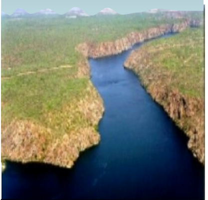
Universidade Federal de Alagoas

Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Difeomorfismos que Preservam Volume e Problemas Elípticos

Julio Cesar de Souza Almeida



Rio São Francisco

MATEMÁTICA
A ciência
do infinito

Maceió,
15 de fevereiro de 2007

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Difeomorfismos que Preservam Volume e Problemas Elípticos

Julio Cesar de Souza Almeida

Orientador: Prof. Dr. Adán José Corcho Fernández

Maceió, Brasil
Fevereiro 2007

Difeomorfismos que Preservam Volume e Problemas Elípticos

Julio Cesar de Souza Almeida

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Análise submetida em 15 de fevereiro de 2007 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Amauri da Silva Barros

Prof. Dr. Marco Aurelio Soares Souto

Prof. Dr. Krerley Irraciel Martins Oliveira

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por tudo.

Ao professor Adán pela orientação.

Aos meus colegas de turma Clarissa Codá, Maria Andrade, Thales Vieira e Thiago Fontes, pela conversas matemáticas e amizade. Aos meus colegas de sala de estudo André Pizzaia, Daniel Nicolau e Marcius Petrúcio.

A todos os professores do Programa de Pós Graduação em Matemática da UFAL, que contribuíram de forma significativa na minha formação acadêmica, com conversas matemáticas e não matemáticas.

Aos professores Krerley Oliveira, Fernando Codá e Eduardo Texeira pelas sugestões na elaboração deste trabalho.

Aos professores da UFES Jamil Ferreira e José Antônio da Rocha Pinto, pelo apoio e formação acadêmica.

Agradeço à Maria Marta Farias de Sousa, pelas Correções ortográficas, e ao professor Hilário Alencar, pelo grande apoio.

Agradeço em especial ao meus pais Alci Felicio de Almeida e Edimar Maria de Souza Almeida , as minhas irmãs Priscilla de Souza Almeida e Doriana Martins da Silva e a minha namorada Maria Marta Farias de Sousa, que contribuíram de forma valiosíssima para o meu crescimento.

Agradeço à FAPEAL, pelo apoio financeiro no período de 04/2005 a 02/2007.

Resumo

O fato de que o problema de Neumann possui solução única quando estudo em adequados espaços de Hölder, nos permite resolver problemas elípticos até agora tratados com dados iniciais infinitamente diferenciáveis. De posse da existência e da unicidade da solução do problema de Neumann, encontra-se uma função que se anula na fronteira do conjunto onde esta função está definida e cujo divergente é igual a uma função dada. Esta última afirmação nos permite determinar um difeomorfismo que preserva a fronteira e tal que o determinante da diferencial é igual a uma função inicial.

A partir daí, dados um domínio limitado do espaço euclidiano de dimensão n e duas n-formas tais que suas funções coeficientes são positivas, então, sob algumas hipóteses de regularidade, existe um difeomorfismo definido nesse domínio tal que o pull-back de uma das formas por esse difeomorfismo é proporcional à segunda forma. A constante de proporcionalidade vem dada pelo quociente das integrais das formas, calculadas em todo o domínio.

O resultado acima pode ser escrito em uma forma mais analítica. Após essa reformulação, verifica-se que o mesmo é uma conseqüência do resultdo descrito a seguir. Dados um domínio limitado e uma função positiva definida no fecho deste de forma tal que a integral da mesma neste domínio seja igual ao volume do mesmo, então, adicionando algumas hipóteses de regularidade, existe um difeomorfismo tal que, para todo ponto do interior do conjunto, o determinante da derivada desse difeomorfismo é igual a função dada. Além disso, esse difeomorfismo preserva pontualmente a fronteira do conjunto.

Como conseqüência podemos construir difeomorfismos que preservam volume com valor de fronteira dado.

Palavras-chave: Análise Funcional e Equações Elípticas.

Introdução

Sejam Ω um domínio (aberto e conexo) limitado de $\mathbb{R}^n$ e γ e β duas n-formas,

$$\gamma = f(x)dx_1 \cdots dx_n \quad \text{e} \quad \beta = g(x)dx_1 \cdots dx_n,$$

com $f, g > 0$ em $\overline{\Omega}$. Neste trabalho provaremos que, com certas hipóteses de regularidade sob Ω, f e g, existe um difeomorfismo $\varphi : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$, deixando invariante pontualmente a fronteira $\partial\Omega$ do conjunto Ω e tal que

$$\varphi^*\beta = \lambda\gamma,$$

onde $\lambda = (\int \beta)/(\int \gamma)$ e $\varphi^*\beta$ denota o pull-back da forma β pelo difeomorfismo φ.

De forma mais precisa, provaremos o seguinte resultado:

Teorema 0.1. *Sejam $k \geq 0$ um inteiro, $0 < \alpha < 1$ e Ω tal que sua fronteira $\partial\Omega$ possui regularidade $C^{k+3,\alpha}$. Se $f, g \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ são estritamente positivas em $\overline{\Omega}$, então existe um difeomorfismo $\varphi \in Dif^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega})$ satisfazendo o seguinte problema de fronteira*

$$\begin{cases} g(\varphi(x)) \det \nabla\varphi(x) = \lambda f(x), & \text{se } x \in \Omega, \\ \varphi(x) = x, & \text{se } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Acima, $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ denota o clássico espaço de Hölder e $Dif^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ denota o conjunto dos difeomorfismos (homeomorfismos, se $k = 0$) $\varphi : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ tais que $\varphi, \varphi^{-1} \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$.

O Teorema 0.1 foi estabelecido por Dacorogna e Moser (ver [4]) e é uma versão mais forte de resultados conhecidos. Por exemplo, resultados similares foram demonstrados por Moser (ver [10]) para formas de volume em uma variedade suave, compacta e sem bordo e por Banyaga (ver [3]) para variedades com bordo, no caso C^∞.

Uma aplicação do Teorema 0.1 é a possibilidade de construir difeomorfismos que preservam volume com valor de fronteira dado, em outras palavras, se Ω é como nas hipóteses do Teorema 0.1 e $\psi_0 \in Dif^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega})$, então existe $\psi \in Dif^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} \det \nabla\psi(x) = 1, & \text{se } x \in \Omega, \\ \psi(x) = \psi_0(x), & \text{se } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Para ver isso basta usar o Teorema 0.1 com $g = 1$ e $f = \det \nabla\psi_0^{-1}$; daí $\lambda = 1$ e podemos achar φ satisfazendo (1). Encontramos uma solução para a equação (2) definindo $\psi = \varphi \circ \psi_0$.

Este tipo de problema tem um papel importante na construção de transformações que preservam volume com órbitas periódicas e transformações ergódicas pré-escritas, como se pode ver nos trabalhos de Alpern [1] e Anosov-Katok [2].

A monografia aqui presente está estruturada do seguinte modo. No Capítulo 1 definimos concretamente os Espaços de Hölder, os quais serão nosso ambiente de trabalho, e provaremos algumas de suas propriedades fundamentais. O Capítulo 2 será dedicado ao estudo do problema de Dirichlet nos espaços de Hölder.

Os resultados obtidos neste capítulo combinados com os de Análise Funcional, apresentados no Capítulo 3, serão fundamentais no Capítulo 4, onde se generalizam algumas das propriedades estabelecidas para o problema de Dirichlet e, além disso, se garante a existência de soluções para o problema de Neumann, fazendo-se uso do "Método Contínuo"para operadores lineares e de um clássico teorema conhecido como "Alternativa de Fredholm".

Por último, no Capítulo 5, mostraremos que se $\int_\Omega f(x)dx = \text{Vol}$, onde Ω e f são como no Teorema 0.1, então existe $u \in Dif^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} \det \nabla u(x) = f(x), & \text{se } x \in \Omega, \\ u(x) = x, & \text{se } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Este trabalho foi baseado no artigo On a partial differential equation involving the Jacobian determinant, Ann. Inst. Henri Poincaré. Vol7, $n^0 1$, 1990, p. 1-26.

Sumário

Capítulo 1

Espaços de Hölder

Neste capítulo definimos com precisão os espaços de Hölder, os quais são subespaços do espaço vetorial

$$C^k(\bar{\Omega}) = \left\{ f : \bar{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m;\ D^\beta f \text{ é contínua em } \bar{\Omega},\ \text{para } |\beta| \leq k \right\},$$

com as seguintes notações:

- $\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$,
- $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n$,
- $D^\beta = D_1^{\beta_1} \circ D_2^{\beta_2} \circ \cdots \circ D_n^{\beta_n} = \partial_{x_1}^{\beta_1} \circ \partial_{x_2}^{\beta_2} \circ \cdots \circ \partial_{x_n}^{\beta_n}$.

Apresentamos algumas das propriedades fundamentais destes espaços, dando especial atenção a sua completude com relação à norma $|\cdot|_{k,\alpha}$, definida mais abaixo.

Definição 1.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \Omega$ e $0 < \alpha \leq 1$. Dizemos que f é Hölder contínua com expoente α em x_0 se*

$$[f]_{\alpha, x_0} = \sup_{\substack{x \in \Omega \\ x \neq x_0}} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} < \infty$$

e que f é uniformemente Hölder contínua com expoente α em Ω se

$$[f]_{\alpha,\Omega} = \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}} < \infty.$$

Além disso, f é dita localmente Hölder contínua com expoente α em Ω se for uniformemente contínua Hölder com expoente α em subconjuntos compactos de Ω.

Observação 1.1. *Notemos que para $\alpha = 1$ a noção de uniformemente Hölder contínua coincide com a definição de função Lipschitziana.*

Definição 1.2 (Espaços de Hölder). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e k um inteiro não negativo. O espaço de Hölder, denotado por $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ $\big(C^{k,\alpha}(\Omega)\big)$, é definido como o subespaço de $C^k(\bar{\Omega})$ $\big(C^k(\Omega)\big)$ consistindo das funções que possuem derivadas parciais de ordem k uniformemente Hölder contínuas (localmente Hölder continua) com expoente α em $\bar{\Omega}$ (em subconjuntos compactos de Ω). Por simplicidade, quando $0 < \alpha < 1$, escrevemos*

$$C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) = C^{\alpha}(\bar{\Omega}) \qquad e \qquad C^{0,\alpha}(\Omega) = C^{\alpha}(\Omega).$$

Além disso, faremos uso das seguintes notações

$$C^{k,0}(\bar{\Omega}) = C^{k}(\bar{\Omega}) \qquad e \qquad C^{k,0}(\Omega) = C^{k}(\Omega).$$

Exemplo 1.1. *Seja $B \subset \mathbb{R}^n$ uma bola. Se $u \in C^{\infty}(\bar{B})$, então $u \in C^{k,\alpha}(\bar{B})$ para todo inteiro $k \geq 0$ e $0 < \alpha \leq 1$*

Demonstração. Com efeito, se $|\beta| = k$ e $x \neq y$, pela Desigualdade do Valor Médio, temos que

$$\frac{\left|D^{\beta}u(x) - D^{\beta}u(y)\right|}{|x-y|^{\alpha}} \leq \sup_{\substack{1\leq i\leq n \\ \xi\in[x,y]}} \frac{\left|D_i D^{\beta}u(\xi)\right| |x-y|}{|x-y|^{\alpha}} \leq C;$$

portanto $[D^{\beta}u]_{\alpha,\Omega} < \infty$. □

No espaço $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ definimos as seguintes seminormas:

$$
\begin{aligned}
[u]_{k,0,\Omega} &= |D^k u|_{0,\Omega} := \sup_{|\beta|=k} \sup_{\Omega} |D^\beta u|, \\
[u]_{k,\alpha,\Omega} &= [D^k u]_{\alpha,\Omega} := \sup_{|\beta|=k} [D^\beta u]_{\alpha,\Omega},
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

e a partir dessas seminormas, definimos as normas

$$
\begin{aligned}
|u|_{C^k(\bar{\Omega})} &= |u|_{k,\Omega} := \sum_{j=0}^{k} [u]_{j,0,\Omega} = \sum_{j=0}^{k} |D^j u|_{0,\Omega}, \\
|u|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} &= |u|_{k,\alpha,\Omega} := |u|_{k,\Omega} + [u]_{k,\alpha,\Omega} = |u|_{k,\Omega} + [D^k u]_{\alpha,\Omega}.
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Se Ω é limitado e denotamos por $d = \operatorname{diam}(\Omega)$ o diâmetro do conjunto Ω, é conveniente definir as normas a seguir:

$$
\begin{aligned}
|u|'_{C^k(\bar{\Omega})} &= |u|'_{k,\Omega} := \sum_{j=0}^{k} d^j [u]_{j,0,\Omega} = \sum_{j=0}^{k} d^j |D^j u|_{0,\Omega} \\
|u|'_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} &= |u|'_{k,\alpha,\Omega} := |u|'_{k,\Omega} + d^{k+\alpha} [u]_{k,\alpha,\Omega} = |u|'_{k,\Omega} + d^{k+\alpha} [D^k u]_{\alpha,\Omega}
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Provaremos agora a completude do espaço $\big(C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}), |\cdot|_{k,\alpha}\big)$.

Teorema 1.1. *O espaço* $\big(C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}), |\cdot|_{k,\alpha}\big)$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ tal que $\lim\limits_{m,n\to\infty} |u_n - u_m|_{k,\alpha} = 0$. Com isso,

$$
|u_n - u_m|_k + \sup_{|\beta|=k} \sup_{x\neq y} \frac{\big|D^\beta(u_n - u_m)(x) - D^\beta(u_n - u_m)(y)\big|}{|x-y|^\alpha} \longrightarrow 0. \tag{1.4}
$$

Como o espaço $C^k(\overline{\Omega})$ é completo, existe $u \in C^k(\overline{\Omega})$ tal que $|u_n - u|_k \to 0$. Daí, para mostrar que $|u_n - u|_{k,\alpha} \to 0$, basta mostrar que

$$
\sup_{|\beta|=k} \sup_{x\neq y} \frac{\big|D^\beta(u_n - u)(x) - D^\beta(u_n - u)(y)\big|}{|x-y|^\alpha} \longrightarrow 0.
$$

Primeiro observe que, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica

$$\sup_{|\beta| \leq k} \sup_{\Omega} \left| D^\beta u_n(x) - D^\beta u(x) \right| = \sup_{|\beta| \leq k} \sup_{\Omega} \left| D^\beta (u_n - u)(x) \right| < \epsilon,$$

pois $|u_n - u|_k \to 0$.

Assim, para cada índice β tal que $|\beta| \leq k$ e para todo $x \in \Omega$, temos

$$\left| D^\beta u_n(x) - D^\beta u(x) \right| < \epsilon.$$

Portanto, para cada índice β, $\lim\limits_{n\to\infty} D^\beta u_n(x) = D^\beta u(x)$, onde o limite é uniforme. Finalmente, de (1.4) temos que existe $n_1(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todos $m, n \geq n_1$ vale que

$$\sup_{|\beta|=k} \sup_{x\neq y} \frac{\left| D^\beta (u_n - u_m)(x) - D^\beta (u_n - u_m)(y) \right|}{|x-y|^\alpha} < \epsilon,$$

logo

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{|\beta|=k} \sup_{x\neq y} \frac{\left| D^\beta (u_n - u_m)(x) - D^\beta (u_n - u_m)(y) \right|}{|x-y|^\alpha} \leq \epsilon.$$

De onde se segue que

$$\sup_{|\beta|=k} \sup_{x\neq y} \frac{\left| \lim\limits_{m\to\infty} D^\beta (u_n - u_m)(x) - \lim\limits_{m\to\infty} D^\beta (u_n - u_m)(y) \right|}{|x-y|^\alpha}$$

$$= \sup_{|\beta|=k} \sup_{x\neq y} \frac{\left| D^\beta (u_n - u)(x) - D^\beta (u_n - u)(y) \right|}{|x-y|^\alpha} \leq \epsilon.$$

Com isso, temos

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{|\beta|=k} \sup_{x\neq y} \frac{\left| D^\beta (u_n - u)(x) - D^\beta (u_n - u)(y) \right|}{|x-y|^\alpha} = 0.$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$ existe $n_2(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_2$, temos

$$|u_n - u|_{k,\alpha} < \epsilon.$$

Usando a desigualdade triangular, obtemos $|u|_{k,\alpha} < \epsilon + |u_n|_{k,\alpha}$, $\forall n \geq n_2$. Logo

$$\lim_{n\to\infty} |u_n - u|_{k,\alpha} = 0 \text{ e } u \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}).$$

□

Observação 1.2. *Neste trabalho estaremos interessados somente em domínios Ω onde é válida a relação de inclusão $C^{k',\alpha'}(\bar{\Omega}) \subseteq C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ sempre que $k + \alpha \leq k' + \alpha'$. Por exemplo, em conjuntos convexos, pela Desigualdade do Valor Médio, esta propriedade é sempre satisfeita.*

Definição 1.3. *Um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dito de classe $C^{k,\alpha}$(ou com fronteira $C^{k,\alpha}$), $0 \leq \alpha \leq 1$, se para cada ponto $x_0 \in \partial\Omega$ existem uma bola $B = B(x_0, r)$ e uma aplicação bijetiva $\psi : B \to D \subset \mathbb{R}^n$ tal que:*

(i) $\psi(B \cap \Omega) \subset \mathbb{R}^n_+$;

(ii) $\psi(B \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}^n_+$;

(iii) $\psi \in C^{k,\alpha}(B)$ *e* $\psi^{-1} \in C^{k,\alpha}(D)$.

Dizemos que Ω tem uma partição de fronteira $T \subset \partial\Omega$ de classe $C^{k,\alpha}$ se em cada ponto $x_0 \in T$, existe uma bola $B = B(x_0, r)$ em que as condições acima são satisfeitas e tal que $B \cap \partial\Omega \subset T$. Além disso, uma função φ definida em T é dita de classe $C^{k,\alpha}(T)$ se, para cada ponto de T, tem-se

$$\varphi \circ \psi^{-1} \in C^{k,\alpha}(D \cap \partial\mathbb{R}^n_+).$$

A seguir enunciamos uma desigualdade de interpolação e um resultado de extensão para funções $\varphi \in C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$. Tais resultados serão fundamentais a partir do Capítulo 4.

Proposição 1.1. *Suponha $j + \beta < k + \alpha$, com $\alpha, \beta \in [0, 1]$ e j, k inteiros não negativos. Seja $\Omega \in C^{k,\alpha}$ um domínio em $\mathbb{R}^n$ e assuma que $u \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$. Então, para $\epsilon > 0$ e alguma constante $C = C(\epsilon, k, j)$, temos*

$$|u|_{j,\beta,\Omega} \leq C\,|u|_{0,\Omega} + \epsilon\,|u|_{k,\alpha,\Omega}\,. \tag{1.5}$$

Proposição 1.2. *Sejam Ω um domínio de classe $C^{k,\alpha}$ em $\mathbb{R}^n$, $k \geq 1$, e Ω' um aberto contendo $\bar{\Omega}$. Se $\varphi \in C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$, então existe uma função $\Phi \in C_0^{k,\alpha}(\Omega')$ tal que $\Phi|_{\partial\Omega} = \varphi$.*

Para ver os detalhes das demonstrações das proposições 1.1 e 1.2 referimos ao leitor o Capítulo 6 de [6].

Capítulo 2

O Problema de Dirichlet nos Espaços de Hölder

Neste capítulo estudaremos o problema clássico de Dirichlet em um domínio Ω considerando o potencial Newtoniano nos espaços de Hölder. De maneira mais precisa, faremos estimativas para o potencial Newtoniano w de uma função f, isto é,

$$w(x) = \int_{\Omega} \Gamma(x-y)f(y)dy,$$

onde Γ denota a função de Green para a equação de Laplace ($\Delta u = 0$), ou seja,

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n(2-n)\omega_n}|x|^{2-n}, & n \geq 3, \\ \dfrac{1}{2\pi}\log|x|, & n = 2, \end{cases}$$

com $\omega_n = \text{Área}(S^{n-1})$.

Os resultados que apresentaremos serão fundamentais no Capítulo 4, onde abordaremos o problema de Newmann.

Começamos demonstrando os seguintes resultados clássicos de regularidade.

Lema 2.1. *Sejam f uma função limitada e integrável em Ω e w seu potencial Newtoniano. Então $w \in C^1(\Omega)$ e, além disso,*

$$D_i w(x) = \int_\Omega D_i\Gamma(x-y)f(y)dy, \quad i = 1, \cdots, n, \tag{2.1}$$

para todo $x \in \Omega$.

Demonstração. Defina $v(x) := \int_\Omega D_i\Gamma(x-y)f(y)dy$. Vamos provar que $v \equiv D_i w$. Para verificar isto, definimos a função auxiliar $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ de forma tal que $0 \leq \eta \leq 1$, $0 \leq \eta' \leq 2$ e

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t \leq 1, \\ 1, & \text{para } t \geq 2. \end{cases}$$

Além disso, usaremos a seguinte notação: $\eta_\epsilon(t) = \eta(\frac{t}{\epsilon})$.

Para $\epsilon > 0$, definimos $w_\epsilon(x) := \int_\Omega \Gamma(x-y)\eta_\epsilon(|x-y|)f(y)dy$ e observamos que $w_\epsilon \in C^1(\Omega)$ e

$$v(x) - D_i w_\epsilon(x) = \int_{|x-y|\leq 2\epsilon} D_i \left\{(1-\eta_\epsilon(|x-y|))\,\Gamma(x-y)\right\} f(y)dy.$$

Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned} |v(x) - D_i w_\epsilon(x)| &\leq \sup|f| \int_{|x-y|\leq 2\epsilon} \left(|D_i\Gamma| + \frac{2}{\epsilon}|\Gamma|\right) dy \\ &\leq \sup|f| \begin{cases} \dfrac{2n\epsilon}{n-2}, & \text{se } n > 2 \\ 4\epsilon(1 + |\log 2\epsilon|), & \text{se } n = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Conseqüentemente, em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$, temos que

$$\lim_{\epsilon\to 0} w_\epsilon = w \text{ e } \lim_{\epsilon\to 0} D_i w_\epsilon = v,$$

onde os limites são uniformes.

Portanto $w \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $D_i w = v$.

□

Lema 2.2. *Sejam f limitada e localmente Hölder contínua (com expoente $\alpha \leq 1$) em Ω e w o potencial Newtoniano de f. Então $w \in C^2(\Omega)$, $\Delta w = f$ e, para todo $x \in \Omega$, temos*

$$\begin{aligned} D_{ij}w(x) &= \int_{\Omega_0} D_{ij}\Gamma(x-y)(f(y)-f(x))dy \\ &- f(x)\int_{\partial\Omega_0} D_i\Gamma(x-y)\nu_j(y)ds_y, \qquad i,j=1,\cdots,n. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Acima Ω_0 é um domínio que contém Ω no qual vale o Teorema da divergência e f é extendida a Ω_0, sendo nula no exterior de Ω.

Demonstração. Defina

$$u(x) = \int_{\Omega_0} D_{ij}\Gamma(x-y)(f(y)-f(x))dy - f(x)\int_{\partial\Omega_0} D_i\Gamma(x-y)\nu_j(y)ds_y.$$

Se $v = D_i w$ e $v_\epsilon(x) = \displaystyle\int_\Omega D_i\Gamma\eta_\epsilon f(y)dy$, então, para ϵ suficientemente pequeno, temos

$$\begin{aligned} D_j v_\epsilon(x) &= \int_\Omega D_j(D_i\Gamma\eta_\epsilon)f(y)dy \\ &= \int_{\Omega_0} D_j(D_i\Gamma\eta_\epsilon)(f(y)-f(x))dy \\ &+ f(x)\int_{\Omega_0} D_j(D_i\Gamma\eta_\epsilon)dy \\ &= \int_{\Omega_0} D_j(D_i\Gamma\eta_\epsilon)(f(y)-f(x))dy \\ &- f(x)\int_{\partial\Omega_0} D_i\Gamma\nu_j(y)ds_y. \end{aligned}$$

Com isso, segue-se que

$$\begin{aligned} |u(x) - D_j v_\epsilon(x)| &= \left|\int_{|x-y|\leq 2\epsilon} D_j\{(1-\eta_\epsilon)D_i\Gamma\}(f(y)-f(x))dy\right| \\ &\leq [f]_{\alpha,x}\int_{|x-y|\leq 2\epsilon}\left(|D_{ij}\Gamma| + \frac{2}{\epsilon}|D_i\Gamma|\right)|x-y|^\alpha dy \\ &\leq \left(\frac{n}{\alpha}+4\right)[f]_{\alpha,x}(2\epsilon)^\alpha. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, quando $\epsilon \to 0$, temos que $D_j v_\epsilon(x)$ converge uniformemente a u em subconjuntos compactos de Ω. E, como em Ω v_ϵ converge uniformemente a $v = D_i w$, concluímos que $w \in C^2(\Omega)$ e $u = D_{ij}w$. Finalmente, tomando $\Omega_0 = B_R(x)$ em (2.2), concluímos que

$$\Delta w(x) = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} f(x) \int_{|x-y|=R} \nu_i(y)\nu_i(y) ds_y = f(x).$$

Isso completa a prova do Lema 2.2. □

Lema 2.3. *Sejam $B_1 = B_R(x_0)$, $B_2 = B_{2R}(x_0)$ bolas concêntricas de R^n. Suponha que $f \in C^\alpha(\overline{B}_2)$, $0 < \alpha < 1$, e seja w o potencial Newtoniano de f em B_2. Então $w \in C^{2,\alpha}(\overline{B}_1)$ e*

$$\left|D^2 w\right|'_{0,\alpha,B_1} \leq C \left|f\right|'_{0,\alpha,B_2}, \tag{2.3}$$

onde $C = C(n, \alpha)$.

Demonstração. Pela fórmula (2.2), para todo $x \in B_1$, temos que

$$D_{ij}w(x) = \int_{B_2} D_{ij}\Gamma(x-y)(f(y) - f(x))dy - f(x) \int_{\partial B_2} D_i\Gamma(x-y)\nu_j(y) ds_y.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} |D_{ij}w(x)| &\leq \frac{|f(x)|}{n\omega_n} R^{1-n} \int_{\partial B_2} ds_y + \frac{[f]_{\alpha,x}}{\omega_n} \int_{B_2} |x-y|^{\alpha-n}\, dy \\ &\leq 2^{n-1}|f(x)| + \frac{n}{\alpha}(3R)^\alpha [f]_{\alpha,x} \\ &\leq C_1(|f(x)| + R^\alpha [f]_{\alpha,x}), \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde $C_1 = C_1(n, \alpha)$.

Seja $\overline{x}$ um outro ponto de B_1. Escrevendo $\delta = |x - \overline{x}|$ e $\xi = \frac{1}{2}(x - \overline{x})$, temos a seguinte relação:

$$D_{ij}w(\overline{x}) - D_{ij}w(x) = f(x)I_1 + (f(x) - f(\overline{x}))I_2 + I_3 + I_4 + (f(x) - f(\overline{x}))I_5 + I_6, \tag{2.5}$$

onde as integrais I_j, com $j \in \{1, \cdots, 6\}$, são dadas por:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\partial B_2} (D_i\Gamma(x-y) - D_i\Gamma(\overline{x}-y))\nu_j(y)ds_y, \\
I_2 &= \int_{\partial B_2} D_i\Gamma(\overline{x}-y))\nu_j(y)ds_y, \\
I_3 &= \int_{B_{\delta(\xi)}} D_{ij}\Gamma(x-y)(f(x)-f(y))dy, \\
I_4 &= \int_{B_{\delta(\xi)}} D_{ij}\Gamma(\overline{x}-y)(f(y)-f(\overline{x}))dy, \\
I_5 &= \int_{B_2 - B_{\delta(\xi)}} D_{ij}\Gamma(x-y)dy, \\
I_6 &= \int_{B_2 - B_{\delta(\xi)}} (D_{ij}\Gamma(x-y) - D_{ij}\Gamma(\overline{x}-y))(f(\overline{x})-f(y))dy.
\end{aligned}$$

Tais integrais podem ser estimadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq |x-\bar{x}| \int_{\partial B_2} |DD_i\Gamma(x'-y)|\, ds_y \qquad \text{(para algum ponto } x' \text{ entre } x \text{ e } \bar{x}) \\
&\leq \frac{n^2 2^{n-1}\,|x-\bar{x}|}{\rho} \qquad \text{(pois } |x'-y| \geq \rho \text{ para } y \in \partial B_2) \\
&\leq n^2 2^{n-\alpha}\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\alpha} \qquad \text{(pois } \delta = |x-\bar{x}| < 2\rho).
\end{aligned}$$

$$|I_2| \leq \frac{1}{n\omega_n}\rho^{1-n}\int_{\partial\Omega_2} ds_y = 2^{n-1},$$

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leq \int_{B_{\delta(\xi)}} |D_{ij}\Gamma(x-y)|\,|f(x)-f(y)|\,dy \\
&\leq \frac{1}{\omega_n}\,[f]_{\alpha,x}\int_{B_{3\delta/2}(x)} |x-y|^{\alpha-n}\,dy \\
&= \frac{n}{\alpha}\left(\frac{3\delta}{2}\right)^{\alpha}[f]_{\alpha,x}\,,
\end{aligned}$$

$$|I_4| \leq \frac{n}{\alpha}\left(\frac{3\delta}{2}\right)^{\alpha}[f]_{\alpha,x}$$

$$\begin{aligned}
|I_5| &= \left|\int_{\partial(B_2-B_{\delta(\xi)})} D_i\Gamma(x-y)\nu_j(y)ds_y\right| \\
&\leq \left|\int_{\partial B_2} D_i\Gamma(x-y)\nu_j(y)ds_y\right| + \left|\int_{\partial B_{\delta}(\xi)} D_i\Gamma(x-y)\nu_j(y)ds_y\right| \\
&\leq 2^{n-1} + \frac{1}{n\omega_n}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{1-n}\int_{\partial B_{\delta}(\xi)} ds_y = 2^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|I_6| &\leq |x-\bar{x}|\int_{B_2-B_{\delta(\xi)}} |DD_i\Gamma(x'-y)|\,|f(\bar{x})-f(y)|\,dy \qquad (\ x' \text{ entre } x \text{ e } \bar{x}) \\
&\leq c\delta\int_{|y-\xi|\geq\delta}\frac{|f(\bar{x})-f(y)|}{|x'-y|^{n+1}}dy, \qquad (c = n(n+5)/\omega_n) \\
&\leq c\delta\,[f]_{\alpha,\bar{x}}\int_{|y-\xi|\geq\delta}\frac{|\bar{x}-y|^{\alpha}}{|x'-y|^{n+1}}dy, \\
&\leq c\left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha}2^{n+1}\delta\,[f]_{\alpha,\bar{x}}\int_{|y-\xi|\geq\delta}|\xi-y|^{\alpha-n-1}\,dy \\
&\leq \frac{c'}{1-\alpha}2^{n+1}\left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha}\delta^{\alpha}\,[f]_{\alpha,\bar{x}} \qquad \left(c' = n^2(n+5)\right).
\end{aligned}$$

Usando as estimativas realizadas acima para $I_j,\ j \in \{1,2,\cdots,6\}$, de (2.5) podemos concluir que

$$|D_{ij}w(\overline{x}) - D_{ij}w(x)| \leq C_2(\rho^{-\alpha}\,|f(x)| + [f]_{\alpha,x} + [f]_{\alpha,\bar{x}})\,|x-\bar{x}|^{\alpha}, \tag{2.6}$$

onde C_2 é uma constante dependendo somente de n e de α.

A estimativa (2.3) segue diretamente combinando (2.4) e (2.6). $\square$

Observação 2.1. *Sejam Ω_1 e Ω_2 domínios tais que $\Omega_1 \subset B_1$, $\Omega_2 \supset B_2$ e $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega}_2)$. Se w é o potencial Newtoniano de f em Ω_2, então o Lema* 2.3 *vale para Ω_1 e Ω_2 no lugar de B_1 e B_2, respectivamente.*

Teorema 2.1. *Sejam Ω um domínio de $\mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\Omega)$ e $f \in C^{\alpha}(\Omega)$ tais que $\Delta u = f$ em Ω. Então $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ e, para quaisquer bolas concêntricas*

$B_1 = B_R(x_0), B_2 = B_{2R}(x_0) \subset\subset \Omega$, temos que

$$|u|'_{2,\alpha,B_1} \leq C(|u|_{0,B_2} + R^2\,|f|'_{0,\alpha,B_2}), \tag{2.7}$$

onde $C = C(n, \alpha)$.

Demonstração. Consideremos primeiro o caso em que a dimensão é maior que 2 ($n > 2$). Pelo Lema 2.2, para $x \in B_2$, podemos escrever $u(x) = v(x) + w(x)$, onde v é harmônica em B_2 e w é o potencial Newtoniano de f em B_2. Por outro lado, pelos Lemas 2.1 e 2.3 temos que

$$R|Dw|_{0,B_1} + R^2|D^2w|'_{0,\alpha,B_1} \leq R^2|f|'_{0,\alpha,B_2}$$

e

$$R|Dv|_{0,B_1} + R^2|D^2v|'_{0,\alpha,B_1} \leq C(|u|_{0,B_2} + R^2|f|_{0,B_2}),$$

onde a última desigualdade segue-se de $v = u - w$. A estimativa (2.7) segue diretamente combinando as estimativas obtidas acima para v e w.

Para $n = 2$, escrevemos $u(x_1, x_2, x_3) = u(x_1, x_2)$ e consideramos u como solução da equação de Poisson na bola de $\mathbb{R}^3$ (Método da Descida de Hadamard). □

Definição 2.1. *Seja Ω um subconjunto próprio de $\mathbb{R}^n$. Se $x, y \in \Omega$, sejam $d_x = dist(x, \partial\Omega)$ e $d_{x,y} = \min(d_x, d_y)$. Para $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, definimos as* *seguintes quantidades:*

$$\begin{aligned}
[u]^*_{k,0,\Omega} &= [u]^*_{k,\Omega} = \sup_{\substack{x\in\Omega\\|\beta|=k}} d_x^k \left|D^\beta u(x)\right|, && k = 0,1\cdots;\\
|u|^*_{k,\Omega} &= |u|_{k,0,\Omega} = \sum_{j=0}^{k} [u]^*_{j,\Omega};\\
[u]^*_{k,\alpha,\Omega} &= \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\|\beta|=k}} d_{x,y}^{k+\alpha} \frac{\left|D^\beta u(x) - D^\beta u(y)\right|}{|x-y|^\alpha} && 0<\alpha\leq 1;\\
|u|^*_{k,\alpha,\Omega} &= |u|^*_{k,\Omega} + [u]^*_{k,\alpha,\Omega};\\
|f|^{(k)}_{0,\alpha,\Omega} &= \sup_{x\in\Omega} d_x^k\,|f(x)| + \sup_{x,y\in\Omega} d_{x,y}^{k+\alpha}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}.
\end{aligned}$$

Nesta notação temos que

$$[u]^*_{0,\Omega} = |u|^*_{0,\Omega} = |u|_{0,\Omega}\,.$$

Note que $|u|^*_{k,\Omega}$ e $|u|^*_{k,\alpha,\Omega}$ são normas dos espaços $C^k(\Omega)$ e $C^{k,\alpha}(\Omega)$, respectivamente. Da definição acima decorre a propriedade seguinte, a qual será utilizada no Capítulo 4.

Proposição 2.1. *Suponha $j+\beta < k+\alpha$, onde $j,k = 0,1,2,\cdots$ e $0\leq\alpha,\beta\leq 1$. Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e assuma que $u\in C^{k,\alpha}(\Omega)$. Então, para $\epsilon>0$ e alguma constante $C = C(\epsilon,k,j)$, temos*

$$\begin{aligned}
[u]^*_{j,\beta,\Omega} &\leq C\,|u|_{0,\Omega} + \epsilon\,[u]^*_{k,\alpha,\Omega}\,,\\
|u|^*_{j,\beta,\Omega} &\leq C\,|u|_{0,\Omega} + \epsilon\,[u]^*_{k,\alpha,\Omega}\,.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Demonstração. Veja o capítulo 6 de [6]. □

Teorema 2.2. *Sejam $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ um aberto, $u\in C^2(\Omega)$ e $f\in C^\alpha(\Omega)$ tais que $\Delta u = f$ em Ω. Então*

$$|u|^*_{2,\alpha,\Omega} \leq C(|u|_{0,\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega}), \tag{2.9}$$

onde $C = C(n,\alpha)$.

Demonstração. Se $|u|_{0,\Omega} = \infty$ ou $|f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega} = \infty$, então a desigualdade (2.9) é trivial. Caso contrário, para $x \in \Omega$, $R = \dfrac{1}{3}d_x$, $B_1 = B_R(x)$ e $B_2 = B_{2R}(x)$, temos que

$$\begin{aligned}
d_x\,|Du(x)| + d_x^2\left|D^2u(x)\right| &\leq (3R)\,|Du|_{0,B_1} + (3R)^2\left|D^2u\right|_{0,B_1} \\
&\leq (|u|_{0,B_2} + R^2\,|f|'_{0,\alpha,B_2}), \qquad \text{por (2.7)} \\
&\leq C(|u|_{0,\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega}).
\end{aligned}$$

Com isso, obtemos

$$|u|^*_{2,\Omega} \leq C(|u|_{0,\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega}). \tag{2.10}$$

Para estimar $[u]^*_{2,\alpha,\Omega}$, sejam $x, y \in \Omega$ tais que $d_x \leq d_y$. Então

$$\begin{aligned}
d^{2+\alpha}_{x,y}\frac{|D^2u(x) - D^2u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} &\leq (3R)^{2+\alpha}\left[D^2u\right]_{\alpha,B_1} \\
&+ 3^{\alpha}(3R)^2(\left|D^2u(x)\right| + \left|D^2u(y)\right|) \\
&\leq C(|u|_{0,B_2} + R^2\,|f|'_{0,\alpha,B_2}) + 6\,|u|^*_{2,\Omega}\,, \qquad \text{por (2.7)} \\
&\leq C(|u|_{0,\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega}), \qquad \text{por (2.10)}.
\end{aligned}$$

□

No seguinte teorema, $\mathbb{R}^n_+$ denotará o conjunto $x_n > 0$, T o hiperplano $x_n = 0$, $B_1 = B_R(x_0)$ e $B_2 = B_{2R}(x_0)$ bolas concêntricas de $\mathbb{R}^n$, com $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$, $B_1^+ = B_1 \cap \mathbb{R}^n_+$ e $B_2^+ = B_2 \cap \mathbb{R}^n_+$.

Teorema 2.3. *Sejam $f \in C^{\alpha}(\overline{B}_2^+)$ e w o potencial Newtoniano de f em B_2^+. Então $w \in C^{k,\alpha}(\overline{B}_1^+)$ e*

$$|D^2w|'_{0,\alpha,B_1^+} \leq C|f|'_{0,\alpha,B_2^+},$$

com $C = C(n,\alpha)$.

Demonstração. Suponha que B_2 intercepta T, pois caso contrário o resultado segue como no Lema 2.3. Observe que a representação (2.2) vale para $D_{ij}w$ com $\Omega_0 = B_2^+$. Se $i \neq n$ ou $j \neq n$, então

$$\int_{\partial B_2^+} D_i\Gamma(x-y)\nu_j(y)ds_y = \int_{\partial B_2^+} D_j\Gamma(x-y)\nu_i(y)ds_y = 0,$$

pois $\nu_i = 0$ ou $\nu_j = 0$.

Estimamos $D_{ij}w$ (i ou $i \neq 0$) exatamente como no Lema 2.3, colocando B_2^+ no lugar de B_2, $B_\delta(\xi) \cap B_2^+$ no lugar de $B_\delta(\xi)$ e $\partial B_2^+ - T$ no lugar de ∂B_2. Para estimar D_{nn} usamos a equação $\Delta w = f$ e as estimativas feitas para $D_{kk}w$, para $k = 1, \cdots, n-1$. □

Teorema 2.4. *Sejam $u \in C^2(B_2^+) \cap C^0(\overline{B}_2^+)$ e $f \in C^\alpha(\overline{B}_2^+)$ tais que*

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in T. \end{cases}$$

Então $u \in C^{2,\alpha}(\overline{B}_1^+)$ e

$$|u|'_{2,\alpha,B_1^+} \leq C(|u|_{0,B_2^+} + |f|'_{0,\alpha,B_2^+}), \tag{2.11}$$

onde $C = C(n, \alpha)$.

Demonstração. Sejam $x' = (x_1, \cdots, x_{n-1}), x^* = (x', -x_n)$ e defina

$$f^*(x) = f^*(x', x_n) = \begin{cases} f^*(x', x_n), & \text{se } x_n \geq 0 \\ f^*(x', -x_n), & \text{se } x_n \leq 0. \end{cases}$$

Pelo Teorema 2.1, podemos assumir que B_2 intercepta T. Sejam $B_2^- = \{x \in \mathbb{R};\ x^* \in B_2^+\}$ e $D = B_2^+ \cup B_2^- \cup (B_2 \cap T)$. Então

$$f^* \in C^\alpha(\overline{D}) \text{ e } |f^*|'_{0,\alpha,D} \leq 2|f|'_{0,\alpha,B_2^+}.$$

Defina agora

$$\begin{aligned} w(x) &= \int_{B_2^+} [\Gamma(x-y) - \Gamma(x^*-y)]f(y)dy \\ &= \int_{B_2^+} [\Gamma(x-y) - \Gamma(x-y^*)]f(y)dy. \end{aligned}$$

Com isso, temos que $w(x',0) = 0$ e $\Delta w = f$ em B_2^+. Note que

$$\int_{B_2^+} [\Gamma(x-y^*)f(y)dy = \int_{B_2^-} [\Gamma(x-y)f^*(y)dy,$$

donde obtemos que

$$w(x) = 2\int_{B_2^+} \Gamma(x-y)f(y)dy - \int_D \Gamma(x-y)f^*(y)dy.$$

Definindo $w^*(x) = \displaystyle\int_D \Gamma(x-y)f^*(y)dy$, segue-se que

$$|D^2 w|'_{0,\alpha,B_1^+} \leq C|f^*|'_{0,\alpha,D} \leq 2C \leq |f|'_{0,\alpha,B_2^+}.$$

Combinando esta última desigualdade com o Lema 2.3, temos que

$$|D^2 w|'_{0,\alpha,B_1^+} \leq |f|'_{0,\alpha,B_2^+}. \tag{2.12}$$

Por fim, seja $v = u - w$. Então $\Delta v = 0$ em B_2^+ e $v = 0$ em T. Por reflexão, v pode ser extendida a uma função harmônica em B_2 e, portanto, a estimativa (2.11) segue da estimativa interior para funções harmônicas. □

Definição 2.2. *Seja Ω um subconjunto próprio de $\mathbb{R}^n_+$ com uma partição de fronteira aberta T em $x_n = 0$. Se $x, y \in \Omega$, sejam $\overline{d}_x = dist(x, \partial\Omega - T)$ e*

$\overline{d}_{x,y} = \min(\overline{d}_x, \overline{d}_y)$. *Para* $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, *definimos as seguintes quantidades:*

$$\begin{aligned}
[u]^*_{k,0,\Omega\cup T} &= [u]^*_{k,\Omega\cup T} = \sup_{\substack{x\in\Omega\\|\beta|=k}} \overline{d}_x^{\,k} \left|D^\beta u(x)\right|, \qquad k = 0, 1\cdots; \\
|u|^*_{k,\Omega\cup T} &= |u|_{k,0,\Omega\cup T} = \sum_{j=0}^{k} [u]^*_{j,\Omega\cup T}; \\
[u]^*_{k,\alpha,\Omega\cup T} &= \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\|\beta|=k}} \overline{d}_{x,y}^{\,k+\alpha} \frac{\left|D^\beta u(x) - D^\beta u(y)\right|}{|x-y|^\alpha} \qquad 0 < \alpha \leq 1; \\
|u|^*_{k,\alpha,\Omega\cup T} &= |u|^*_{k,\Omega\cup T} + [u]^*_{k,\alpha,\Omega\cup T}; \\
|f|^{(k)}_{0,\alpha,\Omega\cup T} &= \sup_{x\in\Omega} \overline{d}_x^{\,k} |u(x)| + \sup_{x,y\in\Omega} \overline{d}_{x,y}^{\,k+\alpha} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}.
\end{aligned}$$

Teorema 2.5. *Seja* Ω *um subconjunto próprio de* $\mathbb{R}^n_+$ *com uma partição de fronteira aberta* T *em* $x_n = 0$. *Sejam* $u \in C^2(\Omega)\cap C^0(\Omega\cup T)$ *e* $f \in C^\alpha(\Omega\cup T)$ *tais que*

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in T. \end{cases}$$

Então

$$|u|^*_{2,\alpha,\Omega\cup T} \leq C(|u|_{0,\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega\cup T}), \tag{2.13}$$

onde $C = C(n, \alpha)$.

Demonstração. Segue do Teorema 2.4 da mesma forma que o Teorema 2.2 segue do Teorema 2.1. $\square$

Capítulo 3

Tópicos de Análise Funcional

Desenvolvemos aqui alguns resultados de Análise Funcional, os quais serão fundamentais para garantir a existência de soluções de equações elípticas presentes no Capítulo 4.

3.1 O Método Contínuo

Nesta seção explicamos em que consiste o "Método Contínuo" para operadores lineares.

Teorema 3.1 (Método Contínuo). *Sejam B um espaço de Banach, V um espaço vetorial normado e $L_0, L_1 : B \mapsto V$ operadores limitados. Para cada $t \in [0,1]$ seja*

$$L_t = (1-t)L_0 + tL_1$$

e suponha que existe uma constante C tal que, para todo $t \in [0,1]$, tem-se

$$\|x\|_B \leq C \|L_t x\|_V . \tag{3.1}$$

Então L_1 aplica B sobre V se, e somente se, L_0 aplica B sobre V.

Demonstração. Suponha que para algum $s \in [0,1]$ o operador L_s seja sobrejetor. Por (3.1), temos que L_s é inversível.

Observe que, para $t \in [0,1]$ e $y \in V$, a equação $L_t x = y$ é equivalente a equação

$$\begin{aligned} L_s x &= y + (L_s - L_t)x \\ &= y + (t-s)L_0 x - (t-s)L_1 x. \end{aligned}$$

Esta última equação é equivalente a

$$x = L_s^{-1}y + (t-s)L_s^{-1}(L_0 - L_1)x.$$

Seja

$$\delta = [2C(\|L_0\| + \|L_1\|)]^{-1}.$$

Com isso, se $|s-t| < \delta$, então a aplicação $T : B \mapsto B$, definida por $Tx = L_s^{-1}y + (t-s)L_s^{-1}(L_0 - L_1)x$, é uma contração. Portanto o operador L_t é sobrejetor para todo $t \in [0,1]$ tal que $|s-t| < \delta$. Daí, dividindo o intervalo $[0,1]$ em subintervalos de comprimento menor do que δ, vemos que o operador L_t é sobrejetor para todo $t \in [0,1]$, desde de que L_s seja sobrejetor para algum $s \in [0,1]$. Em particular para $s = 0$ ou $s = 1$. □

3.2 A Alternativa de Fredholm

Aqui apresentamos a prova de uma das ferramentas fundamentais deste trabalho, o clássico teorema da "Alternativa de Fredholm".

Teorema 3.2 (Alternativa de Fredholm). *Seja V um espaço vetorial normado. Se $T : V \longmapsto V$ é uma aplicação linear compacta, então apenas uma das alternativas se verifica:*

(i) A equação homogênea

$$x - Tx = 0$$

tem uma solução $x \in V$ não-trivial

ou

(ii) para cada $y \in V$, a equação

$$x - Tx = y$$

tem uma única solução $x \in V$.

Lema 3.1. *Sejam V um espaço vetorial normado e M um subespaço próprio e fechado de V. Então dado $\theta < 1$, existe um elemento $x_\theta \in V$ tal que $\|x_\theta\| = 1$ e $dist(x_\theta, M) \geq \theta$.*

Demonstração. Seja $x \in V - M$. Como M é fechado, temos que

$$\text{dist}(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\| = d > 0.$$

Conseqüentemente existe um elemento $y_\theta \in M$ tal que

$$\|x - y_\theta\| \leq \frac{d}{\theta}.$$

Dessa forma, definido

$$x_\theta = \frac{x - y_\theta}{\|x - y_\theta\|},$$

temos que $\|x_\theta\| = 1$. Além disso, para todo $y \in M$, segue-se que

$$\begin{aligned} \|x_\theta - y\| &= \frac{\|x - y_\theta - \|y_\theta - x\|\, y\|}{\|y_\theta - x\|} \\ &\geq \frac{d}{\|y_\theta - x\|} \geq \theta. \end{aligned}$$

$\square$

Demonstração do Teorema 3.2. Dividiremos nossa demonstração em quatro etapas:

(1) Sejam $S = I - T$ e $N = S^{-1}(0) = \{x \in V;\ Sx = 0\}$. Então existe uma constante c tal que

$$\text{dist}(x, N) \leq c|Sx|, \quad \text{para todo } x \in V.$$

Demonstração. Suponha que a afirmação seja falsa. Então dado $c_n > 0$ existe $x_n^* \in V - N$ tal que $\text{dist}(x_n^*, N) > c_n|Sx_n^*|$. Seja $x_n = \dfrac{x_n^*}{|Sx_n^*|}$. Então

$$\begin{aligned} c_n = c_n|Sx_n| &< \frac{1}{|Sx_n^*|}\text{dist}(x_n^*, N) = \frac{1}{|Sx_n^*|}\inf_N \|x_n^* - y\| \\ &= \inf_N \|x_n - y\| = \text{dist}(x_n, N). \end{aligned}$$

Com isso, existe uma seqüência $\{x_n\} \subset V$ tal que $\|Sx_n\| = 1$ e $d_n = \text{dist}(x_n, N) \to \infty$. Escolha $\{y_n\} \subset N$ de forma que $d_n \leq \|x_n - y_n\| \leq 2d_n$. Então se $z_n = \dfrac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|}$ temos que $\|z_n\| = 1$ e

$$\|Sz_n\| = \frac{1}{\|x_n - y_n\|} \leq d_n^{-1} \to 0.$$

Portanto

$$Sz_n \to 0.$$

Como T é compacto, passando a uma subseqüência, se necessário, podemos assumir que $\{Tz_n\}$ converge a um elemento $y_0 \in V$. Como $z_n = (S+T)z_n$, temos que $z_n \to y_0$. Portanto

$$0 = \lim Sz_n = S(\lim z_n) = Sy_0.$$

Isso nos leva a uma contradição, pois

$$\begin{aligned} \text{dist}(z_n, N) &= \inf_{y \in N} \|z_n - y\| = |x_n - y_n|^{-1} \inf_{y \in N} \|x_n - y_n - \|x_n - y_n\|\, y\| \\ &= |x_n - y_n|^{-1}\, \text{dist}(x_n, N) \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$\square$

(2) Seja $R = S(V)$. Então R é um subespaço fechado de V.

Demonstração. Seja $\{x_n\}$ uma seqüência em V cujas imagens $\{Sx_n\}$ converge a um elemento $y \in V$. Para verificar que R é fechado mostraremos que $y = Sx$ para algum elemento $x \in V$. Pelo resultado anterior, a seqüência $\{d_n\}$, com $d_n = \text{dist}(x_n, N)$, é limitada, pois Sx_n é convergente. Escolhendo $y_n \in N$ como na demonstração do ítem (1) e $w_n = x_n - y_n$, temos que $\{w_n\}$ é limitada e que $\{Sw_n\}$ converge a y. Como T é compacto, passando a uma subseqüência, se necessário, podemos assumir que a seqüência Tx_n converge a um elemento $w_0 \in V$. Com isso,

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} (S+T)w_n = y + w_0.$$

E como S é contínuo, segue que

$$S(y + w_0) = \lim_{n\to\infty} S(w_n) = y.$$

Portanto R é fechado. $\square$

(3) Se $N = \{0\}$, então $R = V$. Ou seja, se o caso (i) do Teorema 3.2 não vale, então o caso (ii) é verdadeiro.

Demonstração. Pelos resultados anteriores, os conjuntos R_j, definidos por $R_j = S^j(V)$, $j = 1, 2, \cdots$, formam uma seqüência não crescente de subespaços fechados de V. Suponha que $R_n - R_{n+1} \neq \emptyset$ para todo n. Então, para todo j, tem-se que R_j é subespaço próprio de R_{j+1}. Pelo Lema 3.1, existe uma seqüencia $\{y_n\} \subset V$ tal que $y_n \in R_n$, $\|y_n\| = 1$ e

$\text{dist}(y_n, R_{n+1}) \geq \dfrac{1}{2}$. Assim, se $n > m$, temos que

$$\begin{aligned} Ty_m - Ty_n &= y_m + (-y_n - Sy_m + Sy_n) \\ &= y_n - y, \quad \text{para algum } y \in R_{m+1}. \end{aligned}$$

Portanto $\|Ty_m - Ty_n\| \geq \dfrac{1}{2}$, o que contraria a compacidade de T. Conseqüentemente existe um inteiro k tal que $R_j = R_k$, para todo $j \geq k$.

Agora seja y um ponto arbitrário de V. Então $S^k y \in R_k = R_{k+1}$. Portanto $S^k y = S^{k+1} x$, para algum $x \in V$. Segue-se daí que $S^k(y - Sx) = 0$ e, portanto, $y = Sx$, pois $S^{-k}(0) = S^{-1}(0) = 0$. Conseqüentemente $R = V$. $\square$

(4) Se $R = V$, então $N = \{0\}$. Conseqüentemente, no Teorema 3.2, ou apenas o caso (i) é verdadeiro ou apenas o caso (ii) é verdadeiro.

Demonstração. Seja $\{N_j\}$ uma seqüência não decrescente de subespaços fechados definida por $N_j = S^{-j}(0)$. Observe que tais espaços são realmente fechados devido a continuidade de S. Suponha que $N_j \neq N_{j+1}$ para todo j. Pelo Lema 3.1, existe uma seqüência $\{y_n\} \subset V$ tal que $\|y_n\| = 1$ e $\text{dist}(y_{n+1}, N_n) \geq \dfrac{1}{2}$.

Observe que, se $n \geq 2$, então

$$y_{n+1} \in N_{n+1}, \quad y_n, Sy_{n+1} \in N_n \quad \text{e} \quad Sy_n \in N_{n-1} \subset N_n.$$

Com isso,

$$Ty_{n+1} - Ty_n = y_{n+1} + (-y_n - Sy_{n+1} + Sy_n) = y_{n+1} + y,$$

onde $y \in N_n$.

Da mesma forma, concluímos que se $2 \leq m < n$, então

$$Ty_n - Ty_m = y_n - y,$$

onde $y \in N_n$. Daí $\|Ty_n - Ty_m\| \geq \dfrac{1}{2}$, o que é uma contradição.

Portanto $N_j = N_l$ para todo $j \geq$ algum inteiro l. Como $R = V$, então se $y \in N_l$, segue que $y = S^l x$, para algum $x \in V$. Conseqüentemente $S^{2l}x = 0$ e, portanto, $x \in N_{2l} = N_l$. Com isso, temos que $y = S^l x = 0$. Portanto $N_l = \{0\}$, donde se segue que $N = \{0\}$.

□

□

3.3 Operadores Elípticos

Definiremos agora operadores elípticos e discutiremos algumas consequências do "Princípio do Máximo"para tais operadores.

Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ e considere o seguinte operador L definido em Ω:

$$Lu = a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_i u + c(x)u = f(x), \quad a^{ij} = a^{ji}.$$

Aqui assumimos que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, a_{ij},b_i e c são contínuos em $\overline{\Omega}$ e que L é uniformente elíptico em Ω, ou seja, existe $\lambda > 0$ tal que

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda |\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.2}$$

Lema 3.2. *Suponha $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $Lu > 0$ em Ω, onde $c(x) \leq 0$ em Ω. Se u tem máximo não negativo em $\overline{\Omega}$, então esse máximo ocorre na fronteira de Ω.*

Demonstração. Seja m o máximo de u em $\overline{\Omega}$. Suponha que exista $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = m$. Então $D_i u(x_0) = 0$ e a matriz $B = (D_{ij}u(x_0))$ é semi-negativa definida. Pela condição de elipcidade, a matriz $A = (a_{ij}(x_0))$ é positiva definida. Portanto a matriz AB é semi-negativa definida com $a_{ij}(x_0)D_{ij}u(x_0) \leq 0$. Isso implica que $Lu(x_0) \leq 0$, o que é uma contradição. $\square$

Teorema 3.3. *Suponha $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $Lu \geq 0$ em Ω, onde $c(x) \leq 0$ em Ω. Se u tem máximo não negativo em $\overline{\Omega}$, então esse máximo ocorre na fronteira de Ω.*

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ e considere a função $w(x) = u(x) + \epsilon e^{ax_1}$, $a > 0$. Temos que

$$Lw = Lu + \epsilon e^{ax_1}(a_{11}a^2 + b_1 a + c).$$

Como b_1 e c são limitados e $a_{11}(x) \geq \lambda > 0$, para todo $x \in \Omega$, escolhendo a suficientemente grande, temos que

$$a_{11}(x)a^2 + b_1(x)a + c(x) > 0, \qquad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Isso implica que $Lw > 0$ em Ω. Pelo Lema 3.2, w atinge máximo não negativo somente em $\partial\Omega$, isto é

$$\sup_{\Omega} w \leq \sup_{\partial\Omega} w^+.$$

Portanto

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\Omega} w \leq \sup_{\partial\Omega} w^+ \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + \epsilon \sup_{\partial\Omega} e^{ax_1}.$$

Concluimos a demonstração fazendo $\epsilon \to 0$. $\square$

Teorema 3.4 (Lema de Hopf). *Sejam B uma bola aberta de $\mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \partial B$. Suponha que $u \in C^2(B) \cap C(B \cup \{x_0\})$ e $Lu \geq 0$ em B, onde $c(x) \leq 0$ em*

B. Além disso, assuma que $u(x) < u(x_0)$, para todo $x \in B$, e que $u(x_0) \geq 0$. Então, para cada direção exterior n em x_0, com $n \cdot \nu > 0$, temos

$$\liminf_{t \to 0^+} \frac{1}{t}[u(x_0) - u(x_0 - tn)] > 0.$$

Observação 3.1. *Se supomos que $u \in C^1(B \cup \{x_0\})$, então*

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) > 0.$$

Demonstração. Podemos assumir que B tem centro na origem e raio r. Além disso, podemos supor que $u \in C(\overline{B})$ e que $u(x) < u(x_0)$, para todo $x \in \overline{B}$ (basta considerar uma bola B_1 tangente a B em x_0 e tal que $B_1 \subset B$). Considere $v(x) = u(x) + \epsilon h(x)$, onde h é uma função não negativa. Denote $S = B \cap B_{r/2}(x_0)$ e defina $h(x) = e^{-a|x|^2} - e^{-ar^2}$, onde $a \in \mathbb{R}^n$ será determinado.

Observe que

$$\begin{aligned} Lh &= e^{-a|x|^2}\left\{4a^2 \sum_{i,j} a_{ij}(x)x_i x_j - 2a\sum_{i=1}^n a_{ii}(x) - 2a\sum_{i=1}^n b_i(x)x_i + c\right\} - ce^{-ar^2} \\ &\geq e^{-a|x|^2}\left\{4a^2 \sum_{i,j} a_{ij}(x)x_i x_j - 2a\sum_{i=1}^n [a_{ii}(x) + b_i(x)x_i] + c\right\}. \end{aligned}$$

Pela hipótese de elipcidade, t que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)x_i x_j \geq \lambda |x|^2 \geq \lambda \left(\frac{r}{2}\right)^2 > 0 \;\text{ em } S.$$

Assim, para a suficientemente grande, concluímos que $Lh > 0$ em S. Daí, $Lv = Lu + \epsilon Lh > 0$ em S, para todo $\epsilon > 0$. Portanto, pelo Lema 3.2, v não atinge máximo não negativo no interior de S.

Como $u(x) < u(x_0)$ para todo $x \in \partial S \cap B$, segue que existe $\delta > 0$ tal que $u(x) < u(x_0) - \delta$. Tome ϵ tal que $\epsilon h < \delta$ em $\partial S \cap B$. Com isso, temos que

$$v(x) < u(x_0), \quad \text{para todo } x \in \partial S \cap B.$$

Por outro lado, em $S \cap \partial B$, temos que $h(x) = 0$ e $u(x) < u(x_0)$ para todo $x \neq x_0$. Portanto $v(x) < u(x_0)$ em $S \cap \partial B$ e $v(x_0) = u(x_0)$.

Com isso, concluimos que

$$\frac{v(x_0) - v(x_0 - tn)}{t} \geq 0,$$

donde se segue que

$$\liminf_{t \to 0^+} \frac{1}{t}[u(x_0) - u(x_0 - tn)] \geq -\epsilon \frac{\partial h}{\partial n}(x_0).$$

Pela definição de h,

$$\frac{\partial h}{\partial n}(x_0) < 0.$$

E isso completa a demostração.

□

Teorema 3.5. *Suponha $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $Lu \geq 0$ em Ω, onde $c(x) \leq 0$ em Ω. Então o máximo não negativo de u em $\overline{\Omega}$ pode ocorrer somente em $\partial\Omega$, a menos que u seja constante.*

Demonstração. Sejam M o máximo não negativo de u em $\overline{\Omega}$ e $S = \{x \in \Omega; u(x) = M\}$. Observe que S é fechado. Suponha que S seja um subconjunto próprio de Ω. Então existem uma bola aberta $B \subset \Omega - S$ e um ponto x_0 tal que $x_0 \in \partial B \cap S$. Com isso, $u(x) < u(x_0)$ para todo $x \in B$. Daí, pelo Teorema 3.1, segue que $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} > 0$.

Por outro lado, como $u(x) \leq u(x_0)$ para todo $x \in \Omega$, temos que $Du(x_0) = 0$, o que é uma contradição. □

Definição 3.1. *Dizemos que um domínio Ω possui a propriedade interior esférica se, para todo $x_0 \in \partial\Omega$, existe uma bola $B \subset \Omega$ tal que $x_0 \in \partial B$.*

Corolário 3.1. *Suponha que* Ω *possui a propriedade interior esférica. Sejam* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *tal que* $Lu \geq 0$ *e* $c(x) \leq 0$ *em* Ω*. Assuma que* u *atinge máximo não negativo em* $x_0 \in \overline{\Omega}$*. Então* $x_0 \in \partial\Omega$ *e para todo vetor* n*, exterior a* $\partial\Omega$ *em* x_0*, temos*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0,$$

a menos que u *seja constante em* $\overline{\Omega}$*.*

Proposição 3.1. *Seja* Ω *um aberto limitado que satisfaz a propriedade interior esférica. Considere o seguinte problema:*

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{em } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(x)u = \varphi, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.3}$$

para algum $f \in C(\overline{\Omega})$ *e* $\varphi \in C(\partial\Omega)$*. Assuma que* $c(x) \leq 0$ *em* Ω *e que* $\alpha(x) \geq 0$ *em* $\partial\Omega$*. Então se* $c \neq 0$ *ou* $\alpha \neq 0$*, o problema* (3.3) *tem única solução* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$*.*

Demonstração. Considere o problema homogêneo

$$\begin{cases} Lu = 0, & \text{em } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(x)u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Suponha que u tem máximo positivo em $x_0 \in \Omega$. Se $u \equiv const > 0$, isto contradiz a condição $c \neq 0$ em Ω ou $\alpha \neq 0$ em $\partial\Omega$. Caso contrário, temos que $x_0 \in \partial\Omega$ e, pelo Corolário 3.1, segue que $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$, o que também é uma contradição. Portanto $u \equiv 0$. Isso prova a Proposição. $\square$

Proposição 3.2. *Suponha que* $\sup_{\Omega} |a_{ij}| + \sup_{\Omega} |b_i| \leq \Lambda$*. Seja* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *satisfazendo*

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{em } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(x)u = \varphi, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

para algum $f \in C(\overline{\Omega})$ *e* $\varphi \in C(\partial\Omega)$*. Se* $c(x) \leq 0$ *em* Ω *e* $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$ *em* $\partial\Omega$*, então*

$$|u(x)| \leq C\{\sup_{\partial\Omega} |\varphi| + \sup_{\Omega} |f|\}, \textit{ para todo } x \in \Omega,$$

onde C *é uma constante positiva dependendo somente de* λ, Λ, α_0 *e dim*(Ω)*.*

Demonstração. (i) Caso $c(x) \leq -c_0 < 0$.

Seja $F := \sup_{\Omega} |f(x)|$ e $\Phi := \sup_{\partial\Omega} |\varphi|$. Vamos mostrar que

$$|u(x)| \leq \frac{1}{c_0}F + \frac{1}{\alpha}\Phi, \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Defina $v := \frac{1}{c_0}F + \frac{1}{\alpha}\Phi \pm u(x)$. Então temos

$$Lv = c(x)\left(\frac{1}{c_0}F + \frac{1}{\alpha}\Phi\right) \pm f \leq -F \pm f \leq 0 \text{ em } \Omega$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} + \alpha(x)v = \alpha\left(\frac{1}{c_0}F + \frac{1}{\alpha}\Phi\right) \pm \varphi \geq \Phi \pm \varphi \geq 0, \text{ em } \partial\Omega.$$

Se v tem um mínimo negativo em $\overline{\Omega}$, então, pelo Teorema 3.4, temos que esse mínimo é atingido na fronteira. Se $x_0 \in \partial\Omega$ é tal que $v(x_0) = \min_{\Omega} |v(x)|$, então $\frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) \leq 0$. Com isso, temos que

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \nu} + \alpha v\right)(x_0) \leq \alpha v(x_0) < 0,$$

o que é uma contradição.

Portanto, $v \geq 0$ em Ω. Em particular,

$$|u(x)| \leq \frac{1}{c_0}F + \frac{1}{\alpha}\Phi, \text{ para todo } x \in \Omega.$$

(ii) Caso Geral: $c(x) \leq 0$.

Considere a função auxiliar $u(x) = z(x)w(x)$, onde z é uma função positiva em $\overline{\Omega}$ que será determinada. Daí,

$$a_{ij}D_{ij}w + B_iD_iw + \left(c + \frac{a_{ij}D_{ij}z + b_iD_iz}{z}\right)w = \frac{f}{z} \text{ em } \Omega$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \left(\alpha + \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial \nu}\right)w = \frac{\varphi}{z} \text{ em } \partial\Omega,$$

com $B_i = \dfrac{1}{z}(a_{ij} + a_{ji})D_jz + b_i$. Precisamos encontrar uma função $z > 0$ em $\overline{\Omega}$ tal que

$$c + \frac{a_{ij}D_{ij}z + b_iD_iz}{z} \leq -c_0(\lambda, \Lambda, d, \alpha_0) < 0 \text{ em } \Omega$$

e

$$\alpha + \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial \nu} \geq \frac{1}{2}\alpha_0 \text{ em } \partial\Omega,$$

ou ainda,

$$\frac{a_{ij}D_{ij}z + b_iD_iz}{z} \leq -c_0 < 0 \text{ em } \Omega$$

e

$$\left|\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial \nu}\right| \leq \frac{1}{2}\alpha_0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Suponha que se $(x_1, \cdots, x_n) \in \Omega$, então $0 < x_1 < d$. Seja $z(x) = A + e^{\beta d} - e^{\beta x_1}$, onde A e β serão determinadas. Temos que

$$-\frac{1}{z}(a_{ij}D_{ij}z + b_iD_iz) = \frac{(\beta^2 a_{11} + \beta b_1)e^{\beta x_1}}{A + e^{\beta d} - e^{\beta x_1}} \geq \frac{\beta^2 a_{11} + \beta b_1}{A + e^{\beta d}} \geq \frac{1}{A + e^{\beta d}} > 0,$$

se β for escolhido de forma que $\beta^2 a_{11} + \beta b_1 \geq 1$. Além disso, para A suficientemente grande, segue que

$$\left|\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial \nu}\right| \leq \frac{\beta}{A}e^{\beta d} \leq \frac{1}{2}\alpha_0.$$

Daí, basta aplicar o caso anterior para concluir a demonstração.

$\square$

Capítulo 4

O Problema da Derivada Oblíqua

Neste capítulo mostraremos a existência e a unicidade da solução do problema de Neumann. Esse resultado será crucial para encontrarmos uma solução para o problema contido no Teorema 5.1.

4.1 Estimativas de Schauder

Começaremos com uma extensão das idéias estabelecidas no Capítulo 2. Nosso primeiro resultado é uma generalização dos Teoremas 2.2 e 2.5.

Lema 4.1. *Na equação*

$$L_0 u = A^{ij} D_{ij} u = f(x), \quad A^{ij} = A^{ji},$$

seja $[A^{ij}]$ *uma matriz constante tal que*

$$\lambda |\xi|^2 \leq A^{ij}\xi_i\xi_j \leq \Lambda |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{4.1}$$

onde λ *e* Λ *são constantes positivas.*

(a) *Sejam* Ω *um aberto de* $\mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\Omega)$ *e* $f \in C^\alpha(\Omega)$ *tais que* $L_0 u = f$. *Então*

$$|u|^*_{2,\alpha,\Omega} \leq C(|u|_{0,\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega}),$$

onde $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda)$.

(b) *Sejam* Ω *um aberto de* $\mathbb{R}^n_+$ *com uma partição de fronteira* T *em* $x_n = 0$, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\Omega \cup T)$ *e* $f \in C^\alpha(\Omega \cup T)$ *tais que*

$$\begin{cases} L_0 u = f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } T. \end{cases}$$

Então

$$|u|^*_{2,\alpha,\Omega\cup T} \leq C(|u|_{0,\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega\cup T}), \tag{4.2}$$

onde $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda)$.

Demonstração. Seja P uma matriz constante que define uma transformação linear não singular $y = Px$ de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$. Sob essa transformação, associe $u(x)$ a $\tilde{u}(y)$, onde $\tilde{u} = u \circ P^{-1}$. Observe que

$$A^{ij} D_{ij} u(x) = \tilde{A}^{ij} D_{ij} \tilde{u}(y),$$

onde $\tilde{A} = PAP^t$. Sejam $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ os autovalores de A. Podemos escolher P ortogonal de forma que $\tilde{A}$ é a matriz $[\lambda_i \delta_{ij}]$. Se $Q = DP$, onde D é a matriz diagonal $[\lambda_i^{-1/2} \delta_{ij}]$, então a transformação $y = Qx$ associa a equação $L_0 u = f$ a equação $\Delta \tilde{u}(y) = \tilde{f}(y)$. Além disso, podemos assumir que o conjunto $x_n > 0$ é associado ao conjunto $y_n > 0$. Se, sob a transformação $y = Qx$, tivermos $\Omega \to \tilde{\Omega}$ e $v(x) \to \tilde{v}(x)$, então

$$\begin{aligned} C^{-1}|v|^*_{k,\alpha,\Omega} &\leq |\tilde{v}|^*_{k,\alpha,\Omega} \leq C|v|^*_{k,\alpha,\Omega}\,, \\ C^{-1}|v|^{(k)}_{0,\alpha,\Omega} &\leq |\tilde{v}|^{(k)}_{0,\alpha,\Omega} \leq C|v|^{(k)}_{0,\alpha,\Omega}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

onde $C = C(k, n, \lambda, \Lambda)$. Por outro lado, se Ω é um aberto de $\mathbb{R}_+$ com uma partição de fronteira T em $x_n = 0$, então sob a transformação $y = Qx$, temos que $\tilde{\Omega}$ é um aberto de $\mathbb{R}_+$ com partição de fronteira $\tilde{T}$ em $y_n = 0$. Daí, as normas da Definição 2.2 satisfazem as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} C^{-1}|v|^*_{k,\alpha,\Omega\cup T} &\leq |\tilde{v}|^*_{k,\alpha,\tilde{\Omega}\cup\tilde{T}} \leq C|v|^*_{k,\alpha,\Omega\cup T}\ , \\ C^{-1}|v|^{(k)}_{0,\alpha,\Omega\cup T} &\leq |\tilde{v}|^{(k)}_{0,\alpha,\tilde{\Omega}\cup\tilde{T}} \leq C|v|^{(k)}_{0,\alpha,\Omega\cup T}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde C é como em (4.3). Aplicando as desigualdades (4.3) e o Teorema 2.2 em $\tilde{\Omega}$, obtemos

$$|u|^*_{2,\alpha,\Omega} \leq C|\tilde{u}|^*_{2,\alpha,\Omega} \leq C(|\tilde{u}|_{0,\tilde{\Omega}} + |\tilde{f}|^{(2)}_{0,\alpha,\tilde{\Omega}}) \leq C(|u|_{0,\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega}).$$

Isso prova a parte (a) do Lema.

Para a parte (b) agimos do mesmo modo usando o Teorema 2.5 e as desigualdades (4.4). $\square$

Definição 4.1. *Sejam $\sigma \in \mathbb{R}^n$ e k um inteiro não negativo. Se $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, definimos*

$$\begin{aligned} [f]^{(\sigma)}_{k,0,\Omega} &= [f]^{(\sigma)}_{k,\Omega} = \sup_{\substack{x\in\Omega \\ |\beta|=k}} d_x^{k+\sigma}\left|D^\beta f(x)\right|, && k = 0, 1\cdots; \\ [f]^{(\sigma)}_{k,\alpha,\Omega} &= \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ |\beta|=k}} d_{x,y}^{k+\alpha+\sigma}\frac{\left|D^\beta f(x) - D^\beta f(y)\right|}{|x-y|^\alpha} && 0 < \alpha \leq 1; \\ |f|^{(\sigma)}_{k,\Omega} &= \sum_{j=0}^{k}[f]^{(\sigma)}_{j,\Omega}\,; \\ |f|^{(\sigma)}_{k,\alpha,\Omega} &= |f|^{(\sigma)}_{k,\Omega} + [f]^{(\sigma)}_{k,\alpha,\Omega}\,. \end{aligned}$$

Observe que

$$|fg|^{(\sigma+\tau)}_{0,\alpha,\Omega} \leq |f|^{(\sigma)}_{0,\alpha,\Omega}\,|g|^{(\tau)}_{0,\alpha,\Omega}\,, \quad \text{para } \sigma+\tau \geq 0. \tag{4.5}$$

Teorema 4.1. *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ uma solução limitada de*

$$Lu = a^{ij} D_{ij} u + b^i D_i u + cu = f.$$

Na equação acima assuma que $f \in C^\alpha(\Omega)$ e que existam constantes positivas λ e Λ tais que

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda \left|\xi\right|^2, \quad \forall x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

e

$$\left|a^{ij}\right|^{(0)}_{0,\alpha,\Omega}, \ \left|b^i\right|^{(1)}_{0,\alpha,\Omega}, \ \left|c\right|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega} \leq \Lambda. \tag{4.6}$$

Então

$$|u|^*_{2,\alpha,\Omega} \leq C(|u|_{0,\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega}), \tag{4.7}$$

onde $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda)$.

Demonstração. Pela Desigualdade de Interpolação (ver Proposição 2.1) é suficiente provar a desigualdade (4.7) para $[u]^*_{2,\alpha,\Omega}$. Inicialmente suponha que já tenhamos verificado o resultado para subconjuntos compactos de Ω. Agora seja $\{\Omega_i\}$ uma seqüência de subconjuntos abertos de Ω tal que $\Omega_i \subset \Omega_{i+1} \subset\subset \Omega$ e $\cup\Omega_i = \Omega$. Portanto, temos que $[u]^*_{2,\alpha,\Omega_i}$ é finito para cada i. Dessa forma, para i suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned}
(d^{(i)}_{x,y})^{2+\alpha}\frac{|D^2u(x) - D^2u(y)|}{|x-y|^\alpha} &\leq [u]^*_{2,\alpha,\Omega_i} \leq C(|u|_{0,\Omega_i} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega_i}) \\
&\leq C(|u|_{0,\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega}),
\end{aligned}$$

onde $d^{(i)}_{x,y} = \min\{\mathrm{dist}(x, \partial\Omega_i), \mathrm{dist}(y, \partial\Omega_i)\}$. Quando $i \to \infty$, obtemos

$$d^{2+\alpha}_{x,y}\frac{|D^2u(x) - D^2u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C(|u|_{0,\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega}), \ \forall x, y \in \Omega.$$

Portanto podemos assumir que $[u]^*_{2,\alpha,\Omega}$ é finito.

Sejam x_0, y_0 dois pontos distintos em Ω e suponha que $d_{x_0} = d_{x_0,y_0} = \min(d_{x_0}, d_{y_0})$. Sejam $\mu \leq \dfrac{1}{2}$ uma constante positiva, $d = \mu d_{x_0}$ e $B = B_d(x_0)$. Escreva $Lu = f$ na forma

$$a^{ij}(x_0)D_{ij}u = (a^{ij}(x_0) - a^{ij}(x))D_{ij}u - b^i D_i u - cu + f \equiv F(x)$$

e considere esta equação em B com coeficientes constantes $a^{ij}(x_0)$. Se $y_0 \in B_{d/2}(x_0)$, então, pelo Lema 4.1(a), segue que

$$\left(\frac{d}{2}\right)^{2+\alpha} \frac{|D^2u(x_0) - D^2u(y_0)|}{|x_0 - y_0|^\alpha} \leq C(|u|_{0,B} + |F|^{(2)}_{0,\alpha,B});$$

portanto

$$d_{x_0}^{2+\alpha} \frac{|D^2u(x_0) - D^2u(y_0)|}{|x_0 - y_0|^\alpha} \leq \frac{C}{\mu^{2+\alpha}}(|u|_{0,B} + |F|^{(2)}_{0,\alpha,B}).$$

Por outro lado, se $|x_0 - y_0| \geq \dfrac{d}{2}$, segue que

$$\begin{aligned} d_{x_0}^{2+\alpha} \frac{|D^2u(x_0) - D^2u(y_0)|}{|x_0 - y_0|^\alpha} &\leq \left(\frac{2}{\mu}\right)^\alpha [d_{x_0}^2|D^2u(x_0)| + d_{y_0}^2|D^2u(y_0)|] \\ &\leq \frac{4}{\mu^\alpha}[u]^*_{2,\Omega}, \end{aligned}$$

de modo que, combinando estas duas desigualdades, obtemos

$$d_{x_0}^{2+\alpha} \frac{|D^2u(x_0) - D^2u(y_0)|}{|x_0 - y_0|^\alpha} \leq \frac{C}{\mu^{2+\alpha}}(|u|_{0,B} + |F|^{(2)}_{0,\alpha,B}) + \frac{4}{\mu^\alpha}[u]^*_{2,\Omega}. \tag{4.8}$$

Observe que

$$|F|^{(2)}_{0,\alpha,B} \leq \sum_{i,j} |(a^{ij}(x_0) - a^{ij}(x))D_{ij}u|^{(2)}_{0,\alpha,B} + \sum |b^i D_i u|^{(2)}_{0,\alpha,B} + |cu|^{(2)}_{0,\alpha,B} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,B}.$$

Seja agora $g \in C^\alpha(\Omega)$. Se $x \in B$, então $d_x > (1-\mu)d_{x_0} \geq \dfrac{1}{2}d_{x_0}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} |g|^{(2)}_{0,\alpha,B} &\leq d^2|g|_{0,B} + d^{2+\alpha}[g]_{\alpha,B} \leq \frac{\mu^2}{(1-\mu)^2}[g]^{(2)}_{0,\Omega} + \frac{\mu^{2+\alpha}}{(1-\mu)^{2+\alpha}}[g]^{(2)}_{0,\alpha,\Omega} \\ &\leq 4\mu^2[g]^{(2)}_{0,\Omega} + 8\mu^{2+\alpha}[g]^{(2)}_{0,\alpha,\Omega} \leq 8\mu^2|g|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Para cada par de índices i, j, escreva $(a(x_0)-a(x))D^2u = (a^{ij}(x_0)-a^{ij}(x))D_{ij}u$. Com isso, de (4.5) e (4.9), obtemos

$$\begin{aligned}
|(a(x_0)-a(x))Du|^{(2)}_{0,\alpha,B} &\leq |a(x_0)-a(x)|^{(0)}_{0,\alpha,B}|D^2u|^{(2)}_{0,\alpha,B} \\
&\leq |a(x_0)-a(x)|^{(0)}_{0,\alpha,B}(4\mu^2[u]^*_{2,\Omega}+8\mu^{2+\alpha}[u]^*_{2,\alpha,\Omega}).
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
|a(x_0)-a(x)|^{(0)}_{0,\alpha,B} &\leq \sup_{x\in\Omega}|a(x_0)-a(x)| + d^\alpha[a]_{\alpha,B} \leq 2d^\alpha[a]_{\alpha,B} \\
&\leq 2^{1+\alpha}\mu^\alpha[a]^*_{0,\alpha,\Omega} \leq 4\Lambda\mu^\alpha,
\end{aligned}$$

então, pela Proposição 2.1, segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j}|(a^{ij}(x_0)-a^{ij}(x))D_{ij}u|^{(2)}_{0,\alpha,B} &\leq 32n^2\Lambda\mu^{2+\alpha}([u]^*_{2,\Omega}+\mu^\alpha[u]^*_{2,\alpha,\Omega}) \qquad (4.10)\\
&\leq 32n^2\Lambda\mu^{2+\alpha}(C(\mu)|u|_{0,\Omega}+2\mu^\alpha[u]^*_{2,\alpha,\Omega}).
\end{aligned}$$

Para cada índice i, seja $bDu = b^iD_iu$. Novamente, pela Proposição 2.1, (4.6) e (4.9) nos dá

$$\begin{aligned}
|bDu|^{(2)}_{0,\alpha,B} &\leq 8\mu^2|bDu|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega} \leq 8\mu^2|b|^{(1)}_{0,\alpha,\Omega}|Du|^{(1)}_{0,\alpha,\Omega} \\
&\leq 8\mu^2\Lambda|u|^*_{1,\alpha,\Omega} \leq 8\mu^2\Lambda(C(\mu)|u|_{0,\Omega}+\mu^{2\alpha}[u]^*_{2,\alpha,\Omega}).
\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$|b^iD_iu|^{(2)}_{0,\alpha,B} \leq 8n\mu^2\Lambda(C(\mu)|u|_{0,\Omega}+\mu^{2\alpha}[u]^*_{2,\alpha,\Omega}). \qquad (4.11)$$

Da mesma forma, usando (4.5) e (4.9), obtemos

$$|cu|^{(2)}_{0,\alpha,B} \leq 8\mu^2|c|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega}|u|^{(0)}_{0,\alpha,\Omega} \leq 8\mu^2\Lambda(C(\mu)|u|_{0,\Omega}+\mu^{2\alpha}[u]^*_{2,\alpha,\Omega}). \qquad (4.12)$$

Além disso, temos

$$|f|^{(2)}_{0,\alpha,B} \leq 8\mu^2|f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega}. \qquad (4.13)$$

Combinando (4.10) e (4.13) obtemos

$$|F|^{(2)}_{0,\alpha,B} \leq C^{2+2\alpha}[u]^*_{2,\alpha,\Omega} + C(\mu)(|u|_{0,\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega}).$$

Daí e de (4.8), segue que

$$d^{2+\alpha}_{x_0,y_0} \frac{|D^2u(x_0) - D^2u(y_0)|}{|x_0 - y_0|^\alpha} \leq C\mu^\alpha [u]^*_{2,\alpha,\Omega} + C(\mu)(|u|_{0,\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega}),$$

donde obtemos

$$[u]^*_{2,\alpha,\Omega} \leq C\mu^\alpha [u]^*_{2,\alpha,\Omega} + C(\mu)(|u|_{0,\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega}).$$

Escolha agora $\mu = \mu_0$ de forma que $C\mu_0^\alpha \leq \dfrac{1}{2}$. Isso nos dá

$$[u]^*_{2,\alpha,\Omega} \leq C(|u|_{0,\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega}).$$

□

4.2 O Problema de Neumann

Como conseqüência da teoria desenvolvida no Capítulo 2, do Lema 4.1 e do Teorema 4.1, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.2. *Sejam Ω um domínio $C^{2,\alpha}$ e $\beta(x) = (\beta_1(x), \cdots, \beta_n(x))$ tal que a componente normal β_ν de β satisfaça $|\beta_\nu| \geq \kappa > 0$ em $\partial\Omega (\kappa = const)$. Suponha que $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ seja uma solução do problema*

$$\begin{cases} Lu = f, & x \in \Omega \\ N(x')u \equiv \gamma(x')u + \beta(x') \cdot Du = \varphi(x'), & x' \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.14}$$

Se

$$f, a^{ij}, b^{ij}, c \in C^\alpha(\overline{\Omega}), \qquad \varphi, \gamma, \beta_i \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$$

e

$$\left|f, a^{ij}, b^{ij}, c\right|_{\alpha,\Omega}, |\varphi, \gamma, \beta_i|_{1,\alpha,\Omega} \leq \Lambda, \qquad i,j = 1, \cdots n,$$

então

$$|u|_{2,\alpha,\Omega} \leq C(|u|_{0,\Omega} + |\varphi|_{1,\alpha,\Omega} + |f|_{\alpha,\Omega}), \tag{4.15}$$

onde $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda, \kappa, \Omega)$.

Demonstração. Ver Capítulo 6 de [6] □

O Teorema acima é uma ferramenta fundamental para o seguinte resultado de existência e unicidade:

Teorema 4.3. *Sejam* Ω *um domínio* $C^{2,\alpha}$, L *um operador elíptico, com* $c \leq 0$ *e coeficientes pertencendo a* $C^\alpha(\overline{\Omega})$, *e* $Nu \equiv \gamma u + \beta \cdot Du$ *um operador definido na fronteira* $\partial\Omega$ *tal que* $\gamma(\beta \cdot \nu) > 0$ *em* $\partial\Omega$. *Assuma que* $\gamma, \beta \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$. *Então, para todos* $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ *e* $\varphi \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$, *o problema*

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{em } \Omega \\ Nu = \varphi, & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.16}$$

tem única solução em $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Pela Proposição 1.2, podemos assumir que φ e β são definidas em $\overline{\Omega}$. Além disso, sem perda de generalidade, podemos considerar $\gamma > 0$ e $\beta\nu > 0$ em $\partial\Omega$. Considere a família de problemas

$$\begin{cases} L_t u \equiv tLu + (1-t)\Delta u = f, & \text{se } x \in \Omega \\ N_t u \equiv tNu + (1-t)\left(\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + u\right) = \varphi, & \text{se } x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4.17}$$

onde $0 \leq t \leq 1$.

Seja $u_t \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ uma solução do problema (4.17) (para algum t). Observe que $|u_t|_{2,\alpha}$ satisfaz a estimativa (4.15) com C independente de t. Portanto, pela Proposição 3.2, temos que

$$|u_t|_{2,\alpha} \leq C(|\varphi|_{1,\alpha} + |f|_{0,\alpha}). \tag{4.18}$$

Além disso, pela Proposição 3.1, segue que u_t é única.

Sejam

$$\mathcal{B}_1 = C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \text{ e } \mathcal{B}_2 = C^{\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\alpha}(\partial\Omega),$$

com $\|(f,\varphi)\|_{\mathcal{B}_2} = |f|_{0,\alpha,\Omega} + |\varphi|_{1,\alpha,\partial\Omega}$,

e considere o operador

$$\mathcal{L}_t = (L_t, N_t) : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2.$$

Observe que (4.18) é equivalente a

$$\|u\|_{\mathcal{B}_1} \leq C\|\mathcal{L}_t u\|_{\mathcal{B}_2}. \tag{4.19}$$

Afirmamos que o problema

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{se } x \in \Omega \\ u + \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi, & \text{se } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

tem solução em $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ (Ver [8]). Por fim, o Teorema segue de (4.19) e do Teorema 3.1. □

Lema 4.2. *Sejam Ω um domínio $C^{2,\alpha}$, $L = \Delta$ e $Nu = \nu \cdot Du$ um operador definido na fronteira $\partial\Omega$. Então o problema*

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{em } \Omega \\ Nu = \varphi, & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.20}$$

tem única solução $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \cap \left\{v; \int_{\Omega} v(x) = 0\right\}$ para todo $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ e $\varphi \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$. Além disso, existe $C > 0$ tal que

$$|u|_{2,\alpha,\Omega} \leq C(|f|_{\alpha,\Omega} + |\varphi|_{1,\alpha,\partial\Omega}).$$

Demonstração. Considere o espaço vetorial

$$A := \left\{(-u,u); u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}), \int_{\Omega} u(x)dx = 0\right\},$$

onde definimos a norma $|(-u,u)|_A = |u|_{\alpha,\Omega} + |u|_{1,\alpha,\partial\Omega}$

e o espaço

$$B := \left\{(f,\varphi) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\alpha}(\partial\Omega)\right\},$$

onde definimos a norma $|(f,\varphi)|_B = |f|_{\alpha,\Omega} + |\varphi|_{1,\alpha,\partial\Omega}$.

Considere o operador $M_\lambda : A \longmapsto B$ definido

$$M_\lambda(-u,u) = M(-u,u) + \lambda(-u,u),$$

onde $M(-u,u) = (\Delta u, \dfrac{\partial u}{\partial \nu})$, $\lambda > 0$ e os valores da função segunda coordenada são tomados em $\partial\Omega$. Observe que, pelo Teorema 4.3, M_λ^{-1} existe.

Além disso, se $M_\lambda(-u,u) = M(-u,u) + \lambda(-u,u) = (f,\varphi)$, então

$$\frac{1}{C_1}(|u|_{\alpha,\Omega} + |u|_{1,\alpha,\partial\Omega}) \leq |u|_{2,\alpha,\Omega} \leq C(|f|_{\alpha,\Omega} + |\varphi|_{1,\alpha,\partial\Omega}). \tag{4.21}$$

Com isso, $M_\lambda^{-1} : B \mapsto A \subset B$ é compacto. Considere o problema

$$(-u,u) - \lambda M_\lambda^{-1}(-u,u) = M_\lambda^{-1}(f,\varphi). \tag{4.22}$$

Observe que $v = 0$ é a única solução do problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{em } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Equivalentemente, $(-v,v) = 0$ é a única solução do problema

$$(-u,u) - \lambda M_\lambda^{-1}(-u,u) = 0.$$

Portanto, pelo Teorema 3.2, temos que (4.22) tem única solução.

Daí,

$$(f,\varphi) = M_\lambda\left[(-u,u) - \lambda M_\lambda^{-1}(-u,u)\right] = M(-u,u).$$

Por (4.21), temos que

$$\begin{aligned} |u|_{2,\alpha,\Omega} - \left|\lambda M_\lambda^{-1}(-u,u)\right|_{2,\alpha,\Omega} &\leq \left|(-u,u) - \lambda M_\lambda^{-1}(-u,u)\right|_{2,\alpha,\Omega} \\ &\leq C(|f|_{\alpha,\Omega} + |\varphi|_{1,\alpha,\partial\Omega}), \end{aligned} \tag{4.23}$$

onde acima $\lambda M_\lambda^{-1}(-u,u)$ representa a projeção de $\lambda M_\lambda^{-1}(-u,u)$ na primeira coordenada.

Novamente por (4.21) e pela Proposição 1.1, segue que

$$\begin{aligned} \left|M_\lambda^{-1}(-u,u)\right|_{2,\alpha,\Omega} &\leq C_1(|u|_{\alpha,\Omega} + |u|_{1,\alpha,\Omega}) \\ &\leq C_1(C_2\,|u|_{0,\Omega} + \epsilon_2\,|u|_{2,\alpha,\Omega} + C_3\,|u|_{0,\Omega} + \epsilon_3\,|u|_{2,\alpha,\Omega}) \\ &\leq C_4(|u|_{0,\Omega} + |u|_{2,\alpha,\Omega}) \leq 2C_4\,|u|_{2,\alpha,\Omega}\,, \end{aligned}$$

onde $C_4 = C_1 \max\{C_2, C_3, \epsilon_2, \epsilon_3\}$.

De (4.23) segue-se que

$$|u|_{2,\alpha,\Omega} - 2\lambda C_4\,|u|_{2,\alpha,\Omega} \leq |u|_{2,\alpha,\Omega} - \left|\lambda M_\lambda^{-1}(-u,u)\right|_{2,\alpha,\Omega} \leq C(|f|_{\alpha,\Omega} + |\varphi|_{1,\alpha,\partial\Omega}).$$

Escolhendo λ de forma que $C_4\lambda = \dfrac{1}{4}$, concluímos que

$$|u|_{2,\alpha,\Omega} \leq 2C(|f|_{\alpha,\Omega} + |\varphi|_{1,\alpha,\partial\Omega}).$$

$\square$

Encerraremos estes capítulo com a seguinte generalização do teorema anterior:

Teorema 4.4 (O Problema de Neumann). *Sejam Ω um domínio $C^{k+2,\alpha}(k \geq 0)$, $f \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $\varphi \in C^{k+1,\alpha}(\partial\Omega)$. Então o problema*

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{em } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi, & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.24}$$

tem única solução $u \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega}) \cap \left\{ v; \int_\Omega v(x) = 0 \right\}$. *Além disso, existe* $C > 0$ *tal que*

$$|u|_{k+2,\alpha,\Omega} \leq C(|f|_{k,\alpha,\Omega} + |\varphi|_{k+1,\alpha,\Omega}).$$

A demonstração do Teorema 4.4 segue-se de forma similar a do Teorema 4.2. A única diferença é a utilização do seguinte Lema:

Lema 4.3. *Sejam* Ω *um domínio* C^{k+2} *e* $\beta(x) = (\beta_1(x), \cdots, \beta_n(x))$ *tal que a componente normal* β_ν *de* β *satisfaça* $|\beta_\nu| \geq \kappa > 0$ *em* $\partial\Omega(\kappa = const)$. *Suponha que* $u \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *seja uma solução do problema*

$$\begin{cases} Lu = f, & x \in \Omega \\ N(x')u \equiv \gamma(x')u + \beta(x') \cdot Du = \varphi(x'), & x' \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.25}$$

Se

$$f, a^{ij}, b^{ij}, c \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}), \qquad \varphi, \gamma, \beta_i \in C^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega})$$

e

$$\left|f, a^{ij}, b^{ij}, c\right|_{k,\alpha,\Omega}, |\varphi, \gamma, \beta_i|_{k+1,\alpha,\Omega} \leq \Lambda, \qquad i, j = 1, \cdots n,$$

então

$$|u|_{k+2,\alpha,\Omega} \leq C(|u|_{0,\Omega} + |\varphi|_{k+1,\alpha,\Omega} + |f|_{k,\alpha,\Omega}),$$

onde $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda, \kappa, k, \Omega)$.

Demonstração. Observe que se $k = 0$, o resultado segue do Teorema 4.2. Suponha o Lema válido para k. Vamos mostrar que também vale para $k+1$. Temos que

$$\frac{\partial a^{ij}}{\partial x_l} D_{ij}u + \frac{\partial b^i}{\partial x_l} D_i u + \frac{\partial c}{\partial x_l} u + a^{ij} D_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_l} + b^i D_i \frac{\partial u}{\partial x_l} + c \frac{\partial u}{\partial x_l} = \frac{\partial f}{\partial x_l}$$

e que

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x_l} u + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \beta_i}{\partial x_l} D_i u + \gamma \frac{\partial u}{\partial x_l} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i D_i \frac{\partial u}{\partial x_l} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_l}.$$

Portanto

$$\begin{cases} L\dfrac{\partial u}{\partial x_l} = \dfrac{\partial f}{\partial x_l} - g, & x \in \Omega \\ N\dfrac{\partial u}{\partial x_l} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_l} - \psi, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.26}$$

onde

$$g = \frac{\partial a^{ij}}{\partial x_l} D_{ij}u + \frac{\partial b^i}{\partial x_l} D_i u + \frac{\partial c}{\partial x_l} u$$

e

$$\psi = \frac{\partial \gamma}{\partial x_l} u + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \beta_i}{\partial x_l} D_i u.$$

Da hipótese de indução, segue que

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_l}\right|_{k+2,\alpha,\Omega} \leq C\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_l}\right|_{0,\Omega} + \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_l}\right|_{k+1,\alpha,\Omega} + |\psi|_{k+1,\alpha,\Omega} + \left|\frac{\partial f}{\partial x_l}\right|_{k,\alpha,\Omega} + |g|_{k,\alpha,\Omega}\right).$$

No entanto, observe que

$$\begin{aligned}
|g|_{k,\alpha,\Omega} &\leq \sum_{i,j}\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l} D_{ij}u\right|_{k,\alpha,\Omega} + \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial b_i}{\partial x_l} D_i u\right|_{k,\alpha,\Omega} + \left|\frac{\partial c}{\partial x_l} u\right|_{k,\alpha,\Omega} \\
&\leq \sum_{i,j} C_{ij}\, |a_{ij}|_{k+1,\alpha,\Omega}\, |u|_{k+2,\alpha,\Omega} \\
&+ \sum_{i} C_i\, |b_i|_{k+1,\alpha,\Omega}\, |u|_{k+1,\alpha,\Omega} + C\, |c|_{k+1,\alpha,\Omega}\, |u|_{k,\alpha,\Omega} \\
&\leq \Lambda \sum_{i,j} C_{ij}\, |u|_{k+2,\alpha,\Omega} + \Lambda \sum_{i=1}^{n} C_i\, |u|_{k+1,\alpha,\Omega} + \Lambda C\, |u|_{k,\alpha,\Omega}\,; \\
|\psi|_{k+1,\alpha,\Omega} &\leq \left|\frac{\partial \gamma}{\partial x_l} u\right|_{k+1,\alpha,\Omega} + \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial \beta^i}{\partial x_l} D_i u\right|_{k+1,\alpha,\Omega} \\
&\leq C\, |\gamma|_{(k+1)+1,\alpha,\Omega}\, |u|_{k+1,\alpha,\Omega} + \sum_{i=1} C_i\, |\beta_i|_{(k+1)+1,\alpha,\Omega}\, |u|_{k+2,\alpha,\Omega} \\
&\leq C\Lambda\, |u|_{k+1,\alpha,\Omega} + \Lambda \sum_{i=1}^{n} C_i\, |u|_{k+2,\alpha,\Omega}\,.
\end{aligned}$$

Daí, pela Proposição 1.1, temos

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_l}\right|_{k+2,\alpha,\Omega} \leq C\left(C_0\, |u|_{0,\Omega} + |\varphi|_{(k+1)+1,\alpha,\Omega} + |f|_{k+1,\alpha,\Omega} + \epsilon\, |u|_{(k+1)+2,\alpha,\Omega}\right).$$

Portanto

$$|u|_{(k+1)+2,\alpha,\Omega} = \sup_l \left| \frac{\partial u}{\partial x_l} \right|_{k+2,\alpha,\Omega}$$
$$\leq C \left(C_0 \, |u|_{0,\Omega} + |\varphi|_{(k+1)+1,\alpha,\Omega} + |f|_{k+1,\alpha,\Omega} + \epsilon \, |u|_{(k+1)+2,\alpha,\Omega} \right).$$

Escolhendo ϵ de forma que $\epsilon C = \dfrac{1}{2}$, concluimos que

$$|u|_{k+2,\alpha,\Omega} \leq C_1(|u|_{0,\Omega} + |\varphi|_{k+1,\alpha,\Omega} + |f|_{k,\alpha,\Omega}).$$

$\square$

Capítulo 5

Uma EDP Envolvendo o Determinate Jacobiano

Neste capítulo demonstraremos o Teorema 0.1 enunciado na Introdução deste trabalho. Como veremos, tal demonstração segue-se diretamente do Teorema 5.4, enunciado no final do capítulo. Comecemos com o seguinte resultado:

Teorema 5.1. *Sejam $k \geq 0$ um inteiro, $0 < \alpha < 1$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira $C^{k+3,\alpha}$. Seja $g \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ tal que $\int_\Omega g(x)dx = 0$. Então existe $v \in C^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ satisfazendo a*

$$\begin{cases} div(v(x)) = g(x), & se\ x \in \Omega \\ v(x) = 0, & se\ x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.1}$$

Além disso, existe $C > 0$ tal que $|v|_{k+1,\alpha} \leq C\,|g|_{k,\alpha}$.

Precisamos da seguinte definição:

Definição 5.1. *Seja $w \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n(n-1)/2})$ tal que $w = (w_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$. Se $i \geq j$, seja $w_{ij} = -w_{ji}$. Então definimos*

$$curl^* w = ((curl^* w)_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^n,$$

com

$$(curl^*w)_j = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_i}.$$

Observação 5.1. *Se $i < j$, então na j-ésima coordenada de $curl^*w$ aparece a parcela*

$$(-1)^{i+j} \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_i}.$$

Por outro lado, na i-ésima coordenada de $curl^*w$ aparece a parcela

$$(-1)^{i+j} \frac{\partial w_{ji}}{\partial x_j} = -(-1)^{i+j} \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_j}, \text{ pois } j > i.$$

Portanto, se $w \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n(n-1)/2})$, então

$$div(curl^*w) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_i} \right) = 0.$$

Demonstração do Teorema 5.1. Pelo Teorema 4.4, o problema de Neumann

$$\begin{cases} \Delta a = g, & \text{se } x \in \Omega \\ \dfrac{\partial a}{\partial \nu} = 0, & \text{se } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

tem uma única solução $a \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ com $\displaystyle\int_\Omega a(x)dx = 0$. Ainda pelo Teorema 4.4, existe $C > 0$ tal que

$$|a|_{k+2,\alpha} \leq C\,|g|_{k,\alpha}\,.$$

Seja agora $c \in C^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ definida por $c(x) := -\nabla a(x)$ e suponha que existam $b \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n(n-1)/2})$ e $C > 0$ tais que:

$$\begin{cases} \text{curl}^*b = c, & \text{se } x \in \partial\Omega \\ |b|_{k+2,\alpha} \leq C\,|c|_{k+1,\alpha} = C\,|\nabla a|_{k+1,\alpha}\,. & \end{cases}$$

Se definimos $v := \nabla a + \text{curl}^*b$, segue-se que v resolve o problema do Teorema 5.1. Para verificar isso, observe que

$$div(v) = div(\nabla a + \text{curl}^*b) = \Delta a + 0 = g,\ x \in \Omega.$$

Além disso, temos que

$$|\nabla a|_{k+1,\alpha} = |\nabla a|_{k+1} + \max_i \left(\sup_{x\neq y} \frac{\left| D^{k+1}\dfrac{\partial a(x)}{\partial x_i} - D^{k+1}\dfrac{\partial a(y)}{\partial y_i} \right|}{|x-y|^{\alpha}} \right) \leq$$

$$|a|_{k+2} + \left(\sup_{x\neq y} \frac{\left| D^{k+2}a(x) - D^{k+2}a(y) \right|}{|x-y|^{\alpha}} \right) = |a|_{k+2,\alpha}$$

e

$$\left| \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_i} \right|_{k+1,\alpha} \leq |b|_{k+2,\alpha}\,.$$

Portanto

$$|\mathrm{curl}^* b|_{k+1,\alpha} \leq n\,|b|_{k+2,\alpha} \leq nC\,|\nabla a|_{k+1,\alpha}\,.$$

Logo

$$\begin{aligned} |v|_{k+1,\alpha} &\leq |\nabla a|_{k+1,\alpha} + |\mathrm{curl}^* b|_{k+1,\alpha} \leq |\nabla a|_{k+1,\alpha} + Cn|\nabla a|_{k+1,\alpha} \\ &\leq (Cn+1)|a|_{k+2,\alpha} \leq (Cn+1)C|g|_{k,\alpha}. \end{aligned}$$

Consideremos agora o problema

$$\mathrm{curl}^* b = c \text{ em } \partial\Omega,$$

onde $c \in C^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e $\langle c, \nu \rangle = 0$ em $\partial\Omega$. Podemos assumir que

$$\nabla b_{ij} = (-1)^{i+j}(c_j\nu_i - c_i\nu_j)\nu,\ x \in \partial\Omega.$$

Com efeito, temos

$$(\mathrm{curl}^* b)_j = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} (c_j\nu_i - c_i\nu_j)\nu_i = c_j\,|\nu|^2 - \langle c, \nu \rangle\,\nu_j = c_j\,|\nu|^2 = c_j.$$

Portanto o problema se reduz a achar $b_{ij} \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ satisfazendo a seguinte equação:

$$\nabla b_{ij} = c_{ij}\nu, x \in \partial\Omega, \tag{5.2}$$

onde $c_{ij} = (-1)^{i+j}(c_j\nu_i - c_i\nu_j)$.

Sejam $d(x, \partial\Omega)$ a função distância de um ponto $x \in \overline{\Omega}$ à fronteira $\partial\Omega$ e $\rho \in C^\infty$ tal que se $\delta > 0$, então

$$\rho(x) \equiv 0 \text{ se } x \notin (-\delta, \delta),\ \rho(0) = 0 \text{ e } \rho'(0) = 1.$$

Dessa forma, definindo

$$b_{ij} = -c_{ij}\rho(d(x, \partial\Omega)),$$

segue que b_{ij} é solução de (5.2), pois

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_i} = -\frac{\partial c_{ij}}{\partial x_i}\rho(d(x, \partial\Omega)) + c_{ij}\rho'(d(x, \partial\Omega))\nu_i = c_{ij}\nu_i.$$

No entanto, observe que $b_{ij} \in C^{k+1,\alpha}$.

Acima estamos usando o fato que

$$\nabla d(x, \partial\Omega) = \nu, \quad \text{para todo } x \in \partial\Omega.$$

Para maiores detalhes veja o Lema 5.4 no Apêndice.

Para encontrar uma solução em $C^{k+2,\alpha}$, consideremos a solução do seguinte problema de Neumann:

$$\begin{cases} \Delta d_{ij} = \dfrac{1}{\mathrm{Vol}\Omega}\displaystyle\int_\Omega c_{ij}d\tau, & \text{se } x \in \Omega \\ \dfrac{\partial d_{ij}}{\partial \nu} = c_{ij}, & \text{se } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\displaystyle\int_\Omega d_{ij}dx = 0$.

Com isso, $d_{ij} \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e existe $C > 0$ tal que

$$|d_{ij}|_{k+2,\alpha} \leq C|c_{ij}|_{k+1,\alpha}.$$

Seja agora $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\chi'(0) = 0$, $\chi(0) = 1$ e $\chi = 0$ no exterior de uma vizinhança de 0. Defina

$$b_{ij}(x) = d_{ij}(x) - \chi(d(x, \partial\Omega))d_{ij}(\psi(x)),$$

onde $\psi(x) = x - d(x, \partial\Omega)\nabla d(x, \partial\Omega)$.

Dessa forma $b_{ij} \in C^{k+2,\alpha}$, pois $\partial\Omega \in C^{k+3,\alpha}$ e $d_{ij} \in C^{k+2,\alpha}$. Além disso, como

$$|d_{ij}|_{k+2,\alpha} \leq C|c_{ij}|_{k+1,\alpha},$$

segue que

$$|b_{ij}|_{k+2,\alpha} \leq C|c_{ij}|_{k+1,\alpha}.$$

Assim, obtemos a desigualdade

$$|b|_{k+2,\alpha} \leq C|c|_{k+1,\alpha}.$$

Por fim, observe que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k} &= \frac{\partial d_{ij}}{\partial x_k} - (\chi'(d(x,\partial\Omega)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} d(x,\partial\Omega) d_{ij}(\psi(x)) \\
&+ \chi(d(x,\partial\Omega)) \cdot \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial d_{ij}}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial \psi_l}{\partial x_k}) \\
&= \frac{\partial d_{ij}}{\partial x_k} - \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial d_{ij}}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial \psi_l}{\partial x_k} \\
&= \frac{\partial d_{ij}}{\partial x_k} - \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial d_{ij}}{\partial x_l} \left[\delta_{lk} - \left(\nu_k \nu_l + d(x,\partial\Omega) \frac{\partial}{\partial x_k} (\nabla d(x,\partial\Omega))_l \right) \right] \\
&= \frac{\partial d_{ij}}{\partial x_k} - \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial d_{ij}}{\partial x_l} (\delta_{lk} - \nu_k \nu_l) \\
&= \frac{\partial d_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial x_k} + \nu_k \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial d_{ij}}{\partial x_l} \nu_l \\
&= \nu_k \frac{\partial d_{ij}}{\partial \nu} \\
&= c_{ij} \nu_k.
\end{aligned}$$

□

Isso conclui o Teorema.

Lema 5.1. *Seja* $t \in [0,1]$. *Se* $f(x) \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ *e* $f > 0$ *em* $\overline{\Omega}$, *então* $\dfrac{1}{t+(1-t)f(x)} \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Demonstração. Seja $p = \inf\limits_{\Omega} f(x) > 0$. A prova será por indução sobre k.

(i) Para $k = 0$ temos:
$\left|\dfrac{1}{t+(1-t)f(x)}\right|_0 = \sup\limits_{\Omega}\left|\dfrac{1}{t+(1-t)f(x)}\right| = \dfrac{1}{\inf\limits_{\Omega}|t+(1-t)f(x)|} \leq \dfrac{1}{p_0}$,
pois $0 < p_0 = t+(1-t)p \leq t+(1-t)f(x)$.

Além disso,

$$\sup_{x\neq y}\frac{\left|\dfrac{1}{t+(1-t)f(x)} - \dfrac{1}{t+(1-t)f(y)}\right|}{|x-y|^{\alpha}} =$$

$$\sup_{x\neq y}\frac{\left|\dfrac{t+(1-t)f(y)-(t+(1-t)f(x))}{(t+(1-t)f(x))(t+(1-t)f(y))}\right|}{|x-y|^{\alpha}} =$$

$$\sup_{x\neq y}\frac{|t+(1-t)f(x)-(t+(1-t)f(y))|}{(t+(1-t)f(x))(t+(1-t)f(y))\,|x-y|^{\alpha}} \leq$$

$$\sup_{x\neq y}\frac{1}{(t+(1-t)f(x))(t+(1-t)f(y))}\sup_{x\neq y}\frac{|t+(1-t)f(x)-(t+(1-t)f(y))|}{|x-y|^{\alpha}}$$

$$\leq \frac{1}{p_0^2}\sup_{x\neq y}\frac{|t+(1-t)f(x)-(t+(1-t)f(y))|}{|x-y|^{\alpha}} < \infty.$$

(ii) Suponha agora que o teorema vale para k. Vamos mostrar que vale para $k+1$. Seja β um multi-índice tal que $|\beta| = k+1$. Temos

$$\sup_{x\neq y}\frac{\left|D^{\beta}\left(\dfrac{1}{(t+(1-t)f(x))}\right) - D^{\beta}\left(\dfrac{1}{(t+(1-t)f(y))}\right)\right|}{|x-y|^{\alpha}} =$$

$$\sup_{x\neq y}\frac{\left|D^{\beta-1}\left(D_{x^i}\left(\frac{1}{(t+(1-t)f(x))}\right)\right)-D^{\beta-1}\left(D_{x^i}\left(\frac{1}{(t+(1-t)f(y))}\right)\right)\right|}{|x-y|^{\alpha}}.$$

Observe que $D_{x^i}\left(\frac{1}{t+(1-t)f(x)}\right)=-\frac{(1-t)f_{x^i}(x)}{(t+(1-t)f(x))^2}\in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Com efeito,

$$-(1-t)f_{x^i}(x)\in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) \text{ e } (t+(1-t)f(x))\in C^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega}),$$

em particular,

$$(t+(1-t)f(x))\in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega});$$

portanto, pela hipótese de indução,

$$\frac{1}{(t+(1-t)f(x))^2}=\frac{1}{t+(1-t)f(x)}\cdot\frac{1}{t+(1-t)f(x)}\in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$$

e

$$-(1-t)f_{x^i}(x)\cdot\frac{1}{(t+(1-t)f(x))^2}\in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}).$$

Com isso, e com o fato que $|\beta-1|=k$, temos

$$\sup_{x\neq y}\frac{\left|D^{\beta-1}\left(D_{x^i}\left(\frac{1}{t+(1-t)f(x)}\right)\right)-D^{\beta-1}\left(D_{x^i}\left(\frac{1}{t+(1-t)f(y)}\right)\right)\right|}{|x-y|^{\alpha}}<\infty,$$

ou seja,

$$\sup_{x\neq y}\frac{\left|D^{\beta}\left(\frac{1}{t+(1-t)f(x)}\right)-D^{\beta}\left(\frac{1}{t+(1-t)f(y)}\right)\right|}{|x-y|^{\alpha}}<\infty.$$

Além disso, se $|\delta|\leq k+1$, então $|\delta-1|\leq k$ e

$$\sup_{\Omega}\left|D^{\delta}\left(\frac{1}{t+(1-t)f(x)}\right)\right|=\sup_{\Omega}\left|D^{\delta-1}\left(D_{x^i}\left(\frac{1}{t+(1-t)f(x)}\right)\right)\right|<\infty.$$

Portanto

$$\left|\frac{1}{t+(1-t)f}\right|_{k+1,\alpha}<\infty.$$

Isso prova o lema.

$\square$

Teorema 5.2. *Sejam $k \geq 1$ um inteiro, $0 < \alpha < 1$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira $\partial\Omega \in C^{k+3,\alpha}$. Se $f \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, com $f > 0$ em $\overline{\Omega}$ e $\displaystyle\int_\Omega f(x)dx = Vol\Omega$, então existe $u \in Dif^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ satisfazendo*

$$\begin{cases} \det \nabla u(x) = f(x), & \textit{se } x \in \Omega \\ u(x) = x, & \textit{se } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.3}$$

Demonstração. Pelo Teorema 5.1, existe $v \in C^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tal que

$$\begin{cases} \operatorname{div}(v(x)) = f(x) - 1, & \text{se } x \in \Omega \\ v(x) = 0, & \text{se } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Para $t \in [0,1]$ e $z \in \Omega$, seja

$$v_t(z) = \frac{v(z)}{t + (1-t)f(z)}.$$

Observe que, pelo Lema 5.1, $v_t(x) \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Defina $\phi_t(x) : [0,1] \times \Omega \longmapsto \mathbb{R}^n$ como sendo a solução de

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}[\phi_t(x)] = v_t(\phi_t(x)), & t > 0 \\ \phi_0(x) = x. \end{cases} \tag{5.4}$$

Note que, para todo $t \in [0,1]$, $\phi_t \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e ϕ_t é unicamente definida em $[0,1]$. Observe ainda que se $x \in \partial\Omega$, então x é solução de (5.4), ou seja, para todo $t \in [0,1]$, $\phi_t(x) = x$. Vamos mostrar que $u(x) = \phi_1(x)$ é solução de (5.3).

Primeiramente, pela observação anterior, temos $u(x) = \phi_1(x) = x$, para todo $x \in \partial\Omega$.

Seja

$$h(t,x) \equiv \det \nabla\phi_t(x) \cdot [t + (1-t)f(\phi_t(x))]. \tag{5.5}$$

Sendo $\dfrac{d}{dt}[\phi_t(x)] = v_t(\phi_t(x))$, segue que

$$\nabla(\frac{d}{dt}\phi_t(x)) = \nabla(v_t(\phi_t(x)) \Rightarrow \frac{d}{dt}(\nabla\phi_t(x)) = \nabla v_t(\phi_t(x))\nabla\phi_t(x).$$

Daí, pela fórmula de Liouville,

$$\frac{d}{dt}[\det(\nabla\phi_t(x))] = \operatorname{tr}(\nabla v_t(\phi_t(x)))\det(\nabla\phi_t(x)). \tag{5.6}$$

Diferenciando (5.5), temos

$$\frac{d}{dt}h(t,x) = \frac{d}{dt}[\det\nabla\phi_t]\cdot[t+(1-t)f(\phi_t)]+[\det\nabla\phi_t]\cdot[1-f(\phi_t)+(1-t)\langle\nabla f(\phi_t),\frac{d}{dt}\phi_t\rangle].$$

Usando (5.4) e (5.6),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}h(x,t) &= [\det\nabla\phi_t]\cdot[(t+(1-t)f(\phi_t))\operatorname{div}(v_t(\phi_t))\\ &\quad +(1-t)\langle\nabla f(\phi_t), v_t(\phi_t)\rangle + (1-f(\phi_t))].\end{aligned} \tag{5.7}$$

Como $v_t(z) = \dfrac{v(z)}{t+(1-t)f(z)}$, segue que

$$\begin{aligned}v(z) &= v_t(z)[t+(1-t)f(z)]\\ &= (v_t^1(z)(1+(1-t)f(z),\cdots,v_t^n(z)(1+(1-t)f(z)). \text{ Com isso,}\\ \operatorname{div}(v(z)) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dz^i}\{v_t^i(z)[t+(1-t)f(z)]\} \qquad (5.8)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\{\frac{d}{dz^i}v_t^i(z)[t+(1-t)f(z)]+v_t^i(z)(1-t)\frac{d}{dz^i}f(z)\}\\ &= (t+(1-t)f(z))\operatorname{div}(v_t(z))+(1-t)\langle\nabla f(z), v_t(z)\rangle.\end{aligned}$$

Daí, combinando as identidades (5.7) e (5.8),

$$\frac{d}{dt}h(x,t) = [\det\nabla\phi_t]\cdot[\operatorname{div}(v(\phi_t))+(1-f(\phi_t))] = 0,$$

pois $\operatorname{div}(v) = f-1$. Em particular,

$$h(1,x) = h(0,x) \Rightarrow \det\nabla\phi_1(x) = \det\nabla\phi_0(x)\cdot f(\phi_0(x)) = f(x),$$

pois $\phi_0(x) = x$. $\square$

Lema 5.2. *Se $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e $n \geq 2$, então*

$$T(x) = \sum_{t=1}^{n} (-1)^{1+t} \frac{\partial}{\partial x_t} \left[\frac{\partial(u_2, \cdots, u_n)}{\partial(x_1, x_t^*, x_n)} \right] = 0.$$

Demonstração. Vale para o caso $n = 2$, pois, neste caso,

$$T(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0.$$

Suponha que o lema vale para $n - 1$.

Temos

$$\frac{\partial(u_1, \cdots, u_{n-1})}{\partial(x_1, \cdots, x_{n-1})} = \sum_{\alpha=1}^{n-1} (-1)^{\alpha+1} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[u_1 \frac{\partial(u_2, \cdots, u_{n-1})}{\partial(x_1, x_\alpha^*, x_{n-1})} \right].$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u_2, \cdots, u_n)}{\partial(x_1, x_t^*, x_n)} &= \sum_{\alpha=1}^{t-1} (-1)^{\alpha+1} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[u_2 \frac{\partial(u_3, \cdots, u_n)}{\partial(x_1, x_\alpha^*, x_t^*, x_n)} \right] \\ &+ \sum_{\alpha=t+1}^{n} (-1)^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[u_2 \frac{\partial(u_3, \cdots, u_n)}{\partial(x_1, x_t^*, x_\alpha^*, x_n)} \right]. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{t=1}^{n} (-1)^{1+t} \frac{\partial}{\partial x_t} \left[\frac{\partial(u_2, \cdots, u_n)}{\partial(x_1, x_t^*, x_n)} \right] \\ &= \sum_{t=1}^{n} [\sum_{\alpha=1}^{t-1} (-1)^{\alpha+t} \frac{\partial^2}{\partial x_t \partial x_\alpha} \left(u_2 \frac{\partial(u_3, \cdots, u_n)}{\partial(x_1, x_\alpha^*, x_t^*, x_n)} \right) \\ &+ \sum_{\alpha=t+1}^{n} (-1)^{\alpha+t+1} \frac{\partial^2}{\partial x_t \partial x_\alpha} \left(u_2 \frac{\partial(u_3, \cdots, u_n)}{\partial(x_1, x_t^*, x_\alpha^*, x_n)} \right)] = 0, \end{aligned}$$

pois cada parcela acima aparece exatamente duas vezes com sinais inversos.

□

Corolário 5.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e $A_{n \times n}$ uma matriz. Se $\varphi \in C_0^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, então*

$$\int_\Omega \det(A + \nabla\varphi(x))dx = \det A \cdot Vol\Omega. \tag{5.9}$$

Demonstração. (i) Se $n = 1$, então $\Omega = (c, d)$ e $A = a \in \mathbb{R}$. Daí,

$$\int_c^d \det(a+\varphi'(x))dx = \int_c^d (a+\varphi'(x))dx = a(d-c)+\varphi(d)-\varphi(c) = a\mathrm{Vol}\Omega.$$

(ii) Se $n = 2$, temos

$$\begin{aligned} \det(A + \nabla\varphi(x)) &= \det A + a_{11}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} + a_{22}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} - a_{12}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} \\ &- a_{21}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

Com isso, o resultado segue-se usando o teorema de integração por partes.

(iii) Suponha que (5.9) vale para $n - 1$. Temos que

$$\begin{aligned} \det(A + \nabla\varphi(x)) &= \sum_{\alpha=1}^{n}(a_{1\alpha} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_\alpha}) \cdot (\mathrm{Adj}_{n-1}(A + \nabla\varphi))^1_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} a_{1\alpha}(\mathrm{Adj}_{n-1}(A + \nabla\varphi))^1_\alpha \\ &+ \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_\alpha}(\mathrm{Adj}_{n-1}(A + \nabla\varphi))^1_\alpha. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Daí, usando a hipótese de indução, o Lema anterior e integração por partes, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \det(A + \nabla\varphi(x))dx &= \sum_{\alpha=1}^{n} a_{1\alpha}\int_\Omega (\mathrm{Adj}_{n-1}(A + \nabla\varphi))^1_\alpha dx \\ &+ \sum_{\alpha=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_\alpha}(\mathrm{Adj}_{n-1}(A + \nabla\varphi))^1_\alpha = \det A \cdot \mathrm{Vol}\Omega \\ &+ \sum_{\alpha=1}^{n}\int_\Omega \varphi_1(x)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\mathrm{Adj}_{n-1}(A + \nabla\varphi))^1_\alpha)dx \\ &= \det A \cdot \mathrm{Vol}\Omega. \end{aligned}$$

□

Corolário 5.2. *Se $v \in C_0^{k,\alpha}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, então $\displaystyle\int_\Omega \det(A + \nabla v(x))dx = \det A \cdot$ $Vol\Omega$.*

Demonstração. Pela densidade de $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ em $C_0^{k,\alpha}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, existe $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ tal que $v_n \to v$ na norma C^k. Com isso, temos que

$$\int_\Omega \det(A + \nabla v_n(x))dx = \det A \cdot Vol\Omega.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \det(A + \nabla v_n(x))dx = \det A \cdot \mathrm{Vol}\Omega,$$

de onde se segue que

$$\int_\Omega \det(A + \nabla v(x))dx = \det A \cdot \mathrm{Vol}\Omega.$$

□

Teorema 5.3. *Sejam $k \geq 0$ um inteiro , $0 < \alpha < 1$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado tal que $\partial\Omega \in C^{k+3,\alpha}$. Sejam $0 < \beta \leq \alpha < 1$ e $f \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, com $f > 0$ em $\overline{\Omega}$ e $\displaystyle\int_\Omega f(x)dx = Vol\Omega$. Existe $\epsilon = \epsilon(\alpha, \beta, k, \Omega) > 0$ tal que se $|f-1|_{0,\beta} \leq \epsilon$, então existe $u \in Dif^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que*

$$\begin{cases} \det \nabla u(x) = f(x), & \text{se } x \in \Omega \\ u(x) = x, & \text{se } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.11}$$

Demonstração. Comecemos escolhendo constantes $C_1, C_2 > 0$ da seguinte forma:

(i) Sejam

$X = \{b \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}); \displaystyle\int_\Omega b(x)dx = 0\}$ e $Y = \{a \in C^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n); a = 0, x \in \partial\Omega\}$.

Pelo Teorema 5.1, podemos definir um operador linear limitado $L :$ $X \longmapsto Y$ que associa a cada $b \in X$ um $a \in Y$ tal que

$$\begin{cases} \mathrm{div}(a) = b, & \text{se } x \in \Omega \\ a = 0, & \text{se } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Além disso, existe $C_1 > 0$ tal que

$$|Lb|_{1,\beta} \leq C_1 \, |b|_{0,\beta} \ \text{ e } \ |Lb|_{k+1,\alpha} \leq C_1 \, |b|_{k,\alpha} \, .$$

(ii) Se ξ é uma matriz $n \times n$, defina

$$Q(\xi) = \det(I + \xi) - 1 - \mathrm{tr}(\xi).$$

Podemos achar $C_2 > 0$ tal que se $w_1, w_2 \in C^{k,\alpha}$, com $|w_1|_0 \, , |w_2|_0 \leq 1$, então

$$|Q(w_1) - Q(w_2)|_{k,\alpha} \leq C_2(|w_1|_0 + |w_2|_0) \, |w_1 - w_2|_{k,\alpha} \, .$$

Observe agora que se definimos $v(x) = u(x) - x$, então (5.11) é equivalente a

$$\begin{cases} \mathrm{div}(v) = f - 1 - Q(\nabla v), & \text{se } x \in \Omega \\ v = 0, & \text{se } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.12}$$

Observe ainda que se $N(v) = f - 1 - Q(\nabla v)$, então (5.12) é satisfeita para todo $v \in Y$ tal que

$$LN(v) = v. \tag{5.13}$$

Note que a equação (5.13) está bem definida, pois pelo Corolário (5.2) temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega N(v(x))dx &= \int_\Omega [f(x) - 1 - Q(\nabla v(x))]dx \\ &= \int_\Omega [f(x) + \mathrm{div}(v(x)) - \det(I + \nabla v(x))]dx = 0. \end{aligned}$$

Sejam $r > 0$ e $B_r = \{u \in C^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n); u = 0 \text{ em } \partial\Omega \text{ e } |u|_{1,\beta} \leq r\}$. Sejam $f \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ tal que

$$|f - 1|_{0,\beta} \leq \min\left\{\frac{1}{8C_1^2 C_2}; \frac{1}{2C_1}\right\} \ \text{ e } r = 2C_1 \, |f - 1|_{0,\beta} \, .$$

Se $v, w \in B_r$, então

$$|LN(v) - LN(w)|_{k+1,\alpha} \le C_1 \, |N(v) - N(w)|_{k,\alpha} = C_1 \, |Q(\nabla v) - Q(\nabla w)|_{k,\alpha}$$

$$\le C_1 C_2 (|\nabla v|_0 + |\nabla w|_0) \, |\nabla v - \nabla w|_{k,\alpha} = C_1 C_2 (|\nabla v|_0 + |\nabla w|_0) \, |\nabla (v - w)|_{k,\alpha}$$

$$\le C_1 C_2 (|v|_{1,\beta} + |w|_{1,\beta}) \, |v - w|_{k+1,\alpha} \le 4 C_1^2 C_2 \, |f - 1|_{0,\beta} \, |v - w|_{k+1,\alpha} \le \frac{1}{2} \, |v - w|_{k+1,\alpha} \, .$$

Ou seja,

$$|LN(v) - LN(w)|_{k+1,\alpha} \le \frac{1}{2} \, |v - w|_{k+1,\alpha} \, . \tag{5.14}$$

Além disso,

$$|LN(0)|_{1,\beta} \le C_1 \, |N(0)|_{0,\beta} = C_1 \, |f - 1|_{0,\beta} = \frac{r}{2}.$$

Sabendo que a igualdade (5.14) vale para $\alpha = \beta$ e $k = 0$, temos

$$|LN(v) - LN(w)|_{1,\beta} \le \frac{1}{2} \, |v - w|_{1,\beta} \, .$$

Daí,

$$|LN(v)|_{1,\beta} \le \frac{1}{2} \, |v|_{1,\beta} + |LN(0)|_{1,\beta} \le \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Com isso, concluímos que $LN : B_r \longmapsto B_r$ é uma contração, o que implica que existe $v \in B_r$ tal que (5.13) é satisfeita. Isso prova o Teorema 5.3. $\square$

Teorema 5.4. *Sejam $k \ge 0$ um inteiro , $0 < \alpha < 1$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado tal que $\partial\Omega \in C^{k+3,\alpha}$. Se $f \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, com $f > 0$ em $\overline{\Omega}$ e $\displaystyle\int_\Omega f(x)dx = Vol\Omega$, então existe $u \in Dif^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega})$ satisfazendo a*

$$\begin{cases} \det \nabla u(x) = f(x), & se\ x \in \Omega \\ u(x) = x, & se\ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Demonstração. Pela densidade de $C^\infty(\overline{\Omega})$ em $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ com relação a norma de $C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$, sendo $0 < \beta < \alpha < 1$, existe $g \in C^\infty(\overline{\Omega})$, com $g > 0$ em $\overline{\Omega}$, tal que

$$\left|\frac{f}{g} - 1\right|_{0,\beta} \leq \epsilon \text{ e } \int_\Omega \frac{f(x)}{g(x)} = \text{Vol}\Omega,$$

onde ϵ é dado pelo Teorema 5.3 (Para maiores detalhes, ver Lema 5.3 no Apêndice).

Seja $b \in Dif^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega})$ a solução de

$$\begin{cases} \det \nabla b(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, & \text{se } x \in \Omega \\ b(x) = x, & \text{se } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Observe que tal solução existe pelo Teorema 5.3. Observe ainda que, pelos teoremas de mudança de variáveis e da aplicação inversa,

$$\begin{aligned} \int_\Omega g(x) \det \nabla b(x) dx &= \int_{b^{-1}(\Omega)} g(x) \det \nabla b(x) dx \\ &= \int_\Omega g(b^{-1}(y)) \det \nabla b(b^{-1}(y)) \cdot \det \nabla b^{-1}(y) dy \\ &= \int_\Omega g(b^{-1}(y)) \det \nabla b(b^{-1}(y)) \cdot \det(\nabla b(b^{-1}(y)))^{-1} dy \\ &= \int_\Omega g(b^{-1}(y)) \det[\nabla b(b^{-1}(y)) \cdot (\nabla b(b^{-1}(y)))^{-1}] dy = \\ &= \int_\Omega g(b^{-1}(y)) \det I dy = \int_\Omega g(b^{-1}(y)) dy. \end{aligned}$$

Com isso, temos que

$$\int_\Omega g(b^{-1}(y)) dy = \int_\Omega g(x) \det \nabla b(x) dx = \int_\Omega f(x) dx = \text{Vol}\Omega.$$

Daí, pelo Teorema 5.2, existe $a \in Dif^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que a é solução de

$$\begin{cases} \det \nabla a(y) = g(b^{-1}(y)), & \text{se } y \in \Omega \\ a(y) = y, & \text{se } y \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Finalmente, observe que $u = a \circ b$ resolve o problema do Teorema 5.4, pois

$$\begin{aligned}
\det \nabla u(x) &= \det(\nabla a(b(x)) \cdot \nabla b(x)) = \det \nabla a(b(x)) \cdot \det \nabla b(x) \\
&= g(b^{-1}(b(x))) \cdot \frac{f(x)}{g(x)} = f(x), \text{ para } x \in \Omega
\end{aligned}$$

e, para $x \in \partial\Omega$, $u(x) = a(b(x)) = x$. $\square$

Demonstração do Teorema 0.1. Pelo Teorema 5.4, existem $u, v \in Dif^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega})$ tais que

$$\begin{cases}
\det \nabla u(x) = \dfrac{f(x)\mathrm{Vol}\Omega}{\displaystyle\int_\Omega f(y)dy}, & \text{se } x \in \Omega \\
\det \nabla v(x) = \dfrac{g(x)\mathrm{Vol}\Omega}{\displaystyle\int_\Omega g(y)dy}, & \text{se } x \in \Omega \\
u(x) = v(x) = x, & \text{se } x \in \partial\Omega
\end{cases}$$

Defina $\varphi = v^{-1} \circ u$. Daí,

$$\nabla\varphi(x) = \nabla v^{-1}(u(x))\nabla u(x) = \left[\nabla v(v^{-1}(u(x)))\right]^{-1} \nabla u(x).$$

Donde se segue que

$$\det \nabla\varphi = \frac{1}{\det \nabla v(v^{-1}(u(x)))} \cdot \det \nabla u = \frac{f(x)}{g(\varphi(x))} \cdot \frac{\displaystyle\int_\Omega g}{\displaystyle\int_\Omega f}.$$

Portanto

$$g(\varphi(x)) \cdot \det \nabla\varphi(x) = g(\varphi(x)) \cdot \frac{f(x)}{g(\varphi(x))} \cdot \frac{\displaystyle\int_\Omega g}{\displaystyle\int_\Omega f} = f(x) \cdot \lambda.$$

$\square$

Apêndice

A seguir, mostraremos que C^∞ é denso em $C^{k,\alpha}$ com relação a norma $|.|_{0,\beta}$, $0 < \beta < \alpha < 1$, e apresentaremos um importante resultado geométrico utilizado no Teorema 5.1.

Lema 5.3. *Seja $f \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, $f > 0$ em $\overline{\Omega}$. Então dado $\epsilon > 0$ existe $g \in C^\infty(\overline{\Omega})$, com $g > 0$ em $\overline{\Omega}$, tal que*

$$\left|\frac{f}{g} - 1\right|_{0,\beta} \leq \epsilon \ e \ \int_\Omega \frac{f(x)}{g(x)} = Vol\Omega.$$

Demonstração. Pela densidade de C^∞ em C^k, existe uma seqüencia $\{g_n\} \subset C^\infty$, $g_n > 0$ em $\overline{\Omega}$, tal que $|f - g_n|_k \to 0$. Daí, pela desigualdade de interpolação (Proposição 1.1), temos que

$$|f - g_n|_{0,\beta} \leq C|f - g_n|_0 - \epsilon_1|f - g_n|_{k,\alpha}.$$

Vamos mostrar que a seqüência $[f - g_n]_{k,\alpha}$ é limitada.

Observe que

$$|D^\gamma(f(x) - g_n(x)) - D^\gamma(f(y) - g_n(y))| \leq |D^\gamma f(x) - D^\gamma g_n(x)| + |D^\gamma f(y) - D^\gamma g_n(y)| \to 0,$$

para todo $x, y \in \Omega$ e $|\gamma| \leq k$.

Portanto, passando a uma subseqüência, se necessário, podemos assumir que

$$|D^\gamma(f(x) - g_n(x)) - D^\gamma(f(y) - g_n(y))| \geq |D^\gamma(f(x) - g_{n+1}(x)) - D^\gamma(f(y) - g_{n+1}(y))|.$$

Como para cada n temos

$$\frac{|D^\gamma(f(x)-g_n(x))-D^\gamma(f(y)-g_n(y))|}{|x-y|^\alpha}\leq C_n,$$

segue que

$$[f-g_n]_{k,\alpha}=\sup_{|\gamma|=k}\sup_{x\neq y}\frac{|D^\gamma(f(x)-g_n(x))-D^\gamma(f(y)-g_n(y))|}{|x-y|^\alpha}\leq C_{n_0}$$

para todo $n\geq n_0$.

Com isso, concluímos que

$$|f-g_n|_{0,\beta}\to 0.$$

Agora seja $p=\inf_\Omega f(x)$. Existe $n_1\in\mathbb{N}$ tal que $n\geq n_1\Rightarrow |g_n(x)-f(x)|<\frac{p}{2}$, para todo $x\in\Omega$. Daí, $-\frac{p}{2}<g_n(x)-f(x)<\frac{p}{2}$, donde se segue que $-\frac{p}{2}+f(x)<g_n(x)$. Logo, para $n\geq n_1$, temos $\frac{p}{2}\leq\inf_\Omega g_n(x)$.

Portanto, para todo $x\in\Omega$ e $n\geq n_1$ suficientemente grande, temos

$$\left|\frac{f(x)}{g_n(x)}-1\right|=\left|\frac{f(x)-g_n(x)}{g_n(x)}\right|\leq\left|\frac{f(x)-g_n(x)}{p/2}\right|<\frac{\epsilon p/4}{p/2}=\frac{\epsilon}{2}.$$

Logo

$$\left|\frac{f}{g_n}-1\right|_0\leq\frac{\epsilon}{2}.$$

Além disso, para $n\geq n_1$ suficientemente grande e $x\neq y$, temos

$$\frac{\left|\frac{f(x)}{g_n(x)}-\frac{f(y)}{g_n(y)}\right|}{|x-y|^\beta}=\frac{\left|\frac{f(x)}{g_n(x)}-\frac{g_n(x)}{g_n(x)}-\frac{f(y)}{g_n(y)}+\frac{g_n(y)}{g_n(y)}\right|}{|x-y|^\beta}$$

$$\leq\frac{1}{g_n(x)}\frac{|f(x)-g_n(x)-(f(y)-g_n(y))|}{|x-y|^\beta}+|f(y)-g_n(y)|\frac{1}{g_n(x)g_n(y)}\frac{|g_n(x)-g_n(y)|}{|x-y|^\beta}$$

$$<\frac{1}{p/2}\frac{|f(x)-g_n(x)-(f(y)-g_n(y))|}{|x-y|^\beta}+|f(y)-g_n(y)|\frac{1}{(p/2)^2}N$$

$$<\frac{\epsilon}{2},$$

onde $|g_n|_{0,\beta} \leq N$, para todo n.

Portanto, para n suficientemente grande, temos

$$\left| \frac{f}{g_n} - 1 \right|_{0,\beta} \leq \epsilon.$$

Finalmente, seja $\overline{g}_n = g_n \dfrac{\lambda_n}{\text{Vol}\Omega}$, onde $\lambda_n = \displaystyle\int_\Omega \frac{f}{g_n}$. Para n suficientemente grande, temos

$$\frac{1}{(1+\epsilon)\text{Vol}\Omega} \leq \frac{1}{\lambda_n} \leq \frac{1}{(1-\epsilon)\text{Vol}\Omega}.$$

Portanto

$$\left| \frac{f}{\overline{g}_n} - 1 \right|_{0,\beta} = \left| \frac{f}{g_n(\lambda_n/\text{Vol}\Omega)} - 1 \right|_{0,\beta} \leq \left| \frac{f}{g_n(\lambda_n/\text{Vol}\Omega)} - \frac{1}{\lambda_n/\text{Vol}\Omega} \right| + \left| \frac{1}{\lambda_n/\text{Vol}\Omega} - 1 \right|_{0,\beta}$$

$$\leq \frac{\text{Vol}\Omega}{\lambda_n} \left| \frac{f}{g_n} - 1 \right|_{0,\beta} + \left| \frac{1}{\lambda_n/\text{Vol}\Omega} - 1 \right|_{0,\beta} \leq \frac{1}{(1-\epsilon)}\epsilon + \left| \frac{1}{(1-\epsilon)} - 1 \right|.$$

Além disso,

$$\int_\Omega \frac{f}{\overline{g}_n} = \int_\Omega \frac{f}{g_n(\lambda_n/\text{Vol}\Omega)} = \frac{\text{Vol}\Omega)}{\lambda_n} \int_\Omega \frac{f}{g_n} = \text{Vol}\Omega.$$

Isso prova a afirmação. □

Concluiremos este trabalho com o seguinte resultado:

Lema 5.4. *Seja $\Omega \in C^{k,\alpha}$ um domínio limitado. Seja $d(.,\partial\Omega) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ a função distância de $x \in \overline{\Omega}$ a $\partial\Omega$.*

(a) $\nabla d(x, \partial\Omega) = -\nu_x$, para todo $x \in \partial\Omega$.

(b) Se $\rho \in C^\infty$ é tal que $\rho \equiv 0$ se $t \notin (-\delta, \delta)$, com $\delta > 0$, então existe $\delta_0 \leq \delta$ positivo tal que $\rho(d(x, \partial\Omega)) \in C^k$.

Demonstração. Para provar a primeira parte, seja $x_0 \in \partial\Omega$. Existe uma bola $B_r \subset \Omega$ tal que $x_0 \in \partial B_r$. Além disso, existe uma bola $B_R \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$B_R \cap \Omega = \emptyset$ e $x_0 \in \partial B_R$. Observe que $\nabla d(x_0, \partial B_r) = \nabla d(x_0, \partial B_R) = -\nu_{x_0}$ e que

$$\lim_{h\to 0} \frac{d(x_0 \pm he_i, \partial B_r)}{h} \leq \lim_{h\to 0} \frac{d(x_0 \pm he_i, \partial\Omega)}{h} \leq \lim_{h\to 0} \frac{d(x_0 \pm he_i, \partial B_R)}{h}.$$

Portanto

$$\nabla d(x_0, \partial\Omega) = -\nu_{x_0}.$$

Para a segunda parte, observe que o conjunto dos pontos de não diferenciabilidade de $d(x, \partial\Omega)$ é fechado. Portanto, $0 < d_0 = \inf d(x, \partial\Omega)$, onde o ínfimo é tomado sobre o conjunto dos pontos tais que $\nabla d(x, \partial\Omega)$ não existe. Isso é verdade porque não pode existir uma seqüência $\{x_n\}$ de pontos da forma acima tais que $x_n \to x_0 \in \partial\Omega$, já que o conjunto dos pontos de não diferenciabilidade de $d(x, \partial\Omega)$ é fechado e que $d(x, \partial\Omega)$ é diferenciável em x_0. Para cada $x_0 \in \partial\Omega$ considere a bola $B_{d_0}(x_0)$, onde $d_0 = d(x_0, \partial\Omega)$. Observe que $\cup B_{d_0}(x_0)$ é uma cobertura de $\partial\Omega$. Sejam $\mathcal{M}$ uma subcobertura finita de $\cup B_{d_0}(x_0)$ e $d_1 = \inf\limits_{\substack{x\in\partial\mathcal{M}\\ y\in\partial\Omega}} |x-y|$. Daí, tomando $\delta_0 < \min\{d_1, \delta\}$, temos $\rho(d(x, \partial\Omega)) \in C^k$. $\square$

Observação 5.2. *Considere o conjunto* $L = \{x \in \Omega; d = d(x, \partial\Omega) < d_1\}$ *e a bola* $B_{d_1}(y)$, *onde* $y \in \partial L$. *Note que a função* $d(., \partial B_{d_1}(y)) : B_{d_1}(y) \cap L \to \mathbb{R}^+$ *é diferenciável, pois* $d(x, \partial B_{d_1}(y))$ *é diferenciável para todo* $x \in B_{d_1}(y) - \{y\}$. *Sejam agora* $B_E \subset \mathbb{R}^n$ *uma bola tal que* $B_E \cap \Omega = \emptyset$ *e* $x_1 \in \partial B_E$, *onde* $d_1 = |y - x_1|$. *Pelo mesmo argumento anterior, temos que* $\nabla d(x, \partial\Omega) = d(x, \partial B_{d_1}(y))$.

Referências Bibliográficas

[1] ALPERN, S., *New Proofs that Weak Mixing is Generic*, Inventiones Math., Vol. 32, 1976, pp. 263-279.

[2] ANOSOV, D.,V e KATOK, A., B., *New Examples in Smooth Ergodic Theory. Ergodic Diffeomorphisms*, Trudy Moskov Mat. Obsc. Tom,, Vol. 23, 1970, Trans. Moscow Math. Soc., Vol. 23, 1970, pp. 1-35.

[3] BANYAGA, A., *Formes Volume sur les variétés à bord*, Enseignement Math., Vol. 20, 1974, pp. 127-131.

[4] DACOROGNA, Bernard, MOSER, Jürgen. *On a partial differential equation involving the Jacobian determinant*, Ann. Inst. Henri Poincaré. Vol7, $n^0 1$, 1990, p. 1-26.

[5] DACOROGNA, Bernard. *Direct Methodos in Calculus df Variations*, Applied Mathematical Sciences 78, Springer-Verlag.

[6] GILBARG, D., TRUNDIGER, N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 2001.

[7] HAN, Qing, LIN, Fanghua. *Elliptic Partial Differential Equations*, American Mathematical Society.

[8] LADYZHENSKAYA, O., A. e URALTSEVA, N., N., *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, Academic Press, New York, 1968.

[9] LIMA, E. L., *Curso de Análise vol. 2*, Projeto Euclides-IMPA, 1981

[10] MOSER, J, *On the Volume Elements on a Manifold*, Trans. Am. Math. Soc., Vol. 120, 1965, pp. 286-294.