) dM + \int_M \phi^2|\nabla\eta|^2 dM. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Podemos escolher  $\eta$  acima de tal forma que  $|\nabla\eta|^2 \leq \frac{4(1 - \eta^2)}{R^2}$  em  $B_{2R}(p)$ . De fato, tome  $\eta_1$ , tal que,  $\eta_1 = 0$  em  $B_R(p)$ ,  $\eta_1 = 1$  em  $M - B_{2R}(p)$  e  $|\nabla\eta_1| \leq \frac{1}{R}$ . Estabeleça  $\eta = 1 - (1 - \eta_1)^2$ , então,  $|\nabla\eta|^2 = 4(1 - \eta_1)^2|\nabla\eta_1|^2 \leq \frac{4(1 - \eta_1)}{R^2} \leq \frac{4(1 - \eta^2)}{R^2}$  e sabemos também, pela escolha do

$R$  que  $|\nabla\eta| \leq 1$ . Logo, (4.10) torna-se:

$$\begin{aligned}
\int_{B_R(p)} |\nabla\phi|^2 dM &\leq 2Q(\phi) - \int_{B_{2R}(p)} (|\nabla\phi|^2 - q\phi^2) dM + \int_{B_{2R}(p)} (1 - \eta^2) q\phi^2 dM + \\
&\quad \int_{B_{2R}(p)} |\nabla\eta|\phi^2 dM + \int_{B_{2R}(p)} |\nabla\phi|^2 dM + \int_M \phi^2 |\nabla\eta|^2 dM \\
&\leq 2Q(\phi) + \int_{B_{2R}(p)} q\phi^2 dM + \int_{B_{2R}(p)} (1 - \eta^2) q\phi^2 dM + \\
&\quad \int_{B_{2R}(p)} \frac{6}{R} \phi^2 dM + \int_{B_{2R}(p)} \phi^2 \frac{4(1 - \eta^2)}{R^2} dM \\
&\leq 2Q(\phi) + \int_{B_{2R}(p)} 2(q + 1)\phi^2 dM.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{B_R(p)} |\nabla\phi|^2 dM \leq 2Q(\phi) + C \int_{B_{2R}(p)} \phi^2 dM, \quad (4.11)$$

onde  $C$  depende do máximo de  $q$  em  $B_{2R}(p)$ .

Uma consequência imediata de (4.11) é

$$-C \int_M \phi^2 dM \leq 2Q(\phi).$$

Se  $\text{Ind}(M) = m$ , então existe um  $R_1$  suficientemente grande, tal que,  $m = \text{Ind}(B_\rho(0))$ , para todo  $\rho > R_1$ . Seja  $f_{1,\rho}, \dots, f_{m,\rho}$  uma base ortonormal de autofunções com autovalores  $\lambda_{1,\rho}, \dots, \lambda_{m,\rho}$ , respectivamente, onde cada  $\lambda_{i,\rho}$  é negativo. O  $\max\{\lambda_{1,\rho}, \dots, \lambda_{m,\rho}\}$  é uma função decrescente de  $\rho$  e, portanto, existe um  $\epsilon_0 > 0$  tal que  $\lambda_{i,\rho} < -\epsilon_0$  com  $i = 1, \dots, m$  e  $\rho > R_1$ . Estendendo  $f_{i,\rho}$  a zero fora de  $B_\rho(p)$  e usando  $\phi = f_{i,\rho}$  (usualmente,  $\phi$  pode ser tomado como uma aproximação  $C^\infty$  de funções  $f_{i,\rho}$ ), segue-se que  $\lambda_{i,\rho} \geq -c$  para  $i = 1, \dots, m$  e  $\rho > R_1$ . Portanto,  $\lambda_{i,\rho} \in [-c, -\epsilon_0]$ .

Voltando para a equação (4.9) com  $\phi = f_{i,\rho}$ , observe que

$$\begin{aligned}
\int_M 2\eta f_{i,\rho} \nabla f_{i,\rho} \cdot \nabla \eta dM &= \frac{1}{2} \int_M \nabla f_{i,\rho}^2 \cdot \nabla \eta^2 dM = -\frac{1}{2} \int_M \eta^2 \Delta f_{i,\rho}^2 dM \\
&= -\frac{1}{2} \int_M \eta^2 (f_{i,\rho} \Delta f_{i,\rho} + |\nabla f_{i,\rho}|^2) dM
\end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned} \int_M q(\eta f_{i,\rho})^2 dM &\leq \int_M (\eta^2 |\nabla f_{i,\rho}|^2 + 2\eta f_{i,\rho} \nabla f_{i,\rho} \cdot \nabla \eta + f_{i,\rho}^2 |\nabla \eta|^2) dM \\ &\leq \int_M (\eta^2 |\nabla f_{i,\rho}|^2 - \eta^2 (f_{i,\rho} \Delta f_{i,\rho} + |\nabla f_{i,\rho}|^2) + f_{i,\rho}^2 |\nabla \eta|^2) dM. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_M \eta^2 f_{i,\rho} L f_{i,\rho} dM \leq \int_M \eta^2 (f_{i,\rho} \Delta f_{i,\rho} + q(f_{i,\rho})^2) dM \leq \int_M f_{i,\rho}^2 |\nabla \eta|^2 dM.$$

Assim,

$$-\lambda_{i,\rho} \int_M \eta^2 f_{i,\rho}^2 dM \leq \int_M f_{i,\rho}^2 |\nabla \eta|^2 dM$$

como  $(-\lambda_{i,\rho}) \leq -\epsilon_0$ , isso implica que

$$\int_{M-B_{2R}(p)} f_{i,\rho}^2 dM + \int_{B_{2R}(p)} \eta^2 f_{i,\rho}^2 dM \leq \int_M \frac{4(1-\eta^2)}{R^2} f_{i,\rho}^2 dM$$

e portanto,

$$\int_{M-B_{2R}(p)} f_{i,\rho}^2 dM \leq cR^{-2} \quad (4.12)$$

para todo  $R \in [R_0, \frac{1}{2}\rho]$ .

Por outro lado, (4.11) implica que

$$\begin{aligned} \int_{B_R(p)} |\nabla f_{i,\rho}|^2 dM &\leq 2Q(f_{i,\rho}) + C \int_{B_{2R}(p)} f_{i,\rho}^2 dM = -2 \int_M f_{i,\rho} L f_{i,\rho} dM + C \int_{B_{2R}(p)} f_{i,\rho}^2 dM \\ &\leq 2c \int_M f_{i,\rho}^2 dM + C \int_{B_{2R}(p)} f_{i,\rho}^2 dM = c_1 \int_{B_{2R}(p)} f_{i,\rho}^2 dM + 2c \int_{M-B_{2R}(p)} f_{i,\rho}^2 dM \\ &\leq c_1 \int_{B_{2R}(p)} f_{i,\rho}^2 dM + c(R) \end{aligned}$$

assim temos que

$$\begin{aligned}
\int_{B_R(p)} (f_{i,\rho}^2 + |\nabla f_{i,\rho}|^2) dM &\leq \int_{B_{2R}(p)} f_{i,\rho}^2 dM + \int_{B_R(p)} |\nabla f_{i,\rho}|^2 dM \\
&\leq \int_{B_{2R}(p)} f_{i,\rho}^2 dM + c_1 \int_{B_{2R}(p)} f_{i,\rho}^2 dM + c(R) \\
&\leq (c_1 + 1) \int_{B_{2R}(p)} f_{i,\rho}^2 dM + c(R) \leq \bar{c}(R).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{B_R(p)} (f_{i,\rho}^2 + |\nabla f_{i,\rho}|^2) dM \leq \bar{c}(R). \quad (4.13)$$

As desigualdades (4.12) e (4.13) juntamente com o fato de que o espaço sobolev  $H^{1,2}(B_R(0))$  é um compactamente imerso em  $L^2(B_R(0))$  implicam que existe uma subsequência  $R_j \rightarrow \infty$  tal que, para  $i = 1, \dots, m$ , vale

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_{i,R_j} = f_i \text{ em } L^2(M).$$

Segue-se que  $f_1, \dots, f_m$  são autofunções ortonormais em  $L^2(M)$  com autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in [-c, -\epsilon_0]$ . Seja  $W$  um espaço gerado em  $L^2(M)$  e observe que se  $\phi \in C_0^\infty(M) \cap W^\perp$  então,

$$\phi = \sum_{i=1}^m a_{i,\rho} f_{i,\rho} + \phi_\rho,$$

com  $\phi_\rho$  ortogonal a  $f_{1,\rho}, \dots, f_{m,\rho}$ . Assim,

$$\int_M \phi f_{i,\rho} dM = \int_M \sum_{j=1}^m a_{i,\rho} f_{j,\rho} f_{i,\rho} dM + \int_M \phi_\rho f_{i,\rho} dM = \sum_{j=1}^m a_{i,\rho} \int_M f_{j,\rho} f_{i,\rho} dM = a_{i,\rho},$$

ou seja,  $a_{i,\rho} = \int_M \phi f_{i,\rho} dM$ . Da convergência em  $L^2(M)$  temos que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_{i,\rho_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_M \phi f_{i,\rho_j} dM = \int_M \phi f_i dM = 0.$$

Portanto, desde que  $\rho$  seja suficientemente grande, tal que  $\text{spt}\phi \subset B_\rho(p)$ ,

$$\begin{aligned}
Q(\phi) &= - \int_M \left( \sum_{i=1}^m a_{i,\rho} f_{i,\rho} + \phi_\rho \right) L \left( \sum_{j=1}^m a_{j,\rho} f_{j,\rho} + \phi_\rho \right) dM \\
&= - \int_M \sum_{i=1}^m a_{i,\rho} f_{i,\rho} L \sum_{j=1}^m a_{j,\rho} f_{j,\rho} dM - \int_M \sum_{i=1}^m a_{i,\rho} f_{i,\rho} L \phi_\rho dM \\
&\quad - \int_M \phi_\rho L \sum_{j=1}^m a_{j,\rho} f_{j,\rho} dM - \int_M \phi_\rho L \phi_\rho dM \\
&= \sum_{i=1}^m a_{i,\rho}^2 \lambda_{i,\rho} \int_M f_{i,\rho}^2 dM - \sum_{i=1}^m a_{i,\rho} \int_M f_{i,\rho} L \phi_\rho dM \\
&\quad + \sum_{j=1}^m a_{j,\rho} \lambda_{j,\rho} \int_M \phi_\rho f_{j,\rho} dM + Q(\phi_\rho) \\
&= \sum_{i=1}^m a_{i,\rho}^2 \lambda_{i,\rho} - \sum_{i=1}^m a_{i,\rho} \int_M f_{i,\rho} L \phi_\rho dM + Q(\phi_\rho) \\
&= \sum_{i=1}^m a_{i,\rho}^2 \lambda_{i,\rho} + Q(\phi_\rho) \geq -\epsilon_0 |a_{i,\rho}|^2,
\end{aligned}$$

onde para a última igualdade foi usada a segunda identidade de Green (veja [11], p. 17).

Fazendo  $\rho \rightarrow \infty$  chegamos a  $Q(\phi) \geq 0$  tal como exigido.  $\square$

Pela proposição (4.1.1), para  $M$ , uma superfície mínima completa com índice finito em  $N^3$ , existe uma função positiva  $u$  onde  $Lu = 0$  em  $M - C$ .

**Teorema 4.1.1.** *Seja  $N^3$  uma variedade com curvatura escalar não-negativa, e seja  $M$  uma superfície mínima, completa e orientável em  $N$ . Se  $M$  tem índice finito, então, a métrica  $u^2 ds^2$  é uma métrica completa em  $M$  com curvatura Gaussiana não-negativa fora de  $C$ . Em particular, segue-se que  $M$  é difeomorficamente conforme a uma superfície completa de Riemann menos um número finito de pontos.*

*Demonstração.* Como  $M$  tem índice finito, pela Proposição (4.1.1), existem uma função positiva  $u$  e algum subconjunto compacto  $C$  de  $M$  tal que, em  $M - C$ ,  $Lu = 0$ . Seja  $ds^2$  a métrica original em  $M$ . Para essa métrica, temos a métrica conforme  $\tilde{d}s^2 = u^2 ds^2$  em  $M$ .

Afirmamos que existe uma geodésica  $\gamma(t) : [0, \infty) \rightarrow M - C$  na métrica  $\tilde{d}s^2$ , onde  $t$  é comprimento de arco na métrica  $ds^2$ . De fato, escolhamos uma exaustão de  $M = \cup B_{R_i}(p)$  ( $R_i \rightarrow \infty, i \rightarrow \infty$ ), tal que  $B_{R_i}(p)$  denota a bola geodésica de  $M$  na métrica  $ds^2$ , de raio  $R_i$  centrada em  $p \in M$ . Então, para cada  $i$  existe um segmento de geodésica  $\gamma_i(t)$  que realiza a

distância de  $p$  à fronteira  $\partial B_{R_i}(p)$  na métrica  $\tilde{d}s^2 = u^2 ds^2$ , tal que  $t$  é o comprimento de arco de  $\gamma_i$  na métrica  $ds^2$ . Para ver isso, defina  $u_{R_i} = u + \eta$  onde  $\eta$  é suave,  $\eta = 0$  para  $|x| < R_i$  e  $\eta = 1$  para  $|x| > R_i + 1$ . Então, como  $u_{R_i}$  é limitado inferiormente, a métrica  $u_{R_i}^2 ds^2$  é completa, assim que essas geodésicas existam. Como  $B_{R_i}$  é compacto, podemos ligar  $p$  a qualquer ponto do bordo de  $B_{R_i}(p)$  com a menor geodésica na métrica  $u_{R_i}^2 ds^2$ . Seja  $\rho_i \in \partial B_{R_i}$  tal que,  $\rho_i$  está mais próximo de  $p$  e seja  $\gamma_i$  a menor distância de  $p$  até  $\rho_i$ . Note que  $\gamma_i$  deve ficar inteiramente dentro de  $B_{R_i}(p)$  ou outro ponto estaria mais próximo de  $p$ . Como  $u_{R_i} = u$  em  $B_{R_i}(p)$ ,  $\gamma_i$  é uma geodésica na métrica  $u^2 ds^2$ .

Vamos supor que  $\gamma_i$  está parametrizado pelo comprimento de arco na métrica  $ds^2$ . Agora, vamos tomar uma subsequência de  $R_i \rightarrow \infty$  tal que o vetor tangente convirja para um limite  $v$ . Isto é,  $\gamma'_{R_i} \rightarrow v$ , assim, pela dependência de soluções em relação aos parâmetros (teoria de EDO), estas geodésicas convergem em um conjunto compacto de  $[0, \infty)$  para uma geodésica limitada  $\gamma$  que minimize a  $\tilde{d}s^2$  distância entre qualquer dois pontos e é parametrizado pelo comprimento de arco na métrica  $ds^2$ .

Como  $\gamma$  é semi-geodésica, segue-se que  $\gamma \cap C$  está contido em  $\gamma([0, l])$  para algum  $l > 0$ . Portanto, podemos substituir  $\gamma$  por  $\gamma|_{[l+1, \infty)}$  e assumir que  $\gamma \subset M - C$ . Note que, pela construção de  $\gamma$ , a integrabilidade de  $\tilde{d}s^2$  irá seguir se pudermos mostrar que  $\gamma$  tem comprimento  $\tilde{d}s^2$  infinito, isto é, devemos mostrar que

$$\int_0^\infty u(\gamma(s)) ds = \infty.$$

Seja  $\phi \cdot \vec{n}$  uma variação de  $\gamma$  dada por onde  $\vec{n}$  é normal a  $\gamma$  e  $\phi$  tem suporte compacto em  $(0, \infty)$ . Como  $\gamma$  é uma geodésica minimizante em  $\tilde{d}s^2 = u^2 ds^2$ , a segunda variação do comprimento de arco (veja [15]) dará

$$\int_0^\infty \left( \left( \frac{d\phi}{\tilde{d}s} \right)^2 - \tilde{K} \phi^2 \right) \tilde{d}s^2 \geq 0 \quad (4.14)$$

desde que,  $\frac{d\phi}{\tilde{d}s} = \frac{d\phi}{ds} \cdot \frac{ds}{\tilde{d}s} = u^{-1} \frac{d\phi}{ds}$  e

$$\tilde{K} = u^{-2}(K - \Delta \log u). \quad (4.15)$$

Assim, (4.14) torna-se

$$\int_0^\infty u^{-1} \left( \frac{d\phi}{ds} \right)^2 ds^2 \geq \int_0^\infty u^{-2} (K - \Delta \log u) \phi^2 ds \quad (4.16)$$

Portanto, como  $u > 0$  é uma solução para  $Lu = \Delta u - Ku + (S + \frac{1}{2}|A|^2) = 0$ , sendo  $K$  a curvatura Gaussiana de  $M$ ,  $S$  a curvatura escalar de  $N$ , então  $\Delta u \leq Ku$  e

$$\Delta \log u = \frac{u\Delta u - |\nabla u|^2}{u^2} \leq K - \frac{|\nabla u|^2}{u^2}. \quad (4.17)$$

Primeiro, note que, de (4.15) e (4.17), podemos concluir que  $\tilde{K} \geq 0$ , e observando que  $\frac{|u'|^2}{u^3} \leq \frac{K - \Delta \log u}{u}$  e usando (4.16), (4.15) e (4.17) temos que

$$\int_0^\infty \frac{|u'|^2}{u^3} \phi^2 ds \leq \int_0^\infty \frac{K - \Delta \log u}{u} \phi^2 ds \leq \int_0^\infty u \tilde{K} \phi^2 ds \leq \int_0^\infty u^{-1} (\phi'(s))^2 ds. \quad (4.18)$$

Agora vamos mostrar que  $\int_0^\infty u ds = \infty$ . Seja  $\phi = u\psi$ , onde  $\psi$  tem suporte compacto em  $(0, \infty)$ , então,

$$\phi' = u'\psi + u\psi'$$

e

$$u^{-1}(\phi')^2 = u^{-1}(u'\psi + u\psi')^2 = u^{-1}(u')^2\psi^2 + u(\psi')^2 + 2u'\psi\psi'$$

assim, por (4.18),

$$\int_0^\infty \frac{|u'|^2}{u^3} \phi^2 ds = \int_0^\infty \frac{|u'|^2}{u} \psi^2 ds \leq \int_0^\infty \frac{|u'|^2}{u} \psi^2 + u(\psi')^2 + 2u'\psi\psi' ds.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^\infty u(\psi')^2 + 2u'\psi\psi' ds = \int_0^\infty u(\psi')^2 + 2 \int_0^\infty u'\psi\psi' ds \\ &= \int_0^\infty u(\psi')^2 - 2 \int_0^\infty u(\psi')^2 - u\psi\psi'' ds = - \int_0^\infty u(\psi')^2 + 2u\psi\psi'' ds, \end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade foi usada integração por partes.



Agora, escolhendo  $\psi(t) = t\zeta(t)$  onde  $\zeta$  tem suporte compacto em  $(0, \infty)$  temos

$$\psi' = \zeta + t\zeta'$$

e

$$\psi'' = 2\zeta' + t\zeta''.$$

Assim,

$$\int_0^\infty -u(\zeta + t\zeta')^2 - 2ut\zeta(t)(2\zeta' + t\zeta'')ds \geq 0,$$

com isso,

$$\int_0^\infty u\zeta^2 \leq \int_0^\infty (-6t\zeta\zeta' - t^2(\zeta')^2 - 2t^2\zeta\zeta'')uds.$$

Escolhendo  $\zeta$ , tal que

$$\zeta(t) = 1 \text{ para } 0 \leq t \leq R$$

$$\zeta(t) = 0 \text{ para } t > 2R$$

e  $\zeta'$  e  $\zeta''$  limitadas por  $\frac{c}{R}$  e  $\frac{c}{R^2}$ , respectivamente, para  $R \leq t \leq 2R$ . Então,  $|t\zeta'| \leq c$  e  $|t^2\zeta''| \leq c$ , e assim

$$\int_0^R uds \leq \int_0^\infty u\zeta^2 \leq \int_0^\infty (-6t\zeta\zeta' - t^2(\zeta')^2 - 2t^2\zeta\zeta'')uds \leq C \int_R^\infty uds.$$

Como  $C$  não depende de  $R$ , essa inequação implica que

$$\int_0^\infty uds = \infty$$

assim a métrica  $\tilde{ds}^2 = u^2ds^2$  é uma métrica completa em  $M$  com curvatura gaussiana não negativa  $\tilde{K}$  em  $M - C$ .

Resta mostrar que  $M$  é conformemente uma superfície de Riemann menos um número finito de pontos. Pela desigualdade de Cohn-Vossen (veja [2]) e a não-negatividade da Curvatura de Gauss em  $M - C$ , temos que

$$c < \int_M Kdv \leq 2\pi\chi,$$

onde  $c$  é uma constante e  $\chi$  é a característica de Euler de  $M$ . Portanto,  $M$  é topologicamente finito, assim  $M$  é uma superfície de Riemann menos um número finito de discos.

Seja  $C_r$  o limite do disco de raio  $r$  centrado em  $p$ , o qual foi retirado, e seja  $\lambda(z)|dz|^2$  a métrica na bola de raio 1, contendo  $C_r$ . De [20], p.76 a curvatura Gaussiana de  $M - C$  é dada por  $K = -\frac{\Delta \log \lambda}{\lambda^2}$ , como ela é positiva, então

$$\Delta \log \frac{1}{\lambda} \geq 0,$$

assim  $\log \frac{1}{\lambda}$  é uma função subharmônica. Seja  $a = \max \log \frac{1}{\lambda}$  em  $C_1$  e seja  $b_\epsilon = \max \log \frac{1}{\lambda}$  em  $C_{r+\epsilon}$ .

Sejam  $(x, y)$  as coordenadas do ponto  $z$  entre  $C_1$  e  $C_r$ . Por um lado, temos que  $|\nabla x|^2 = \frac{1}{\lambda(z)}$ . De fato, seja  $\alpha : (-a, a) \rightarrow A_r^1$ , onde  $A_r^1$  é a região entre  $C_1$  e  $C_r$ , uma curva diferenciável dada por  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ , onde  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t))$  e seja  $x$  a função coordenada. Assim,

$$\langle \nabla x, \alpha'_1(0) \varphi_u \rangle = \frac{d}{dt} (x \circ \alpha) |_{t=0} = \alpha'_1(0)$$

e

$$\langle \nabla x, \varphi_v \rangle = 0.$$

Assim, sendo  $\nabla x = P \varphi_u$  temos que

$$\alpha'_1(0) = \langle \nabla x, \alpha'_1(0) \varphi_u \rangle = \langle P \varphi_u, \alpha'_1(0) \varphi_u \rangle = P \alpha'_1(0) \lambda$$

Logo,  $P = \frac{1}{\lambda}$ . Portanto,

$$|\nabla x|^2 = \langle \nabla x, \nabla x \rangle = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \lambda = \frac{1}{\lambda}.$$

Por outro lado, a estimativa de Cheng-Yau (Veja [15] teorema 6.1 e corolário 6.3) garante que

$$|\nabla x|^2 \leq \frac{c}{\rho^2(z)}.$$

Portanto,

$$\frac{1}{\lambda(z)} \leq \frac{c}{\rho^2(z)},$$

onde  $\rho$  é a distância geodésica em  $C_1$ , e  $c$  é uma constante. Consequentemente,

$$b_\epsilon = \max_{C_{r+\epsilon}} \log \frac{1}{\lambda} \leq \max_{C_{r+\epsilon}} \log \frac{c}{\rho^2(z)} \leq \log \frac{c}{\min_{C_{r+\epsilon}} \rho^2(z)}$$

Como a métrica é completa,  $\rho \rightarrow \infty$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , assim,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} b_\epsilon = -\infty.$$

Defina  $h_\epsilon(z) = \alpha_\epsilon \log |z| + a$ , onde  $\alpha_\epsilon = \frac{b_\epsilon - a}{\log(r + \epsilon)}$ . Então, para todo  $0 < \epsilon \leq 1$ , temos que  $h_\epsilon \geq \log \frac{1}{\lambda}$  em  $C_{r+\epsilon}$ , já que, em  $C_{r+\epsilon}$  vale  $\frac{\log |z|}{\log(r + \epsilon)} \leq 1$ ,  $h_\epsilon \geq \log \frac{1}{\lambda}$  em  $C_1$  e  $h_\epsilon$  é harmônica. Fixe  $z$  em  $A_r^1$ . Se  $r > 0$  então vale que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_\epsilon(z) = -\infty$ , mas isso é uma contradição, já que,  $\log \frac{1}{\lambda(z)}$  tem um valor finito. Assim  $r = 0$  e o disco removido é um ponto. □

**Corolário 4.1.1.** *Se  $N^3$  tem curvatura de Ricci não negativa e  $M$  é um superfície mínima completa e orientável com índice finito em  $N$ , então*

$$\int_M |A|^2 dM < \infty.$$

*Demonstração.* Devemos mostrar que

$$\int_{M-C} |A|^2 dM < \infty$$

onde  $C$  é um conjunto compacto, tal que  $M - C$  é estável. Como o  $\text{Ric}(e_3) \geq 0$  a estabilidade de  $M - C$  dará

$$\int_{M-C} |A|^2 \phi^2 dM \leq \int_{M-C} (\text{Ric}(e_3) + |A|^2) \phi^2 dM \leq \int_{M-C} |\nabla \phi|^2 dM$$

para todo  $\phi$  com suporte compacto em  $M - C$ . Pelo teorema (4.1.1),  $M = \overline{M} - \{p_1, \dots, p_k\}$  e em cada  $p_i$ ,  $M$  é conformemente equivalente a um disco furado, que denotaremos por  $D_i$ . Tomando o raio do disco suficientemente pequeno podemos, sem perda de generalidade, supor que cada  $D_i$  está compactamente contido em  $M - C$ .

Fixe  $\phi$  tal que  $\phi = 0$  em  $C$ ,  $\phi = 1$  em  $D_i$  e  $\phi$  é linear em  $(M - C) - \cup_{i=1}^k D_i$ . Em cada  $D_i$ , seja

$\eta_i : D_i \rightarrow \mathbb{R}$  a função da distância radial definida por

$$\eta_i(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } |z| \in (0, \epsilon); \\ \frac{r - \epsilon}{\epsilon} & \text{se } |z| \in [\epsilon, 2\epsilon] \\ 1 & \text{se } |z| \in (2\epsilon, R_i) \end{cases} \quad \begin{array}{l} r = |z| \\ R_i = \text{raio de } D_i. \end{array}$$

Então,

$$\int_{M-C} |A|^2 \eta^2 \phi^2 dM \leq \int_{M-C} |\nabla \eta \phi|^2 dM = \int_{M-C} (\phi^2 |\nabla \eta|^2 + 2 \langle \eta \nabla \eta, \phi \nabla \phi \rangle + \eta^2 |\nabla \phi|^2) dM$$

e usando a média aritmética-geométrica temos que

$$2 \langle \eta \nabla \eta, \phi \nabla \phi \rangle \leq 2 |\eta| |\nabla \eta| |\phi| |\nabla \phi| \leq \phi^2 |\nabla \eta|^2 + \eta^2 |\nabla \phi|^2,$$

assim,

$$\int_{M-C} |A|^2 \eta^2 \phi^2 dM \leq 2 \int_{M-C} (\phi^2 |\nabla \eta|^2 + \eta^2 |\nabla \phi|^2) dM.$$

Com o  $\phi$  acima, defina  $\eta = \eta_i$  em cada  $D_i$  e 1 em  $(M - C) - \cup_{i=1}^k D_i$ .

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{M-C} |A|^2 \eta^2 \phi^2 dM &= \int_{(M-C) - \cup_{i=1}^k D_i} |A|^2 \phi^2 dM + \sum_{i=1}^k \int_{D_i} |A|^2 \eta_i^2 \phi^2 dM \\ &\leq \int_{(M-C) - \cup_{i=1}^k D_i} |\nabla \phi|^2 dM + \sum_{i=1}^k \int_{D_i} (\phi^2 |\nabla \eta_i|^2 + \eta_i^2 |\nabla \phi|^2) dM \\ &\leq c' + \sum_{i=1}^k \int_{D_i} |\nabla \eta_i|^2 dM \leq c' + \sum_{i=1}^k \int_{D_i} \frac{1}{\epsilon^2} dM \leq c' + \sum_{i=1}^k \beta \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2} \leq c. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{M-C} |A|^2 \eta^2 \phi^2 dM \leq c$$

independente de  $\epsilon$ .

Fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$  temos que

$$\int_{M-C} |A|^2 dM \leq c$$

como desejado. □

## 4.2 Superfícies Mínimas com Índice Finito no $\mathbb{R}^3$

No caso em que  $N$  é o  $\mathbb{R}^3$ , o operador estabilidade  $L$  é dado por  $L = \Delta - 2K$ .

Provaremos nesta seção um resultado que faz a associação entre a finitude do índice e a finitude da curvatura total, mas antes precisaremos de alguns resultados, demonstrados em [20].

**Teorema 4.2.1.** *Seja  $M$  uma variedade bidimensional completa e Riemanniana cuja curvatura de Gauss satisfaz*

$$K \leq 0$$

e

$$\int_M |K| < \infty.$$

Então existe uma variedade bidimensional compacta  $\overline{M}$ , um número finito de pontos  $\{p_1, \dots, p_k\}$  em  $\overline{M}$  e uma isometria entre  $M$  e  $\overline{M} - \{p_1, \dots, p_k\}$ . Além disso a aplicação de Gauss  $g : M \rightarrow S^2(1)$  estende-se a uma aplicação meromorfa  $g : \overline{M} \rightarrow S^2(1)$ .

*Demonstração.* Vide [20], Teorema 9.1 e lema 9.5, p. 81 – 82 □

**Teorema 4.2.2.** *Seja  $M$  uma superfície mínima completa e orientável no  $\mathbb{R}^3$ . Assim,  $M$  tem índice finito, se, e somente se,  $M$  tem curvatura total finita.*

*Demonstração.* Suponhamos que  $M$  tenha índice finito no  $\mathbb{R}^3$ , sabendo que em  $\mathbb{R}^3$ ,  $|A|^2 = -2K$  e usando o corolário (4.1.1), índice finito implica que

$$\int_M |A|^2 dM < \infty,$$

assim

$$\int_M |K| dM < \infty.$$

Reciprocamente, suponhamos que  $M$  tem curvatura total finita, assim temos que, pelo teorema (4.2.1),  $M$  é conformemente uma superfície de Riemann  $\overline{M}$  com furos  $\{p_1, \dots, p_k\}$  e a aplicação de Gauss  $g : M \rightarrow S^2$  se estende holomorficamente à aplicação  $g : \overline{M} \rightarrow S^2$ .

Vamos mostrar que o índice de  $M$  depende somente da aplicação de Gauss em  $M$ , não do fator métrico. Seja  $ds^2 = \mu|dz|^2$  a métrica de  $M$ . Então,

$$|\nabla g|^2 = \frac{1}{\mu} |\nabla_0 g|^2,$$

onde  $\nabla$  denota o gradiente na métrica  $\mu$  e  $\nabla_0$  denota o gradiente Euclidiano. Seja  $\{e_1, e_2\}$  um referencial ortonormal em  $M$  e  $v$  um vetor normal unitário. Então  $h_{ij} = \langle \nabla_{e_i} v, e_j \rangle$  define a segunda forma fundamental de  $M$  e

$$|\nabla g|^2 = \sum_{ij} \langle h_{ij} e_i, e_j \rangle^2 = \sum h_{ij}^2 = -2K.$$

Denotaremos o operador  $L$  na métrica  $\mu|dz|^2$  por  $L_\mu$ .

$$L_\mu = \Delta - 2K = \Delta - |\nabla g|^2 = \frac{1}{\mu} \Delta_0 + \frac{1}{\mu} |\nabla_0 g|^2$$

e

$$\begin{aligned} Q_\mu(\phi) &= - \int_M \phi L_\mu \phi ds = - \int_M \phi \left( \frac{1}{\mu} \Delta_0 + \frac{1}{\mu} |\nabla_0 g|^2 \right) \phi \mu dx dy \\ &= \int_M \left( \frac{1}{\mu} |\nabla_0 \phi|^2 - \frac{1}{\mu} |\nabla_0 g|^2 \phi^2 \right) \mu dx dy \\ &= \int_M |\nabla_0 \phi|^2 - |\nabla_0 g|^2 \phi^2 dx dy \end{aligned}$$

para todo  $\phi$  com suporte compacto em  $M$ .

Assim, para uma outra métrica  $\tilde{\mu}|dz|^2$  em  $M$  temos que

$$Q_{\tilde{\mu}}(\phi) = Q_\mu(\phi).$$

Se  $\tilde{\mu}|dz|^2$  é uma função suave em  $\bar{M}$  então

$$L_\mu = \frac{1}{\mu} \left( \Delta_0 + |\nabla_0 g|^2 \right) = \frac{1}{\mu} (\tilde{\mu} L_{\tilde{\mu}}) = \frac{\tilde{\mu}}{\mu} L_{\tilde{\mu}}.$$

Como  $g$  estende-se suavemente para  $p_1, \dots, p_k$ ,  $\tilde{\mu}$  é suave no infinito e  $|\nabla_0 \eta|^2$  é uma função suave limitada em  $\bar{M}$ , então,  $L_{\tilde{\mu}}$  tem espectro discreto e, portanto, índice finito na superfície de

Riemann compacta  $\bar{M}$ . Assim,

$$\text{Ind}_{L_\mu}(M) = \text{Ind}_{L_{\tilde{\mu}}}(M) \leq \text{Ind}_{L_{\tilde{\mu}}}(\bar{M}) < \infty.$$

Portanto,  $M$  tem índice finito. □

**Corolário 4.2.1.** *Seja  $\tilde{\mu}|dz|^2$  uma métrica suave em  $\bar{M}$ . Então  $\text{Ind}(M) = \text{Ind}_{L_{\tilde{\mu}}}(\bar{M})$ .*

*Demonstração.* Sejam  $d\tilde{v}^2 = \tilde{\mu}|dz|^2$  uma métrica suave em  $\bar{M}$  e  $\text{Ind}_{L_{\tilde{\mu}}}(\bar{M}) = l$ . Tome  $f_1, \dots, f_l$  funções suaves em  $\bar{M}$  no qual são autofunções em  $L_{\tilde{\mu}}$ . Construiremos um espaço  $W$  de funções  $C_0^\infty(M)$  no qual  $Q_{\tilde{\mu}}(\phi) < 0$ .

Escolha uma coordenada  $z$  centrada em  $p_j$ , e defina  $\eta_j$ , para um  $\epsilon$  suficientemente pequeno, por

$$\eta_j(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } |z| < \epsilon^2; \\ 1 & \text{se } |z| > \epsilon; \\ \frac{\log \frac{|z|}{\epsilon^2}}{\log \frac{1}{\epsilon}} & \text{se } \epsilon^2 \leq |z| \leq \epsilon. \end{cases}$$

Seja  $\eta = \eta_j$  na  $\epsilon$ -bola sobre cada  $p_j$  e 1 fora da bola. Assim, como

$$r^2 \leq r \Rightarrow \frac{1}{r^2} \geq \frac{1}{r} \Rightarrow -\frac{1}{r^2} \leq -\frac{1}{r},$$

então temos

$$\begin{aligned} \int_{\bar{M}} |\tilde{\nabla} \eta|^2 d\tilde{v} &= \frac{1}{\log^2 \frac{1}{\epsilon}} \int_{\epsilon^2}^{\epsilon} \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{\log \frac{1}{\epsilon}} \left( \frac{-1}{\log \epsilon} \int_{\epsilon^2}^{\epsilon} \frac{1}{r^2} dr \right) \\ &= \frac{1}{\log \frac{1}{\epsilon}} \left( \frac{1}{\log \epsilon} \int_{\epsilon^2}^{\epsilon} -\frac{1}{r^2} dr \right) \leq \frac{1}{\log \frac{1}{\epsilon}} \left( \frac{1}{\log \epsilon} \int_{\epsilon^2}^{\epsilon} -\frac{1}{r} dr \right) \\ &= \frac{1}{\log \frac{1}{\epsilon}} \left( \frac{1}{\log \epsilon} [-\log \epsilon + \log \epsilon^2] \right) = \frac{1}{\log \frac{1}{\epsilon}} \left( \frac{\log \epsilon}{\log \epsilon} \right) = \frac{1}{\log \frac{1}{\epsilon}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\bar{M}} |\tilde{\nabla} \eta|^2 d\tilde{v} \rightarrow 0 \text{ com } \epsilon \rightarrow 0.$$

Seja  $g_i = \eta f_i$ . Então,

$$\int_{\overline{M}} (g_i - f_i)^2 d\tilde{v} = \int_{\overline{M}} (1 - \eta)^2 f_i^2 d\tilde{v} \leq \int_{B_\epsilon(p_j)} (1 - \eta)^2 f_i^2 d\tilde{v} \leq c \int_{B_\epsilon(p_j)} d\tilde{v} < c\epsilon^2$$

assim,

$$\int_{\overline{M}} (g_i - f_i)^2 d\tilde{v} \rightarrow 0 \text{ com } \epsilon \rightarrow 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \int_{\overline{M}} |\tilde{\nabla}(g_i - f_i)|^2 d\tilde{v} &= \int_{\overline{M}} (|\tilde{\nabla}(1 - \eta)f_i|^2) d\tilde{v} = \int_{\overline{M}} (|-\tilde{\nabla}\eta \cdot f_i + \tilde{\nabla}f_i \cdot (1 - \eta)|^2) d\tilde{v} \\ &\leq \int_{\overline{M}} (|\tilde{\nabla}\eta|^2 f_i^2 + 2f_i(1 - \eta)|\tilde{\nabla}\eta||\tilde{\nabla}f_i| + (1 - \eta)^2 |\tilde{\nabla}f_i|^2) d\tilde{v} \\ &\leq 2 \int_{\overline{M}} (|\tilde{\nabla}\eta|^2 f_i^2 + (1 - \eta)^2 |\tilde{\nabla}f_i|^2) d\tilde{v}, \end{aligned}$$

onde na última desigualdade foi usada a desigualdade da média aritmética-geométrica.

Como  $f_i^2$  e  $|\tilde{\nabla}f_i|^2$  são limitadas, temos que,

$$\int_{\overline{M}} |\tilde{\nabla}(g_i - f_i)|^2 d\tilde{v} \rightarrow 0 \text{ com } \epsilon \rightarrow 0,$$

assim,

$$\|f_i - g_i\|_1^2 = \int_{\overline{M}} |\nabla(f_i - g_i)|^2 + (f_i - g_i)^2 dv \rightarrow 0 \text{ com } \epsilon \rightarrow 0.$$

Pela continuidade de  $Q$  com respeito a norma  $L^{1,2}$ ,  $Q$  é negativa definida no espaço  $W = \text{span}\{g_i\}$ , ou seja,  $\text{Ind}(M) \geq \text{Ind}_{L_{\tilde{\mu}}}(\overline{M})$ , mas já sabemos que  $\text{Ind}(M) \leq \text{Ind}_{L_{\tilde{\mu}}}(\overline{M})$ , portanto,  $\text{Ind}(M) = \text{Ind}_{L_{\tilde{\mu}}}(\overline{M})$ .

□

### 4.3 Superfícies Mínimas com Índice 1

Nesta seção, iremos mostrar primeiro que o catenóide e a superfície de Enneper são as únicas superfícies mínimas completas e orientáveis no  $\mathbb{R}^3$  com índice igual a 1. Nossas principais referências foram [20],[8] e [18].



Sejam  $M$  uma superfície mínima completa e orientável em  $\mathbb{R}^3$  e  $N : M \rightarrow S^2(1)$  a aplicação de Gauss. Se  $Ind(M)$  é finito então, pelo teorema (4.2.2)  $M$  tem curvatura total finita e assim, pelo teorema (4.2.1), existe uma superfície de Riemann compacta  $\bar{M}$ , tal que  $M$  é conformemente equivalente a  $\bar{M} - \{p_1, \dots, p_n\}$ ,  $p_k \in \bar{M}$  para  $k = 1, \dots, n$ . Além disso, a aplicação de Gauss estende para  $\{p_1, \dots, p_n\}$  como uma aplicação meromorfa  $N : \bar{M} \rightarrow S^2(1)$ .

Seja  $ds_1^2$  a métrica em  $\bar{M}$  compatível com a estrutura de Riemann. Definiremos o operador  $L_1$  em  $\bar{M}$  por

$$L_1 = \Delta_1 + |\nabla_1 N|^2,$$

onde  $\Delta_1$  e  $\nabla_1$  são o Laplaciano e o gradiente na métrica  $ds_1^2$ . Pelo corolário (4.2.1), temos que

$$Ind_{L_1}(\bar{M}) = Ind(M).$$

Denotaremos por  $Q_1$  a forma quadrática associada a  $L_1$ , isto é,

$$Q_1(u) = - \int_{\bar{M}} u L_1 u dv_1, \text{ para todo } u \in H_2^1(\bar{M}).$$

Vamos enunciar agora alguns resultados que serão de grande importância na demonstração do principal teorema desta seção.

**Lema 4.3.1.** *Seja  $\rho : \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função positiva e suave e  $\Psi : \bar{M} \rightarrow S^2(1)$  uma aplicação meromorfa não constante. Então existe uma transformação conforme  $g : S^2(1) \rightarrow S^2(1)$ , tal que*

$$\int_{\bar{M}} \rho(g \circ \Psi) dv_1 = 0,$$

onde  $dv_1$  é a medida canônica associada a  $ds_1^2$ .

**Lema 4.3.2.** *Sejam  $\bar{M}$  uma superfície de Riemann compacta com gênero  $r$  e  $p$  um ponto de  $\bar{M}$ . Então existe uma função  $\phi$  meromorfa não-constante em  $\bar{M}$  que tem um pólo de ordem menor ou igual a  $r + 1$  em  $p$  e é holomorfa para todos os outros pontos de  $\bar{M}$ .*

Este último Lema é uma consequência do Teorema de Riemann-Roch e a sua demonstração pode ser encontrada em [10], p. 130.

Dada uma superfície de Riemann  $M$  e uma aplicação meromorfa  $\Psi : M \rightarrow S^2(1)$  então para qualquer  $q \in S^2(1)$  o conjunto  $\Psi^{-1}(q) = \{p \in M | \Psi(p) = q\}$  tem o mesmo número  $r$  de elementos. A demonstração desse resultado pode ser vista em [19], p. 272. O número  $r$  é

chamado *grau da aplicação meromorfa* e denotaremos por  $gr(\Psi)$ . Um resultado imediato é que a aplicação  $\Psi$  é injetiva se, e somente se,  $gr(\Psi) = 1$ .

Vale observar também que, do Teorema 9.4 de [20], o catenóide e a superfície de Enneper são as únicas superfícies mínimas completas e orientáveis imersas no  $\mathbb{R}^3$  com curvatura total igual a  $-4\pi$ . Uma consequência disso é que o catenóide e a superfície de Enneper são as únicas superfícies mínimas completas e orientáveis imersas no  $\mathbb{R}^3$  no qual a aplicação de Gauss é injetiva.

**Teorema 4.3.1.** *Seja  $M$  uma superfície mínima completa e orientável no  $\mathbb{R}^3$ . Então  $Ind(M) = 1$  se, e somente se,  $M$  é o catenóide ou a superfície de Enneper.*

*Demonstração.* Seja  $M$  o catenóide ou a superfície de Enneper e  $N : M \rightarrow S^2(1)$  a aplicação de Gauss. Tome a métrica  $\tilde{u}|dz|^2$  em  $M$  dada pelo pullback da métrica em  $S^2(1)$  por  $N$ . Então  $L_{\tilde{u}} = -K(\Delta_M + 2I)$ . Como  $M$  é o catenóide ou a superfície de Enneper então  $N$  é injetiva e assim  $Ind_{L_{\tilde{u}}}(\overline{M})$  é igual ao número de autovalores negativos do operador  $\Delta_M + 2I$ . Mas para o Laplaciano temos que  $\lambda_1(S^2(1)) = 2$ , onde  $\lambda_1$  é o primeiro autovalor não-trivial. Tomando  $\vartheta$  a autofunção do Laplaciano cujo autovalor associado é 2, temos

$$(\Delta_M + 2I)\vartheta = \Delta_M\vartheta + 2I\vartheta = -2\vartheta + 2\vartheta = 0,$$

ou seja,  $\vartheta$  é uma autofunção do operador  $(\Delta_M + 2I)$  cujo autovalor associado é 0. Considerando agora a autofunção  $\bar{\vartheta}$  de  $\Delta_M$  cujo autovalor associado é o trivial, então

$$(\Delta_M + 2I)\bar{\vartheta} = \Delta_M\bar{\vartheta} + 2I\bar{\vartheta} = 2\bar{\vartheta},$$

ou seja, o primeiro autovalor de  $(\Delta_M + 2I)$  é  $-2$  e o segundo é 0. Logo, temos apenas um autovalor negativo para  $(\Delta_M + 2I)$  e portanto  $Ind_{L_{\tilde{u}}}(\overline{M}) = 1$ .

Pelo corolário (4.2.1)  $Ind_{L_{\tilde{u}}}(\overline{M}) = Ind(M)$ . Portanto, se  $M$  é o catenóide ou a superfície de Enneper então  $Ind(M) = 1$ .

Reciprocamente, suponhamos que  $Ind(M) = 1$ , assim pelo corolário (4.2.1)  $Ind_{L_1}(\overline{M}) = 1$ . Seja  $\rho$  a primeira autofunção de  $L_1$  (lembre-se que  $\rho$  é positiva em toda parte). Por hipótese, para todo  $u \in C^1(\overline{M})$  tal que  $\int_{S^2(1)} \rho u dv_1 = 0$ , isto é,  $u$  ortogonal a  $\rho$ , temos

$$Q_1(u) \geq 0 \tag{4.19}$$

e a realização da igualdade ocorre se, e somente se,  $L_1 u = 0$ .

Seja  $\Psi : \bar{M} \rightarrow S^2(1)$  uma aplicação meromorfa não constante. Usando o Lema (4.3.1) temos uma transformação conforme,  $g$ , de  $S^2(1)$  tal que  $\bar{\Psi} = g \circ \Psi : \bar{M} \rightarrow S^2(1)$  satisfaz

$$\int_{\bar{M}} \rho \bar{\Psi} dv_1 = 0. \quad (4.20)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} 0 \leq Q_1(\bar{\Psi}) &= \int_{\bar{M}} (|\nabla_1 \bar{\Psi}|^2 - |\nabla_1 N|^2 |\bar{\Psi}|^2) dv_1 \\ &= \int_{\bar{M}} (|\nabla_1 \bar{\Psi}|^2 - |\nabla_1 N|^2) dv_1 \\ &= 8\pi [gr(\bar{\Psi}) - gr(N)], \end{aligned}$$

no qual combinando (4.19) e (4.20) temos que

$$gr(\Psi) = gr(\bar{\Psi}) \geq gr(N) \quad (4.21)$$

e vale a igualdade se, somente se,  $\Delta_1 \bar{\Psi} + |\nabla_1 N|^2 \bar{\Psi} = 0$ . Mas, como  $\bar{\Psi}$  é uma aplicação meromorfa, temos que  $\Delta_1 \bar{\Psi} + |\nabla_1 \bar{\Psi}|^2 \bar{\Psi} = 0$ . Assim, a igualdade em (4.21) implica que  $|\nabla_1 \bar{\Psi}| = |\nabla_1 N|$  em toda parte. Agora discutiremos os seguintes casos:

a)  $\bar{M}$  é uma esfera.

Tomando  $\Psi$  com a aplicação identidade, então  $\Psi$  é injetiva e assim  $gr(\Psi) = 1$ . Como o  $gr(N) \geq 1$ , de (4.21), concluímos que  $gr(N) = 1$ . Assim, a aplicação de Gauss  $N$  é injetiva e portanto  $M$  é o catenóide ou a superfície de Enneper.

b) Suponha que o gênero de  $\bar{M}$  seja maior ou igual a 1, isto é,  $g(\bar{M}) \geq 1$ .

De [12] p. 75 temos que  $gr(N) \geq g(\bar{M}) + 1$ . Se a desigualdade é estrita, pelo Lema (4.3.2), existe uma função a qual  $gr(\bar{\Psi}) \leq g(\bar{M}) + 1$ , e usando (4.21) chegamos em uma contradição. Se vale a igualdade, seja  $p \in \bar{M}$  um ponto regular de  $N$ . Novamente, a partir do Lema (4.3.2), obtemos uma aplicação meromorfa  $\Psi$ , do mesmo grau que  $N$  a qual tem  $p$  como um ponto de ramificação de ordem  $g(\bar{M}) + 1$ . Então, temos a igualdade em (4.21) e assim  $|\nabla_1 \bar{\Psi}| = |\nabla_1 N|$  em todo ponto de  $\bar{M}$ . Mas,  $|\nabla_1 \bar{\Psi}|(p) = 0$  e  $|\nabla_1 N|(p) \neq 0$ , o que é uma contradição e o teorema está provado.

□

---

---

# APÊNDICE A

---

## A DERIVADA DO DETERMINANTE

Neste apêndice demonstraremos dois resultados de álgebra linear sobre a derivada da função determinante.

**Lema A.0.3.** *Seja  $G(t) = (a_{ij}(t))$ ,  $t \in I$ , uma família suave de matrizes  $n \times n$ , tais que  $G(0) = Id$ . Então*

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det(G(t)) = \text{tr}(G'(0)).$$

*Demonstração.* Observe que

$$\det(G(t)) = \det(a_{ij}(t)) = \sum_{j=1}^n a_{1j}(t)c_{1j}(t),$$

onde  $c_{ij}$  são os cofatores de  $(a_{ij})$ . Logo,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det(G(t)) = \sum_{j=1}^n a'_{1j}(0)c_{1j}(0) + \sum_{j=1}^n a_{1j}(0)c'_{1j}(0) = a'_{11}(0) + c'_{11}(0).$$

Indutivamente, calculando  $c'_{11}(0)$  e depois  $c'_{22}(0)$  temos que

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det(G(t)) = \sum_{j=1}^n a'_{jj}(0) = \text{tr}(G'(0)).$$

□

A partir desse Lema temos o seguinte corolário:

**Corolário A.0.1.** *Seja  $B(t) = (b_{ij}(t))$  uma família suave de matrizes inversíveis  $n \times n$ . Então para todo  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$*

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \det(B(t)) = \operatorname{tr}(B'(s)B^{-1}(s))\det(B(s)).$$

*Demonstração.* Seja  $G(t) = B(t)B^{-1}(s)$ . Assim  $G(s) = Id$  e pelo lema anterior temos que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \det(G(t)) &= \operatorname{tr}(G'(s)) \\ &= \operatorname{tr}(B'(s)B^{-1}(s)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \det(B(t)B^{-1}(s)) = \operatorname{tr}(B'(s)B^{-1}(s)),$$

ou seja,

$$\det(B^{-1}(s)) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \det(B(t)) = \operatorname{tr}(B'(s)B^{-1}(s)).$$

Portanto,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \det(B(t)) = \operatorname{tr}(B'(s)B^{-1}(s))\det(B(s)).$$

□

---

---

# APÊNDICE B

---

## DESIGUALDADE DE YOUNG

Neste apêndice apresentaremos a demonstração da desigualdade de Young que foi utilizada nos teoremas (3.1.1) e (3.2.1).

**Lema B.0.4** (Desigualdade de Young). *Sejam  $s$  e  $t$  números reais positivos tais que  $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1$  e  $a$  e  $b$  números reais não negativos. Então vale a seguinte desigualdade:*

$$ab \leq \frac{\alpha^s a^s}{s} + \frac{\alpha^{-t} b^t}{t}, \quad (\text{B.1})$$

onde  $\alpha > 0$  é arbitrário.

*Demonstração.* Basta provar que  $ab \leq \frac{a^s}{s} + \frac{b^t}{t}$ .

É claro que (B.1) é verdade se  $ab = 0$ . Portanto, suponhamos que  $a, b > 0$ , com isso podemos considerar os seguintes casos:

- Se  $a^s = b^t$  teremos, usando o fato de que  $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1$ , que

$$ab = a(b^t)^{\frac{1}{t}} = aa^{\frac{s}{t}} = a^{s(\frac{1}{s} + \frac{1}{t})} = \frac{a^s}{s} + \frac{b^t}{t}$$

- Se  $a^s \neq b^t$ , note que a função  $g(x) = e^x$  é estritamente convexa, pois  $g''(x) > 0$  para todo

$x \in \mathbb{R}$ . Então para todo  $\lambda \in (0, 1)$  e todos os números reais  $x, y$ , com  $x \neq y$ , obtemos

$$g(x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y).$$

Aplicando isso para  $\lambda = \frac{1}{s}$ ,  $(1 - \lambda) = \frac{1}{t}$ ,  $x = \ln a^s$  e  $y = \ln b^t$ , teremos que

$$ab = e^{\ln(ab)} = e^{\frac{\ln a^s}{s} + \frac{\ln b^t}{t}} \leq \frac{a^s}{s} + \frac{b^t}{t}.$$

□

---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BOMBIERI, E., DE GIORGI, E. & GIUSTI, E., Minimal cones and the Bernstein problem, *Inventones Math*, 7(1969), 243 – 268.
- [2] COHN-VOSSSEN, S., Kürzest Wege und Totalkrümmung auf Flächen, *Compos. Math* 2(1935), 69 – 133.
- [3] COLDING, T. H. & MINICOZZI, W. P., Minimal surfaces, New York University, Courant Instituto of Mathematical, New York, (1999).
- [4] DO CARMO, M. P., Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies Riemanniana, 2<sup>a</sup> ed., *Textos Universitários*, SBM, Rio de Janeiro, (2005).
- [5] DO CARMO, M. P., Geometria Riemanniana, 4<sup>a</sup> ed., *Projeto Euclides*, IMPA, Rio de Janeiro, (2008).
- [6] DO CARMO, M. P. & PENG, C. K., Stable complete minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$  are planes, *American Mathematical Society*, 1(1979), 903 – 906.
- [7] DO CARMO, M. P. & PENG, C. K., Stable complete minimal hypersurfaces, *Proc. of the (1980) Beijing Symp. S. S. Chern and Wentsun (Eds.) Gordon and Breach Science Pub.*, 1349 – 1358.
- [8] FISCHER-COLBRIE, D. On complete minimal surfaces with finite Morse index in three manifolds, *Invent. Math.* 82(1985), 121 – 132.



- [9] FISCHER-COLBRIE, D. & SCHOEN, R. The structure of complete stable minimal surfaces in three manifolds of nonnegative scalar curvature, *Comm. Pure Appl. Math.* 33(1980), 199 – 211.
- [10] FORSTER, O., Lectures on Riemann Surfaces Volume 81, New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag (1979).
- [11] GILBARG, D., & TRUDINGER, N. S., Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2<sup>a</sup> ed., Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, Springer, (1983).
- [12] HOFFMAN, D. A. & OSSERMAN, R., The Geometry of the generalized Gauss map, *Memoirs of the American Mathematical Society*, 236, 28,(1980).
- [13] LAWSON, H. B., Lectures on Minimal Submanifolds Volume 1, University of California, Berkeley, (1980).
- [14] LEE, J. M., Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature, GTM, Springer, (1997).
- [15] LI, P., Lecture Notes on Geometric Analysis, University of California, Irvine, 1996. Distribuição livre na internet através do link [math.uci.edu/ pli/lecture.pdf](http://math.uci.edu/pli/lecture.pdf).
- [16] LI, H. & WEI, G., Stable complete minimal hypersurfaces in  $\mathbb{R}^4$ , *Matemática Contemporânea*, Vol 28(2005), 183 – 188.
- [17] LIMA, E. L., Curso de Análise volume 2, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 10<sup>a</sup> ed.,(2008).
- [18] LOPEZ, F. J. & ROS, A., Complete minimal surfaces with index one and stable constant mean curvature surfaces, *Comment. Math. Helvetici* 64(1989), 34 – 43.
- [19] NETO, L. A., Funções de uma variável complexa, 2<sup>a</sup> ed., Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, (2005).
- [20] OSSERMAN, R., A Survey of Minimal Surfaces, 2<sup>a</sup> ed., New York: Van Nostrand Reinhard (1986).
- [21] SIMONS J., Minimal varieties in Riemannian manifolds, *Ann. of Math.* 88(1968), 62 – 105.

---

# ÍNDICE REMISSIVO

- Índice de Morse, 45
- Campo Variacional, 33
- Catenóide, 88
- Colchete de Lie, 20
- Componente
  - Norma, 25
  - Tagencial, 25
- Conexão de Levi-Civita, 16
- Curvatura, 20
  - Total Finita, 62
  - de Ricci, 23
  - Escalar, 23
  - Seccional, 22
- Derivada Covariante, 16
- Desigualdade
  - de Simons, 53
  - de Young, 92
  - da Estabilidade, 46
- Diferencial Covariante, 16
- Divergência, 17
- Domínio
  - Estável, 45
  - Instável, 45
- Equação
  - de Codazzi, 28
  - de Gauss, 28
- Equação de Simons, 50
- Espaço Normal, 24
- Fórmula de Weingarten, 27
- Fibrado Normal, 25
- Forma Negativa Definida, 66
- Funcional Área, 33
- Gradiente, 16
- Grau da Aplicação, 88
- Hessiano, 18
- Hipersuperfície, 29
  - Mínima, 37
- Imersão Isométrica, 24
- Laplaciano, 17
- Métrica Riemanniana, 16

Operador

de Jacobi, 45

Estabilidade, 45

Primeira Identidade de Bianchi, 20

Segunda Forma Fundamental, 27

Superfície de Enneper, 88

Tensor, 15

de Ricci, 24

Teorema

do Carmo-Peng, 56

Li-Wei, 63

Varição, 32

Variiedade Riemanniana, 16

Vetor Curvatura Média, 28