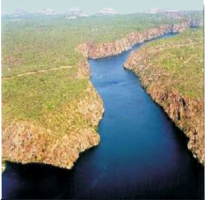
Universidade Federal de Alagoas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Estados de Equilíbrio

Márcio Henrique Batista dos Santos



Rio São Francisco

Maceió
8 de Dezembro de 2005

MATEMÁTICA
A ciência
do infinito

Estados de Equilíbrio

Márcio Henrique Batista da Silva

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Sistemas Dinâmicos submetida em 8 de Dezembro de 2005 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Ali Tahzibi

Prof. Dr. Krerley Oliveira (Orientador)

Prof Dr. Marcelo Viana

Aos meus pais João Faustino e Maria Madalena
e à minha irmã Márcia.

Agradecimentos

- Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado a coragem necessária para enfrentar os momentos difíceis e a minha família por estar me apoiando durante toda essa minha fase.
- Ao professor Krerley Oliveira pela orientação e por ter tido a paciência necessária comigo durante todo o mestrado.
- Agradeço aos professores Amauri Barros, Adán Corcho, Ediel Guerra, Hilário Alencar, Fernando Codá Marques, Franscisco Vieira Barros pela contribuição na minha vida acadêmica e pessoal. Agradeço também aos professores Adelailson Peixoto e Marcos Petrúcio pela amizade oferecida a minha pessoa.
- Agradeço a amizade de Arlyson Alves, Arthur Januário, Amanda Vilarins, Clarissa Codá, Davy Souza, Everson Feitosa, Fabio Bóia, José Arnaldo dos Santos, Luana Patrícia, Marcius Petrúcio, Thiago Fontes e o companheirismo de Júlio Almeida e Maria Andrade.
- Em especial agradeço à Cristiane Medeiros pelas boas conversas que tivemos no pouco tempo que nos foi concedido pela vida, à Janice Gomes pela amizade que cultivamos nestes últimos meses e não poderia deixar de agradecer a Landobergue Barros por sua amizade incontestável.
- Sou bastante grato também a toda equipe que forma o C.A por toda a amizade e companheirismo compartilhados neste último ano. Em particular a Marcius Petrúcio que se revelou um excelente amigo de todas as horas e um grande parceiro em todos os momentos deste último ano.
- Sou grato ao Departamento de Matemática, ao seu quadro de funcionários pelo bom trabalho desenvolvido e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Alagoas (FAPEAL) pelo suporte financeiro.

Resumo

Provaremos a existência de Estados de equilíbrio, incluindo medidas de entropia máxima, para uma classe robusta (aberta) de transformações expansoras e não-uniformemente expansoras sobre uma variedade compacta e conexa.

Abstract

We prove existence of Equilibrium states, including measures of maximal entropy, for a robust (open) class of expanding and non-uniformly expanding maps on compact and connect manifolds.

Palavras-chave: Teoria ergódica, estados de equilíbio, não-uniformemente expansor.

Sumário

Introdução

A Teoria dos estados de equilíbrios tem origem no estudo da mecânica estatística e está bem desenvolvida para os clássicos sistemas dinâmicos hiperbólicos desde as décadas de 70 e 80, estudados especialmente por Bower, Parry, Ruelle, Sinai e Walters.

Em geral, dados uma transformação contínua $f : M \to M$ sobre um espaço métrico compacto e uma função contínua, também chamada de potencial, $\psi : M \to \mathbb{R}$, chamamos de estado de equilíbrio com respeito ao par (f, ψ) a uma medida de probabilidade sobre os borelianos, μ_ψ, tal que

$$h_{\mu_\psi}(f) + \int \psi d\mu_\psi = \sup_{\mu \in \mathcal{I}} \{h_\mu(f) + \int \psi d\mu\},$$

onde o supremo é considerado sobre o conjunto das probabilidades f-invariantes.

Observamos que esse é um típico problema variacional, i.e, considerando o operador $P_\psi : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ definido por $P_\psi(\mu) = h_\mu(f) + \int \psi d\mu$, desejamos maximizar esse operador.

Em um trabalho pioneiro feito por Ruelle foram desenvolvidas novas técnicas para demonstração de tais resultados (ver [Ru68]). Um dos mais relevantes conceitos que iremos utilizar é o de operador de Ruelle-Perron-Frobenius ou operador de transferência associado ao par (f, ψ), $\mathcal{L}_\psi : C^0 \to C^0$, o qual é definido por

$$\mathcal{L}_\psi g(x) := \sum_{y : f(y) = x} e^{\psi(y)} g(y).$$

Utilizando técnicas que envolvem esse operador é possível garantir unicidade de estados de equilíbrio para transformações expansoras e potenciais Hölder-contínuos. Ainda utilizando o operador de Ruelle e possível garantir unicidade de estados de equilíbrio para transformações não-uniformemente expansoras que satisfazem propriedades não tão restritivas e potenciais Hölder, ver [OV04].

As técnicas utilizadas neste trabalho seguem basicamente os papers de Ruelle, ver [Ru68], Oliveira e Viana, ver [Ol03] e [OV05].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo nos preocupamos em revisar conceitos básicos da Teoria Ergódica que são necessários para o bom entendimento dos próximos capítulos. Para maiores detalhes ver [Ke98] e [Wa82] .

1.1 Medidas Invariantes

Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida.

Definição 1.1. *Dizemos que uma transformação* $f : X \to X$ *é mensurável se* $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$*, para cada* $A \in \mathcal{A}$*. Dizemos também que uma medida é* f*-invariante se* $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$*, para cada* $A \in \mathcal{A}$*.*

Exemplo 1.1. *Consideremos a transformação* $f : [0,1] \to [0,1]$ *definida por*

$$\mu(B) = \begin{cases} 2x, \ \text{se } 0 \leq x < \dfrac{1}{2} \\ 2x - 1, \ \text{se } \dfrac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$$

A medida de Lebesgue em $[0,1]$ *é* f*-invariante.*

Agora um exemplo de uma transformação sem medidas invariantes

Exemplo 1.2. *Consideremos a função* $f : (0,1] \to (0,1]$ *dada por* $f(x) = \dfrac{x}{3}$*. Suponha que* f *admite alguma probabilidade invariante. Usando o Teorema de Recorrência de Poincaré (ver [Ol05]) garantimos que quase todo ponto de* $(0,1]$ *é recorrente com respeito a essa probabilidade. Porém é simples de se ver que a órbita de todo ponto converge a zero e em particular não acumula em torno do ponto inicial.*

Daí nosso objetivo neste momento é dar condições para que existam medidas invariantes com respeito a uma transformação, pois, como visto no exemplo 1.2, pode ocorrer de não existir medidas invariantes com respeito a uma transformação.

Seja X um espaço métrico compacto, denotaremos por $\mathcal{M}$ o conjunto das medidas de probabilidade sobre a σ-álgebra de Borel de X. Introduziremos neste espaço uma topologia que o torna um espaço métrico compacto.

Usando que X é compacto garantimos que o espaço $C(X)$ é separável (ver [Rud81]), i.e, podemos encontrar uma sequência $(v_n)_n$ densa na bola unitária de $C(X)$ com a norma do supremo. Usando essa sequência podemos definir a função d por

$$d(\mu, \nu) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| \int v_n d\mu - \int v_n d\nu \right|.$$

Essa função é uma métrica em $\mathcal{M}$ (ver [Ol05], página 44). A topologia obtida através dessa métrica é denominada topologia fraca*.

Vamos agora caracterizar a convergência de medidas de uma outra forma

Lema 1.1. *Uma sequência de probabilidades $(\mu_n)_n$ converge em $\mathcal{M}$ para uma $\mu \in \mathcal{M}$ se e somente se,*

$$\int u d\mu_n \to \int u d\mu,$$

para toda $u : X \to \mathbb{R}$ função contínua.

Demonstração. Ver [Ol05], página 42.

□

Uma conseqüência muito interessante do Lema 1.1 é

Corolário 1.1. *Se a sequência $(\mu_n)_n$ converge para μ na topologia fraca*, então*

1. $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(K) \leq \mu(K)$, *para todo fechado $K \subset M$.*
2. $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(A) \geq \mu(A)$, *para todo aberto $A \subset M$.*

Demonstração. Ver [Ol05], página 43 ou ver [Wa82], página 149.

□

Com essas definições e resultados conseguimos extrair uma propriedade muito interessante do conjunto $\mathcal{M}$, a saber

Teorema 1.1. *A topologia fraca* torna $\mathcal{M}$ um espaço métrico compacto e convexo.*

Demonstração. Ver [Ol05], página 46 ou ver [Wa82], página 150.

$\square$

Observe que de posse desse resultado temos duas características boas para $\mathcal{M}$, que são a convexidade e compacidade. Mais adiante utilizaremos essas propriedades sem fazer maiores comentários. Para mais detalhes sobre esse assunto ver [Wa82], páginas 146 -152.

Nosso objetivo neste momento e garantir a existência de medidas invariantes para f. Para isso vamos utilizar o seguinte operador:

$$f_* : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$$

$$\mu \rightsquigarrow f_*(\mu)(A) := \mu(f^{-1}(A)).$$

Observemos que encontrar medidas invariantes para uma certa transformação f equivale a encontrar medidas que sejam pontos fixos para o operador f_*. Com efeito, μ é f-invariante se e somente se, $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo boreliano A, i.e, $f_*(\mu) = \mu$.

Lema 1.2. *Se $f : X \to X$ é uma transformação contínua, então o operador f_* é contínuo na topologia fraca*.*

Demonstração. Ver [Ol05], página 48.

$\square$

Teorema 1.2 (Krylov-Bogolubov). *Seja X um espaço métrico compacto. Se $f : X \to X$ é uma transformação contínua, então f possui ao menos uma probabilidade invariante.*

Demonstração. Basta utilizar o Lema 1.2 para garantir que o operador f_* é contínuo. Visto que $\mathcal{M}$ é convexo e compacto, podemos aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Tychonoff-Schauder para garantir um ponto fixo para f_*, i.e., uma probabilidade invariante com respeito à f.

$\square$

Observação: Para uma outra demonstração do resultado anterior ver [Ke98], página 15.

Definição 1.2. *Seja μ uma probabilidade invariante por $f : X \to X$. Dizemos que μ é ergódica quando para todo boreliano A se verifica:*

$$f^{-1}(A) = A \text{ implica } \mu(A)\mu(A^c) = 0.$$

Definição 1.3. *Uma função $\psi : M \to \mathbb{R}$ é f-invariante com respeito a μ se para μ-quase todo ponto x em M vale $\psi(f(x)) = \psi(x)$.*

Com esses conceitos introduzidos agora podemos enunciar um dos mais importantes resultados da Teoria Ergódica básica, a saber

Teorema 1.3 (Birkhoff). *Seja $f : X \to X$ uma transformação preservando uma probabilidade μ. Dada uma função φ integrável, então existe φ^* tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f^n(x) = \varphi^*(x),$$

para μ quase todo ponto $x \in X$. Além disso, φ^* é f-invariante e vale

$$\int \varphi^* d\mu = \int \varphi d\mu.$$

Demonstração. Ver [Ke98], página 23 ou ver [Wa82], página 34.

□

O resultado que segue nos mostra que as medidas ergódicas têm um papel muito importante no conjunto das medidas $\mathcal{M}$.

Teorema 1.4 (Decomposição Ergódica). *Suponha que X é um espaço métrico compacto e $f : X \to X$ é uma transformação contínua que preserva uma probabilidade μ. Então existe uma família de probabilidades ergódicas $(\mu_x)_{x\in X}$ definidas para μ quase todo $x \in X$ tal que para cada $u : X \to \mathbb{R}$ integrável vale*

$$\int u d\mu = \int \left[\int u(y) d\mu_x(y) \right] d\mu(x).$$

Demonstração. Ver [Ke98], página 36.

□

1.2 Entropia

Nesta seção $(X, \mathcal{A}, \mu)$ indicará sempre um espaço de probabilidade, onde X é um espaço métrico compacto.

Definição 1.4. *Sejam $\mathcal{U} = (U_n)_n$ e $\mathcal{V} = (V_n)_n$ coberturas de um espaço métrico e compacto X. O refinamento de $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ é a cobertura*

$$\mathcal{U} \vee \mathcal{V} = \{U \cap V | U \in \mathcal{U} \text{ e } V \in \mathcal{V}\}.$$

Vamos denotar por $N(\mathcal{U})$ o menor número de elementos em uma subcobertura $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$.

Seja $f : X \to X$ uma transformação contínua.

Definição 1.5. *A entropia da cobertura $\mathcal{U}$, $H(\mathcal{U})$, é definida como sendo o logaritmo de $N(\mathcal{U})$. A entropia da transformação f com respeito a cobertura $\mathcal{U}$ é por definição*

$$h(f,\mathcal{U}) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{U})\right).$$

Para examinar com detalhes que essa definição é bem colocada ver [Mañ], página 277 ou ver [Wa82], página 87.

Definição 1.6. *Seja $f : X \to X$ uma transformação contínua. A entropia topológica de f é*

$$h_{top}(f) := \sup\{h(f,\mathcal{U}) | \ \mathcal{U} \ cobertura \ finita\}.$$

Passamos agora a definir o conceito de entropia métrica, o qual depende bastante de uma medida suportada sobre o conjunto X.

Definição 1.7. *Uma coleção $\mathcal{P} = (P_n)_n$ de conjuntos mensuráveis de X é dita uma partição se $\mu(P_i \cap P_j) = 0$ para $i \neq j$, $\mu\left(X \setminus \bigcup_i P_i\right) = 0$ e $\mu(P_i) > 0$ para todo i.*

Definição 1.8. *Seja $f : X \to X$ uma transformação preservando a probabilidade μ. Dada uma partição $\mathcal{P}$, finita, de X, a entropia da partição $\mathcal{P}$ com respeito à μ é*

$$H_\mu(\mathcal{P}) := -\sum_{P \in \mathcal{P}} \mu(P) \log \mu(P),$$

onde convenciona-se que $0 \log 0 = 0$ *e* $\log$ *é o logaritmo natural.*

O refinamento de duas partições de um espaço $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é idêntico ao já referido na definição 1.4 apenas acrescentamos que escolhemos apenas os elementos de medida não-nula.

Consideremos uma transformação contínua $f : X \to X$.

Definição 1.9. *A entropia da transformação f com respeito a partição $\mathcal{P}$ e a uma probabilidade f-invariante μ é*

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H_\mu \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{P}) \right).$$

Além disso, a entropia métrica de f com respeito à μ é

$$h_\mu(f) := \sup\{h_\mu(f, \mathcal{P}) | \ \mathcal{P} \ partição \ finita\}.$$

Novamente, para examinar com detalhes que essa definição é bem colocada ver [Mañ], página 277 ou ver [Wa82], página 87.

Existe uma dificuldade muito grande em calcular a entropia métrica de uma transformação. Devido a isso precisamos de melhores técnicas para tais cálculos. Um resultado devido a Kolmogorov e Sinai nos dá condições suficientes e mais simples para o cálculo da entropia. Para tanto precisamos do seguinte conceito

Definição 1.10. *Seja $f : X \to X$ uma transformação invertível preservando uma probabilidade μ no espaço $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Uma partição $\mathcal{U}$ é dita f-geradora módulo zero se $\bigvee_{i=-\infty}^{+\infty} f^{-i}(\mathcal{U})$ gera a σ-álgebra $\mathcal{A}$. No caso em que f é não-invertível, então $\mathcal{U}$ é f-geradora módulo zero se $\bigvee_{i=0}^{+\infty} f^{-i}(\mathcal{U})$ gera a σ-álgebra $\mathcal{A}$.*

O resultado comentado é

Teorema 1.5 (Kolmogorov-Sinai). *Seja $f : X \to X$ uma transformação preservando uma probabilidade μ e $\mathcal{P}$ uma partição f-geradora. Então,*

$$h_\mu(f) = h_\mu(f, \mathcal{P}).$$

Demonstração. Ver [Wa82], página 95.

$\square$

Um resultado que faz a ligação entre os conceitos de entropias é

Teorema 1.6 (Princípio Variacional). *Sejam X um espaço métrico compacto e $f : X \to X$ uma transformação contínua. Então vale*

$$h_{top}(f) = \sup_{\mu \in \mathcal{I}} h_\mu(f),$$

onde $\mathcal{I}$ é o conjunto das probabilidades invariantes por f.

Demonstração. Ver [Wa82], página 188.

$\square$

Uma interessante interpretação da entropia métrica foi dada por Shannon, Mc Millan e Breiman. Algum tempo depois os matemáticos Brin e Katok deram um novo impulso nessa direção.

Para enunciar o resultado o qual desejamos é necessária a definição de bola dinâmica o qual passamos a definir

Definição 1.11. *A bola dinâmica de tamanho n e raio ϵ em torno do ponto x é o conjunto*

$$B(\epsilon, n, x) = \{y \in M; d(f^i(x), f^i(y)) < \epsilon, i = 0, ..., n-1\}.$$

Observação: Decorre da definição de bola dinâmica que

$$B(\epsilon, n, x) = \bigcap_{k=0}^{n-1} f^{-k}(B_\epsilon(f^k(x))).$$

O próximo resultado nos mostra que a entropia é nada mais do que a taxa de decrescimento exponencial das medidas das bolas dinâmicas de raio fixado.

Teorema 1.7 (Brin-Katok). *Seja $f : X \to X$ uma transformação contínua no espaço métrico e compacto X. Então vale*

$$h_\mu(f) = -\int \left(\lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu(B(\epsilon, n, x)) \right) d\mu.$$

Demonstração. Ver [BK81].

$\square$

Até agora nossas hipóteses eram sempre que a transformação $f : X \to X$ é contínua. Porém, apenas com a continuidade não esperamos muito além do já obtido para esses sistemas. Daí vamos trabalhar com a hipótese de diferenciabilidade e veremos que a uma certa melhora na busca por resultados que desenvolvam a teoria.

Primeiramente, vamos abordar os expoentes de Lyapunov, os quais "medem", de certa forma, o crescimento ou decrescimento da derivada do sistema.

Definição 1.12. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo local em uma variedade riemanniana M. Um ponto $x \in M$ é regular se existem números $\lambda_1 < ... < \lambda_l$ e uma decomposição $T_xM = E_1(x) \oplus ... \oplus E_l(x)$ tal que para cada vetor em E_i vale*

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \parallel Df^n(x)v \parallel = \lambda_i(x).$$

Um resultado muito interessante devido a Oseledets é

Teorema 1.8 (Oseledets). *Seja $f : M \to M$ um endomorfismo de classe C^1 em uma variedade compacta M. Então $\mu(\Lambda := \{x \in M | x \text{ é regular}\}) = 1$, para toda probabilidade invariante por f. Além disso,*

1. *Se μ é ergódica, então $l(x), \lambda_1(x), ..., \lambda_l(x)$ são constantes para μ-q.t.p.*
2. *Se μ é ergódica, então $\int \log |\det Df(x)| d\mu(x) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i$.*

Demonstração. Ver [Mañ], página 341 ou ver [Wa82], página 234.

$\square$

Um resultado muito importante na Teoria ergódica é devido aos matemáticos Ruelle e Pesin, os quais fazem uma conexão entre os expoentes de Lyapunov e a entropia de um sistema. Os resultados são

Definamos a função $\Omega : \Lambda \to \mathbb{R}$ por

$$\Omega(x) := \sum_{\lambda_i(x)>0} \lambda_i(x) dim E_i(x).$$

Teorema 1.9 (Desigualdade de Ruelle). *Se μ é uma probabilidade invariante para um endomorfismo de classe C^1 em uma variedade compacta M, então*

$$h_\mu(f) \leq \int \Omega(x) d\mu(x).$$

Demonstração. Ver [Mañ], página 342.

□

Teorema 1.10 (Fórmula de Pesin). *Se μ é uma probabilidade invariante e absolutamente contínua com respeito a medida de Lebesgue para um endomorfismo de classe $C^{1,\alpha}$ de uma variedade compacta M, então*

$$h_\mu(f) = \int \Omega(x) d\mu(x).$$

Demonstração. Ver [Mañ], página 342.

□

1.3 Pressão Topológica

Vamos considerar durante todo essa seção que X é um espaço métrico compacto com a métrica d, $f : X \to X$ é uma transformação contínua e $\phi : X \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X. Um cilindro de comprimento n com respeito à $\mathcal{U}$ é simplesmente um elemento de $\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{U})$.

Definimos o número

$$m(\alpha, N, \mathcal{U}) := \inf_{\mathcal{G}} \left\{ \sum_{U \in \mathcal{G}} exp \left(-\alpha n(U) + \sup_{x \in U} \sum_{k=0}^{n(U)-1} \phi(f^k(x)) \right) \right\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre toda coleção finita ou enumerável de cilindros $\mathcal{G}$ de $\mathcal{U}$ tais que $n(U) = comprimento\ de\ U \geq N$, para $U \in \mathcal{G}$.

Defina agora o seguinte número

$$m(\alpha, \mathcal{U}) := \lim_{N \to \infty} m(\alpha, N, \mathcal{U}).$$

Agora estamos aptos a definir a pressão com respeito a uma cobertura

Definição 1.13. *A pressão de ϕ com respeito a cobertura $\mathcal{U}$ é*

$$P(\phi,\mathcal{U}) := \inf\{\alpha : m(\alpha,\mathcal{U}) = 0\}.$$

Lema 1.3. *O seguinte limite existe* $\lim_{|\mathcal{U}|\to 0} P(\phi,\mathcal{U})$.

Demonstração. Ver [Pe97], página 69.

$\square$

O valor do limite no Lema 1.3 é denotado por $P(\phi)$ e é conhecido como *pressão topológica.*

Vamos mostrar outra maneira de se calcular a pressão topológica.

Para isso considere o seguinte número

$$m(\alpha, N, \delta) := \inf_{\mathcal{G}} \left\{ \sum_{B(\delta,n,x)\in\mathcal{G}} exp\left(-\alpha n + \sup_{x\in B(\delta,n,x)} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(f^k(x))\right)\right\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre toda coleção $\mathcal{G}$ finita ou enumerável de bolas dinâmicas de raio δ e comprimento n com $n \geq N$, onde $\mathcal{G}$ cobre M.

Consideremos também os números

$$m(\alpha, \delta) := \lim_{N\to\infty} m(\alpha, N, \delta)$$

e

$$P(\phi, \delta) := \inf\{\alpha : m(\alpha, \delta) = 0\}.$$

A maneira de calcular a pressão é dada pelo seguinte resultado

Teorema 1.11. $P(\phi) = \lim_{\delta\to 0} P(\phi, \delta)$.

Demonstração. Ver [Pe97], página 74.

Existe outro resultado importante que envolve a pressão topológica, e é o que comentaremos agora.

Para isso vamos definir o que seria a pressão métrica.

Definição 1.14. *A pressão métrica da medida μ é o número*

$$P_\phi(\mu) := h_\mu(f) + \int_M \phi \, d\mu,$$

onde $h_\mu(f)$ é a entropia métrica de f com respeito à μ.

Observemos que $P_\phi(.)$ define um operador no espaço das medidas. E um resultado que faz conexão entre o conceito agora enunciado e o de pressão topológica é

Teorema 1.12 (Princípio Variacional). *Se X é um espaço métrico compacto e $f : X \to X$ é uma transformação contínua, então*

$$P(\phi) = \sup_{\mu \in \mathcal{I}} P_\phi(\mu),$$

onde $\phi : X \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Demonstração. Ver [Wa82], página 218.

$\square$

Para mais detalhes sobre o conceito de pressão topológica ou métrica ver [Pe97], página 68 ou ver [Wa82], página 207.

Capítulo 2

Transformações Expansoras

Neste segundo capítulo vamos garantir a existência de estados de equilíbrio para transformações expansoras e potenciais contínuos. Depois disso, vamos garantir que se o potencial é Hölder-contínuo então o estado de equilíbrio é único. Agora descrevemos os passos da primeira seção.

Nossa estratégia nesta primeira seção é

- Garantir existência de partição geradora comum para toda medida f-invariante μ.
- Garantir a semi-continuidade superior do operador P_{ψ}.
- Utilizar argumentos de compacidade para garantir a existência dos estados de equilíbrio.

2.1 Existência de Estados de Equilíbrio

Iniciamos esta seção com a definição do nosso objeto de estudos neste primeiro capítulo, as transformações expansoras.

Consideremos M uma variedade compacta sem bordo e conexa.

Definição 2.1. *Uma transformação* $f : M \to M$ *de classe* C^1 *é dita expansora se existir uma métrica riemanniana* $\| \, . \, \|$ *e um número* $\sigma > 1$ *tal que*

$$\| Df(x) \cdot v \| \geq \sigma \cdot \| v \|,$$

para todo $x \in M$ *e* $v \in T_x(M)$.

Definição 2.2. *Seja* $\psi : M \to \mathbb{R}$ *uma função, a qual chamaremos de potencial. Uma medida* f*-invariante,* μ_ψ*, é dita um estado de equilíbrio (ou medida de equilíbrio) com respeito ao par* (f, ψ) *se*

$$h_{\mu_\psi}(f) + \int \psi \; d\mu_\psi = \sup \left\{ h_\nu(f) + \int \psi \; d\nu \right\},$$

onde o supremo é tomado sobre todas as medidas ν *que são* f*-invariantes.*

O resultado principal dessa seção é

Teorema 2.1 (Existência de Estados de Equilíbrio). *Sejam* M *uma variedade compacta, conexa e* $C^0(M)$ *o conjunto das funções* $\psi : M \to \mathbb{R}$ *contínuas. Se* $f : M \to M$ *é uma transformação expansora, dada qualquer* $\psi \in C^0(M)$*, existe ao menos um estado de equilíbrio com respeito ao par* (f, ψ).

Vamos agora desenvolver a teoria necessária para provarmos o nosso resultado principal.

Lema 2.1. *Seja* $f : M \to M$ *um difeomorfismo local, então*

(i) Para cada $x \in M$*, existem* $\epsilon_0 > 0$*, dependendo apenas de* f*, e vizinhança* $V(x)$ *tal que*

$$f : V(x) \to B_{\epsilon_0}(f(x))$$

é um difeomorfismo.

(ii) Existe $n \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $y \in f(M)$ *vale*

$$\sharp f^{-1}(y) = n.$$

(iii) Se f *é uma transformação expansora, valem os item (i), (ii) e*

$$d(h(y_1), h(y_2)) \leq \sigma^{-1} \cdot d(y_1, y_2), \forall y_1, y_2 \in B_{\epsilon_0}(y),$$

onde h *é o ramo inverso de* f^{-1} *que envia* $f(x)$ *em* x.

Demonstração. Visto que f é um difeomorfismo local, dado $x \in M$, existem $\epsilon(x) > 0$ e uma vizinhança $V(x)$, de x, tal que

$$f : V(x) \to B_{\epsilon(x)}(f(x))$$

é um difeomorfismo. Consideremos a cobertura $U = \{B_{\epsilon(x)}(f(x))\}$ de $f(M)$. Pela compacidade de $f(M)$, podemos extrair uma cobertura finita $\tilde{U} = \{B_{\epsilon_1}, ..., B_{\epsilon_k}\}$ de $f(M)$. Sejam $\delta > 0$ o número de Lebesgue da cobertura $\tilde{U}$ e $\epsilon_0 = \min\{\epsilon_1, ..., \epsilon_k, \frac{\delta}{2}\}$. Esse ϵ_0 satisfaz o item (i).

Com respeito ao segundo item, observemos que $f^{-1}(y)$ é compacto. Logo $f^{-1}(y)$ é discreto e finito, i.e., $f^{-1}(y) = \{x_1, ..., x_n\}$.

Afirmação 1. O conjunto $A_k := \{y \in f(M); \sharp f^{-1}(y) = k\}$ é aberto.

Prova. Com efeito, se $y \in A_k$ temos que para todo $y_1 \in f(M)$ com $d(y, y_1) < \epsilon_0$ vale $\sharp f^{-1}(y_1) \geq \sharp f^{-1}(y)$. Invertendo os papéis de y e y_1, obtemos a desigualdade inversa. Logo $B_{\epsilon_0}(y) \subset A_k$, e portanto A_k é aberto.

Pela conexidade de M garantimos que todo ponto de $f(M)$ tem o mesmo número de pré-imagens por f.

Provamos assim o item (ii).

Para o último item, observe que se f é expansora, então f é difeomorfismo local e sobrejetora. Segue-se que f satisfaz os ítens (i) e (ii). Para finalizarmos, consideremos $\gamma : [0, 1] \to M$ curva minimizando a distância entre y_1 e y_2 pertencentes a $B_{\epsilon_0}(f(x))$. Daí, a curva $\beta := h \circ \gamma$ liga os pontos $h(y_1)$ e $h(y_2)$. Sendo assim vale que,

$$d(h(y_1), h(y_2)) \leq \int_0^1 |\beta'(s)| ds = \int_0^1 |Dh(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s)| ds \leq \int_0^1 ||Dh(\gamma(s))|| \cdot |\gamma'(s)| ds.$$

Usando a regra da cadeia obtemos

$$||Dh(x)|| = ||Df(h(x)))^{-1}|| \leq \sigma^{-1}.$$

Portanto,

$$d(h(y_1), h(y_2)) \leq \sigma^{-1} d(y_1, y_2).$$

□

Observação: Reduzindo, se necessário, o número ϵ_0 pode-se considerado de tal modo que as bolas de raio ϵ_0 são fortemente convexas.

Agora vamos definir a classe de transformações expansivas.

Definição 2.3. *Uma transformação $f : M \to M$ é dita expansiva se existir uma constante $\epsilon_0 > 0$ tal que: dados $x, y \in M$ com $x \neq y$, então existe $N \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$d(f^N(x), f^N(y)) \geq \epsilon_0.$$

O resultado seguinte garante que a classe das transformações expansivas contém a classe das transformações expansoras.

Lema 2.2. *Se $f : M \to M$ é uma transformação expansora, então $f : M \to M$ é uma transformação expansiva.*

Demonstração. Pelo Lema 2.1 existe $h^n : B_{\epsilon_0}(y) \to M$, composição de ramos inversos de f tal que

$$d(h^n(y_1), h^n(y_2)) \leq \sigma^{-n} d(y_1, y_2), \forall\ y_1, y_2 \in B_{\epsilon_0}(y).$$

Para finalizar, basta considerar ϵ_0 dado no Lema 2.1. Vejamos que ϵ_0 é a constante de expansividade de f. Seja $0 < \epsilon < \epsilon_0$. Suponha, por absurdo, que $d(f^n(u), f^n(v)) \leq \epsilon$ para todo $n \geq 0$ e $u \neq v$.

Daí, como u e v pertencem à $B_{\epsilon_0}(y)$, vale:

$$d(u, v) = d(h^n(f^n(u)), h^n(f^n(v))) \leq \sigma^{-n} d(f^n(u), f^n(v)) \leq \sigma^{-n}\epsilon.$$

Portanto, quando $n \to \infty$ temos que $d(u, v) \to 0$, ou seja, $u = v$.

□

Consideremos $\epsilon_0 > 0$ dado no Lema 2.1

Corolário 2.1. *Se $\mathcal{P}$ é partição de M tal que*

$$diam(\mathcal{P}) < \epsilon_0,$$

então $\mathcal{P}$ é f-geradora com respeito a qualquer medida f-invariante.

Demonstração. Consideremos

$$\mathcal{P}^{(n)} = \{C^{(n)} = P_{i_0} \cap f^{-1}(P_{i_1}) ... \cap f^{-(n-1)}(P_{i_{n-1}})\}.$$

Seja $\mathcal{P}^{(n)}(x)$ os elementos de $\mathcal{P}^{(n)}$ que contém x.

Afirmação 2. Para todo $x \in M$ vale:

$$\lim_{n\to\infty} diam\mathcal{P}^{(n)}(x) = 0.$$

Prova. Suponha, por absurdo, que existe, para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in \mathcal{P}^{(n)}(x)$ tal que $d(y_n, x) > \delta > 0$. Pela compacidade de M podemos extrair uma subseqüência y_{n_k} convergente, isto é, $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = y$. Daí, $y \in \mathcal{P}^{(n)}(x)$ para todo n, ou seja, $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \rho$, contradizendo o fato de $d(y,x) > \delta > 0$.

Vamos mostrar que dados $A \subset M$ boreliano e $\epsilon > 0$, existem $C_1^{(n)}, ..., C_m^{(n)}$ em $\mathcal{P}^n$ tal que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} C_i^{(n)} \Delta A\right) \leq \epsilon.$$

Consideremos $K_1 \subset A$ e $K_2 \subset A^c$ compactos tais que

$$\mu(A\Delta K_1) \leq \frac{\epsilon}{2} \; e \; \mu(A^c \Delta K_2) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Seja $r := dist(K_1, K_2) > 0$. Pelo Afirmação 2, vale para n suficientemente grande, $diam\mathcal{P}^n(x) \leq \frac{r}{2}$, para todo $x \in M$.

Consideremos os $C_1^{(n)}, ..., C_m^{(n)}$ em $\mathcal{P}^n$ que intersectam K_1. Então,

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} C_i^{(n)} \Delta A\right) &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} C_i^{(n)} - A\right) + \mu\left(A - \bigcup_{i=1}^{m} C_i^{(n)}\right) \\ &\leq \mu(A - K_1) + \mu(A^c - K_2) \leq \epsilon.\end{aligned}$$

□

Observação: Mostramos que dado A boreliano em M e $\delta > 0$, podemos encontrar A_n união de elementos de $\mathcal{P}^n$ tal que $\mu(A\Delta A_n) < \delta$, i.e,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A\Delta A_n) = 0.$$

Corolário 2.2. *Para toda μ medida $f-invariante$ e toda partição $\mathcal{P}$ com diâmetro menor que ϵ_0 vale*

$$h_\mu(f) = h_\mu(f, \mathcal{P}).$$

Demonstração. Decorre diretamente do Corolário 2.1 e do Teorema de Kolmogorov-Sinai.

□

O próximo resultado é o ingrediente fundamental para o Teorema principal desta seção.

Lema 2.3. *Dado uma função $\psi : M \to \mathbb{R}$ contínua, o operador $P_\psi : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ definido por*

$$P_\psi(\mu) = h_\mu(f) + \int \psi \; d\mu$$

é semi-contínuo superiormente.

Demonstração. Fixe $\mu_0 \in \mathcal{I}$ e seja $\epsilon_0 > 0$ dado no Lema 2.1. Visto que M é compacta podemos encontrar uma partição $\mathcal{P}$ de M tal que $diam\mathcal{P} < \epsilon_0$ e $\mu_0(\partial P) = 0$, para todo $P \in \mathcal{P}$ (ver [Wa82], página 187). Daí, usando que $H_\nu(\mathcal{P}) = -\sum_{P\in\mathcal{P}} \nu(P)\log\nu(P)$ e que $\partial\left(\bigcap_{j=0}^{n-1} f^{-j}(P_{i_j})\right) \subset \bigcup_{j=0}^{n-1} f^{-j}(\partial P_{i_j})$ temos que a aplicação $\nu \longmapsto \dfrac{1}{n}H_\nu(\mathcal{P}^{(n)})$ é contínua em μ_0, para todo $n \geq 0$. Assim a aplicação $\nu \longmapsto h_\nu(f,\mathcal{P})$ é semi-contínua superiormente em μ_0 (ver [Ke98]).

Visto que escolhemos a partição $\mathcal{P}$ com diâmetro menor que ϵ_0, temos pelo Corolário 2.2 que $h_\mu(f) = h_\mu(f,\mathcal{P})$ para toda $\mu \in \mathcal{I}$.

Portanto concluímos que a aplicação $\nu \longmapsto h_\nu(f)$ é semi-contínua superiormente em μ_0. Para finalizar basta observar que a aplicação integral $\nu \longmapsto \int \psi \; d\nu$ é contínua em $\mathcal{I}$.

$\square$

Demonstração do Teorema 2.1. Decorre diretamente do Lema 2.3 e do fato que o conjunto das medidas f-invariantes é compacto.

$\square$

2.2 Unicidade de Estados de Equilíbrio

Nesta seção vamos abordar outros métodos e ferramentas da Teoria ergódica para garantir a unicidade dos estados de equilíbrio para potenciais Hölder-contínuos. A estratégia é a seguinte

- Utilizando um resultado de Análise Funcional garantimos a existência de automedidas para o dual do operador de transferência. Usando algumas estimativas também garantiremos a existência de autofunções para o operador de transferência.

- Garantir a existência da medida que maximiza o operador P_ψ. Por último, garantir a unicidade da tal medida.

O resultado principal que vamos demonstrar nessa seção é

Teorema 2.2 (Ruelle-1968). *Sejam $f : M \to M$ uma transformação expansora e $\psi : M \to \mathbb{R}$ uma função γ-Hölder. Então existe um único estado de equilíbrio associado ao par (f, ψ). Além disso, a pressão topológica é exatamente o logaritmo do raio espectral do operador de transferência.*

Vamos aos conceitos necessários para a prova do Teorema 2.2.

Definição 2.4. *Sejam $f : M \to M$ uma transformação contínua, localmente injetiva e μ uma probabilidade. Dizemos que a função integrável F é o Jacobiano de f com respeito à μ se*

$$\mu(f(A)) = \int_A F d\mu$$

para todo boreliano $A \subset M$ tal que $f|_A$ seja injetiva. Geralmente denotamos o Jacobiano por $J_\mu f$.

O resultado seguinte garante que o Jacobiano de uma transformação com respeito a uma medida é único, com respeito a essa medida.

Lema 2.4. *Sejam $f : M \to M$ transformação contínua, localmente injetiva e μ uma probabilidade. Se o Jacobiano de f existir, então ele é único em μ-q.t.p.*

Demonstração. Suponhamos que F e G sejam Jacobianos de f. Considere os conjuntos $A = \{x \in M | F(x) > G(x)\}$ e $B = \{x \in M | F(x) < G(x)\}$. Particione A e B em conjuntos com diâmetro suficientemente pequeno de forma que f seja injetiva nos elementos das partições. Usando resultados de teoria da medida é possível mostrar com essa hipóteses que A e B têm medida nula. Daí concluímos que $F = G$ em μ-q.t.p.

□

Consideremos $\psi : M \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $f : M \to M$ um difeomorfismo local.

Definição 2.5. *O operador $\mathcal{L}_\psi : C^0(M) \to C^0(M)$ definido por*

$$\mathcal{L}_\psi g(x) = \sum_{y \in f^{-1}(x)} e^{\psi(y)} \cdot g(y), \forall g \in C^0(M),$$

é chamado de Operador de Ruelle-Perron-Frobenius ou Operador de Transferência associado ao par (f, ψ).

Uma observação relevante é que o operador de transferência é contínuo na topologia C^0. Com efeito,

$$\| \mathcal{L}_\psi g(x) \|_{\sup} \leq \sharp f^{-1}(x) \cdot e^{\|\psi\|_{\sup}} \| g \|_{\sup} \leq Cte \cdot \| g \|_{\sup},$$

já que ψ é contínua e M é compacta.

Outra propriedade importante do operador de transferência é que se uma função g é positiva, então $\mathcal{L}_\psi g$ é positiva.

É de grande importância considerar o dual do operador de transferência restrito ao conjunto das medidas $\mathcal{M}$, o qual fica totalmente definido pela igualdade

$$\int g d(\mathcal{L}_\psi^* \mu) = \int \mathcal{L}_\psi g d\mu, \forall g \in C^0(M).$$

O resultado seguinte garante a existência de automedidas para o dual do operador de transferência.

Lema 2.5. *Existe $\nu \in \mathcal{M}$ tal que $\mathcal{L}_\psi^* \nu = \lambda \nu$, onde $\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\| \mathcal{L}_\psi^n 1 \|_{\sup}}$.*

Demonstração. É um fato da Análise Funcional que para operadores $T : C^0(M) \to C^0(M)$ positivos, o seu raio espectral é um autovalor do seu adjunto T^*. Para uma demonstração rigorosa ver [De], página 235.

□

Observação: É fácil ver que $\lambda = \int \mathcal{L}_\psi 1 \, d\nu$, onde ν é a medida associada a λ.

Lema 2.6. *Se ν é uma medida tal que $\mathcal{L}_\psi^* \nu = \lambda \nu$, onde $\lambda > 0$, então*

$$J_\nu f = \lambda e^{-\psi}.$$

Além disso, se considerarmos $h : M \to (0, \infty)$ uma função e $\mu = h\nu$, então

$$J_\mu f = \lambda e^{-\psi} \frac{h \circ f}{h}.$$

Demonstração. Seja $A \subset M$ um boreliano tal que $f|_A$ é injetiva. Consideremos uma seqüência $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $C^0(M)$ tal que $g_n \to \mathcal{X}_A$ em ν-q.t.p e $||g_n||_\infty \leq 2$, para todo $n \geq 1$. Então

$$\mathcal{L}_\psi(e^{-\psi} g_n)(x) = \sum_{y \in f^{-1}(x)} e^{\psi(y)} e^{-\psi(y)} g_n(y) = \sum_{y\in f^{-1}(x)} g_n(y) \to \mathcal{X}_{f(A)}$$

em ν-q.t.p. Seja $d = \sharp f^{-1}(x)$, o qual independe de x pelo Lema 2.1. Daí temos

$$|\mathcal{L}_\psi(e^{-\psi} g_n)(x)| \leq \sum_{y\in f^{-1}(x)} |g_n(y)| \leq \sum_{y \in f^{-1}(x)} ||g_n|| \leq 2d, \forall n \geq 1. \tag{2.1}$$

Usando 2.1 e o Teorema da Convergência Dominada (ver [Rud81]), vale

$$\int \lambda e^{-\psi} g_n d\nu = \int e^{-\psi} g_n d(\lambda\nu) = \int e^{-\psi} g_n d(\mathcal{L}_\psi^* \nu)$$
$$= \int \mathcal{L}_\psi (e^{\psi} g_n) d\nu \to \int \mathcal{X}_{f(A)} d\nu = \nu\left(f(A)\right).$$

Por outro lado,

$$\int \lambda e^{-\psi} g_n d\nu \to \int \lambda e^{-\psi} \mathcal{X}_A d\nu = \int_A \lambda e^{-\psi} d\nu.$$

Portanto,

$$\nu\left(f(A)\right) = \int_A \lambda e^{-\psi} d\nu.$$

Para provar a segunda parte usamos o Teorema de Radon-Nikodym (ver [Rud81]) e obtemos

$$\int \lambda e^{-\psi} \cdot \frac{h \circ f}{h} \cdot g_n d\mu = \int e^{-\psi} \cdot h \circ f \cdot g_n d(\mathcal{L}_\psi^* \nu) = \int \mathcal{L}_\psi (e^{-\psi} \cdot h \circ f \cdot g_n) d\nu$$

$$= \int \sum_{f(y)=x} h \circ f(y) \cdot g_n(y) d\nu(x) = \int \sum_{f(y)=x} h \circ f(y) \cdot g_n(y) d\nu(x)$$

$$= \int h(x) \cdot \sum_{f(y)=x} g_n(y) d\nu(x) = \int h(x) \cdot \mathcal{L}_\psi (e^{-\psi} \cdot g_n)(x) d\nu(x) = \int \mathcal{L}_\psi (e^{-\psi} \cdot g_n) d\mu.$$

Usando a definição do operador de Transferência temos que

$$\int \lambda e^{-\psi} \cdot \frac{h \circ f}{h} \cdot g_n d\mu = \int \sum_{f(y)=x} g_n d\mu \to \mu(f(A)).$$

Por outro lado

$$\int \lambda e^{-\psi} \cdot \frac{h \circ f}{h} \cdot g_n d\mu \to \int_A \lambda e^{-\psi} \cdot \frac{h \circ f}{h} d\mu.$$

Pela unicidade do limite concluí-se o resultado.

□

Lema 2.7. *Seja $f : M \to M$ expansora. Dado $U \subset M$ aberto não vazio, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(U) = M$, i.e, f é topologicamente misturadora.*

Demonstração. Sejam $x \in U$ e $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset U$. Suponhamos, por absurdo, que $f^n(U) \neq M$, para todo $n \geq 1$. Daí, existe $\omega : [0,1] \to M$ com $\omega(0) = f^n(x)$, $\omega(1) = y \in M - f^n(U)$ e $l(\omega) \leq (diamM) + 1$.

Sejam h^n o ramo inverso de f^n e uma curva $\omega_n = h^n \omega : [0,1] \to M$ satisfazendo $\omega_n(0) = x$ e $\omega_n(1) = y_n \in M - U$. Daí, como h^n contrai a taxa de σ^{-n}, vale $r \leq l(\omega_n) \leq \sigma^{-n} \cdot \{(diamM) + 1\}$. Contradição, pois r está fixo.

□

Definição 2.6. *Seja $\mu \in \mathcal{M}$. Definimos o suporte de μ como*

$$supp(\mu) := fecho\{x \in M; \forall \text{ vizinhança } V \text{ de } x,\ \mu(V) > 0\}.$$

O próximo resultado garante que se uma medida possui Jacobiano positivo, então ela está suportada sobre toda variedade.

Lema 2.8. *Se $f : M \to M$ é expansora e $\mu \in \mathcal{M}$ possui Jacobiano $J_\mu f$ positivo, então*

$$supp(\mu) = M.$$

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que existe $V \subset M$ aberto com $\mu(V) = 0$. Consideremos uma partição $\mathcal{G} = \{A_1, ..., A_l\}$ de V tal que $f|_{A_i}$ é injetiva para todo i.

Daí,

$$\mu(f(A_i)) = \int_{A_i} J_\mu f d\mu = 0,$$

pois $\mu(A_i) = 0$.

Logo, pela propriedade aditiva da medida, temos $\mu(f(V)) = 0$. Usando indução sobre n obtemos que $\mu(f^n(V)) = 0$, para todo $n \geq 1$. Agora, pelo Lema 2.7 existe N tal que $f^N(V) = M$, e daí teríamos que $\mu(M) = 0$, o que é um absurdo.

□

Lema 2.9. *Seja $\psi : M \to \mathbb{R}$ um potencial γ-Hölder e $S_n\psi = \sum_{i=0}^{n-1} \psi \circ f^i$. Se $d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon_0$, então*

$$|S_n\psi(x) - S_n\psi(y)| \leq A \cdot d(f^n(x), f^n(y))^\gamma.$$

Demonstração. Usando a desigualdade triangular e o fato de ψ ser uma função γ-Hölder, temos

$$|S_n\psi(x) - S_n\psi(y)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |\psi(f^i(x)) - \psi(f^i(y))| \leq \sum_{i=0}^{n-1} C \cdot d(f^i(x), f^i(y))^\gamma.$$

Usando os ramos inversos de f, garantidos pelo Lema 2.1, vale

$$d(f^i(x), f^i(y)) \leq \sigma^{i-n} \cdot d(f^n(x), f^n(y)).$$

Daí,

$$|S_n\psi(x) - S_n\psi(y)| \leq C \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \sigma^{(i-n)\gamma} \cdot d(f^n(x), f^n(y))^\gamma \leq \frac{C}{1 - \sigma^{-\gamma}} \cdot d(f^n(x), f^n(y))^\gamma.$$

Basta tomar $A = \dfrac{C}{1 - \sigma^{-\gamma}}$ para finalizar o resultado.

□

Lema 2.10. *Seja $f : M \to M$ uma transformação expansora e $\mu \in \mathcal{M}$ tal que $J_\mu f$ é estritamente positivo e Hölder-contínuo. Se $d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon_0$ então existe $K_1 > 0$ tal que*

$$K_1^{-1} \leq \frac{J_\mu f^n(x)}{J_\mu f^n(y)} \leq K_1.$$

Demonstração. Usando as manipulações necessárias teremos

$$\frac{J_\mu f^n(x)}{J_\mu f^n(y)} = \frac{\prod_{j=0}^{n-1} J_\mu f(f^j(x))}{\prod_{j=0}^{n-1} J_\mu f(f^j(y))} \leq \prod_{j=0}^{n-1} \frac{J_\mu f(f^j(y)) + |J_\mu f(f^j(x)) - J_\mu f(f^j(y))|}{J_\mu f(f^j(y))}$$

Observando que c $= \inf_{x\in M} J_\mu f(x) > 0$, temos

$$\frac{J_\mu f^n(x)}{J_\mu f^n(y)} \leq \prod_{j=0}^{n-1}(1 + \frac{1}{c} \cdot |J_\mu f(f^j(x)) - J_\mu f(f^j(y))|).$$

Usando que o jacobiano é γ-Hölder e os ramos inversos de f, garantidos pelo Lema 2.1, temos

$$\frac{J_\mu f^n(x)}{J_\mu f^n(y)} \leq \prod_{j=0}^{n-1}(1 + \frac{1}{c}Cd(f^j(x), f^j(y))^\gamma) \leq \prod_{j=0}^{n-1}(1 + \frac{C}{c}\sigma^{(j-n)\gamma}d(f^n(x), f^n(y))^\gamma).$$

Visto que $d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon_0$ vale

$$\frac{J_\mu f^n(x)}{J_\mu f^n(y)} \leq \prod_{j=0}^{n-1}(1 + \frac{C}{c}\sigma^{(j-n)\gamma}\epsilon_0^\gamma) \leq exp\left(\frac{C\epsilon_0^\gamma}{c(1-\sigma^{-\gamma})}\right)$$

Basta tomar $K_1 = exp\left(\frac{C\epsilon_0^\gamma}{c(1-\sigma^{-\gamma})}\right)$ para finalizar o resultado. E para obter a desigualdade contrária só é trocar os papéis de x e y.

□

Definição 2.7. *Sejam $f : M \to M$ e μ uma probabilidade. Dizemos que μ é uma medida nice com respeito a f se*

1. *Existe o Jacobiano $J_\mu f$ e é estritamente positivo.*

2. *Existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ pode-se encontrar $K_\epsilon > 0$ satisfazendo*

$$K_\epsilon^{-1} \leq \mu(B(\epsilon, n, x)) \cdot J_\mu f^n(x) \leq K_\epsilon$$

para todo $n \geq 0$ e todo $x \in M$.

Um resultado que decorre diretamente do Lema 2.10 é

Corolário 2.3. *Se μ é uma probabilidade que admite $J_\mu f$ estritamente positivo e Hölder-contínuo, então μ é uma medida nice.*

Demonstração. Seja $0 < \delta \leq \epsilon_0$. Sabemos, pela expansividade de f, que $f^n(B(\delta, n, x)) = B(f^n(x), \delta)$. Consideremos $\mathcal{U} = \{A_1, ..., A_l\}$ uma cobertura de M por bolas de raio $\leq \dfrac{\delta}{2}$ e $\delta_\epsilon = \min\limits_{i=1,...,l} \mu(A_i) > 0$ (pois μ é positiva sobre abertos). Denotando por B_i a bola dinâmica que é levada em A_i por f^n teremos

$$\delta_\epsilon \leq \mu(A_i) = \int_{B_i} J_\mu f^n d\mu \leq K_1 J_\mu f^n(x) \mu(B_i).$$

Por outro lado,

$$1 \geq \mu(A_i) = \int_{B_i} J_\mu f^n d\mu \geq K_1^{-1} J_\mu f^n(x) \mu(B_i).$$

Tomando $K_\epsilon = \dfrac{K_1}{\delta_\epsilon}$ segue-se o resultado.

□

Definição 2.8. *Uma medida de probabilidade μ é dita exata com respeito a f quando para todo $A \in \bigcap\limits_{k \geq 0} f^{-k}(\mathcal{B}(M))$ vale que $\mu(A) = 0$ ou 1, onde $\mathcal{B}(M)$ é a σ-álgebra de Borel em M.*

Lema 2.11. *Suponha que $f : M \to M$ é uma transformação expansora e μ é uma probabilidade f-invariante. Se o Jacobiano $J_\mu f$ é estrito positivo e Hölder, então μ é exata. Em particular, μ é uma medida misturadora com respeito ao par (f, μ).*

Demonstração. Ver [Cr85], página 29.

□

O resultado que se segue é de grande interesse, pois o mesmo faz uma relação entre a entropia métrica de uma transformação com o Jacobiano da transformação com respeito a medida considerada. Esse tipo de resultado é um dos motivadores do estudo do Jacobiano de transformações.

Teorema 2.3 (Fórmula da Entropia). *Se μ é uma medida f-invariante e nice, então*

$$h_\mu(f) = \int \log J_\mu f d\mu$$

Demonstração. O Teorema de Brin-Katok afirma que se μ é f-invariante então

$$h_\mu(f) = -\int \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_n \frac{1}{n} \log \mu(B(\epsilon, n, x)) d\mu.$$

Visto que μ é nice, temos

$$J_\mu f^n(x)^{-1} K_\epsilon^{-1} \leq \mu(B(\epsilon, n, x)) \leq J_\mu f^n(x)^{-1} K_\epsilon$$

sempre que ϵ é menor que a constante de expansividade de f.

Daí,

$$-\lim_{\epsilon \to 0} \limsup_n \frac{1}{n} \log \mu(B(\epsilon, n, x)) = \limsup_n \frac{1}{n} \log J_\mu f^n(x).$$

Por outro lado,

$$\frac{1}{n} \log J_\mu f^n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log J_\mu f(f^j(x)).$$

Pelo Teorema de Birkhoff, temos

$$\int \limsup_n \frac{1}{n} \log J_\mu f^n(x) d\mu = \int \log J_\mu f d\mu.$$

Portanto,

$$h_\mu(f) = \int \log J_\mu f d\mu.$$

□

O resultado que acabamos de provar existe para uma classe bem mais ampla do que a das transformações expansoras. Sendo o mesmo de grande importância, vamos fornecer o seu enunciado. Para isso vamos descrever a classe das transformações para as quais o resultado se verifica.

Sejam $f : M \to M$ uma transformação mensurável e μ uma probabilidade f-invariante. Suponha que existe uma partição finita ou enumerável $\mathcal{U}$ de M tal que

(a) f é localmente injetiva, digamos que esta é injetiva sobre os átomos de $\mathcal{U}$.

(b) diâmetro de $\mathcal{U}^{(n)}(x)$ tende a zero quando n cresce arbitrariamente, para μ quase todo x.

Teorema 2.4 (Fórmula de Rokhlin). *Se μ é uma probabilidade f-invariante e f satisfaz (a) e (b) acima, então*

$$h_\mu(f) = \int \log J_\mu(f)\; d\mu.$$

Demonstração. Ver [OV05], página 7.

□

A partir de agora vamos fazer algumas estimativas sobre o operador de transferência para poder demonstrar o nosso resultado principal.

Lema 2.12. *Se $f : M \to M$ é expansora, então existe $C > 0$ tal que*

$$\frac{1}{C} \leq \frac{(\mathcal{L}_\psi^m 1)(x)}{(\mathcal{L}_\psi^m 1)(y)} \leq C,$$

para todo $x, y \in M$ e todo $m \geq 1$.

Demonstração. Vamos dividir o nosso problema em dois casos.

1º Caso (local): Sejam x_1 e y_1 as pré-imagens por f^n de x e y que estão na mesma bola dinâmica de comprimento n e raio δ. Desde que $d(x,y) < \epsilon_0$, temos usando o Lema 2.9

$$e^{-A\cdot d(x,y)^\gamma} \leq e^{S_n\psi(x_1) - S_n\psi(y_1)} \leq e^{A\cdot d(x,y)^\gamma}. \tag{2.2}$$

Visto que

$$\frac{\mathcal{L}_\psi^n 1(x)}{\mathcal{L}_\psi^n 1(y)} = \frac{\displaystyle\sum_{f^n(x_1)=x} e^{S_n\psi(x_1)}}{\displaystyle\sum_{f^n(y_1)=y} e^{S_n\psi(y_1)}}$$

temos

$$e^{-A\cdot d(x,y)^\gamma} \leq \frac{\mathcal{L}_\psi^n 1(x)}{\mathcal{L}_\psi^n 1(y)} \leq e^{A\cdot d(x,y)^\gamma}. \tag{2.3}$$

Donde,

$$e^{-A\cdot\epsilon_0^\gamma} \leq \frac{\mathcal{L}_\psi^n 1(x)}{\mathcal{L}_\psi^n 1(y)} \leq e^{A\cdot\epsilon_0^\gamma}.$$

2º Caso (global): Consideremos $x, y \in M$ quaisquer. Seja $\gamma : [0,1] \to M$, diferenciável por partes, ligando x a y. Usando que γ é contínua e $[0,1]$ é compacto, garantimos a existência de bolas $B_1, ..., B_k$ de raio $\frac{\epsilon_0}{2}$ tal que $\gamma([0,1]) \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ e $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$, $i = 1, ..., k-1$.

Escolha $x_i \in B_i \cap B_{i+1}$, então

$$\frac{(\mathcal{L}_\psi^m 1)(x)}{(\mathcal{L}_\psi^m 1)(y)} = \frac{(\mathcal{L}_\psi^m 1)(x)}{(\mathcal{L}_\psi^m 1)(x_1)} \cdot \frac{(\mathcal{L}_\psi^m 1)(x_1)}{(\mathcal{L}_\psi^m 1)(x_2)} \cdots \frac{(\mathcal{L}_\psi^m 1)(x_{k-1})}{(\mathcal{L}_\psi^m 1)(y)} \leq (e^{A\cdot\epsilon_0^\gamma})^k.$$

Visto que M é compacta, temos que $diam(M) < \infty$. Donde, o número $k \leq 2 \cdot \frac{diam(M)+1}{\epsilon_0}$. Portanto, basta tomar $C \geq (e^{A\cdot\epsilon_0^\gamma})^k$ para finalizar o resultado.

□

Corolário 2.4. *A seqüência* $\{\lambda^{-n}\mathcal{L}_\psi^n 1\}$ *é limitada na topologia* C^0*, i.e,* $||\lambda^{-n}\mathcal{L}_\psi^n 1||_{sup} \leq K_3$*, para algum* $K_3 > 0$ *e todo* $n \geq 1$.

Demonstração. Pela definição de λ temos:

$$\int \lambda^{-n}\mathcal{L}_\psi^n 1 d\nu = 1,$$

para todo $n \geq 1$.

Portanto devem existir $s_n \in M$, para cada $n \geq 1$, tal que $\lambda^{-n}\mathcal{L}_\psi^n 1(s_n) \leq 1$. Usando o Lema 2.12 temos que

$$\lambda^{-n}\mathcal{L}_\psi^n 1(x) \leq C \cdot \lambda^{-n}\mathcal{L}_\psi^n 1(s_n) \leq C,$$

para todo $x \in M$ e todo $n \geq 1$. Basta tomar $K_3 \geq C$.

□

Teorema 2.5. *Existe $K_4 > 0$ tal que*

$$|\lambda^{-n}\mathcal{L}_\psi^n 1(x_1) - \lambda^{-n}\mathcal{L}_\psi^n 1(x_2)| \leq K_4 \cdot d(x_1, x_2)^\gamma,$$

desde que $d(x_1, x_2) < \epsilon_0$.

Demonstração. Usando expansão de Taylor vale

$$|e^{\pm A \cdot d(x_1,x_2)^\gamma} - 1| \leq C_0 \cdot d(x_1, x_2)^\gamma. \tag{2.4}$$

Utilizando as desigualdades (2.3) e (2.4) temos

$$-C_0 \cdot d(x_1, x_2)^\gamma \leq \frac{\mathcal{L}_\psi^n 1(x_1)}{\mathcal{L}_\psi^n 1(x_2)} - 1 \leq C_0 \cdot d(x_1, x_2)^\gamma.$$

Portanto,

$$|\lambda^{-n}\mathcal{L}_\psi^n 1(x_1) - \lambda^{-n}\mathcal{L}_\psi^n 1(x_2)| \leq C_0 \cdot d(x_1, x_2)^\gamma \cdot |\lambda^{-n}\mathcal{L}_\psi^n 1(x_2)| \leq C_0 \cdot K_3 \cdot d(x_1, x_2)^\gamma.$$

Basta tomar $K_4 = C_0 \cdot K_3$ para finalizar o resultado.

□

Corolário 2.5. *A seqüência $\{\lambda^{-n}\mathcal{L}_\psi^n 1\}$ é equicontínua.*

Demonstração. Segue-se diretamente do Teorema 2.5.

□

Definição 2.9. *Uma função $\phi : M \to \mathbb{R}$ é dita Hölder-contínua com constante de Hölder γ se*

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq Cte\ d(x, y)^\gamma,$$

para todo x e y em M. Denotaremos o conjunto de tais funções por $C^{0,\gamma}(M)$.

Vamos considerar agora em $C^{0,\gamma}(M)$ a norma

$$||\phi||_{\gamma,\delta} := ||\phi||_{sup} + \sup_{0<d(x,y)<\delta} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{d(x, y)^\gamma}.$$

É um fato de Análise Funcional que $(C^{0,\gamma}, ||.||_{\gamma,\delta})$ é um espaço de Banach (ver [Rud81]).

Corolário 2.6. *A seqüência* $\{\lambda^{-n}\mathcal{L}_\psi^n 1\}$ *é limitada na norma* $||.||_{\gamma,\delta}$, *i.e,* $||\lambda^{-n}\mathcal{L}_\psi^n 1||_{\gamma,\delta} \leq K_5$, *para algum* $K_5 > 0$.

Demonstração. Basta tomar $K_5 \geq K_3 + K_4$.

$\square$

Teorema 2.6. *Sejam* $f : M \to M$ *uma transformação expansora e* $\psi : M \to \mathbb{R}$ *uma função* γ*-Hölder. Se* $\mathcal{L}_\psi g = \lambda g$, *com* g *positiva,* $\lambda > 0$, *e* $\mathcal{L}_\psi^* \nu = \lambda \nu$, *então a medida* $\mu = g{\cdot}\nu$ *é* f*-invariante, ergódica e satisfaz a identidade*

$$\log \lambda = h_\mu(f) + \int \psi \; d\mu.$$

Demonstração. Vejamos que μ é f-invariante:

$$\int u \circ f \; d\mu = \int u \circ f \cdot g \; d\nu = \lambda^{-1} \int (u \circ f) \cdot g \; d\left(\mathcal{L}_\psi^* \nu\right) = \lambda^{-1} \int \mathcal{L}_\psi \left((u \circ f) \cdot g\right) \; d\nu$$

Pela definição do Operador de Ruelle temos

$$\int u \circ f \; d\mu = \lambda^{-1} \int \left(\sum_{f(y)=x} e^{\psi(y)} u \circ f(y) \cdot g(y) \right) d\nu(x),$$

i.e,

$$\int u \circ f d\mu = \lambda^{-1} \int u(x) \left(\sum_{f(y)=x} e^{\psi(y)} \cdot g(y) \right) d\nu(x)$$

$$= \lambda^{-1} \int u \mathcal{L}_\psi g d\nu = \lambda^{-1} \int u \lambda g d\nu = \int u d\mu.$$

Pelo Lema 2.6 temos que $J_\mu f = \lambda e^{-\psi} \dfrac{g \circ f}{g}$. Logo $J_\mu f$ é γ-Hölder e estritamente positivo, então pelo Corolário 2.3 temos que μ é nice. Agora usando o Teorema 2.3 temos que:

$$h_\mu(f) = \int \log J_\mu f \; d\mu$$

$$= \int \log \lambda - \psi + \log(g \circ f) - \log(g) \; d\mu = \log \lambda - \int \psi \; d\mu,$$

pois μ é f-invariante.

Portanto

$$\log \lambda = h_\mu(f) + \int \psi \; d\mu.$$

O fato de μ ser ergódica decorre dos Lemas 2.6 e 2.11.

$\square$

Teorema 2.7. *Se $f : M \to M$ expansora e $\psi : M \to \mathbb{R}$ é γ-Hölder, então existe uma função $g : M \to \mathbb{R}$ γ-Hölder e estritamente positiva tal que*

(a) $\mathcal{L}_\psi g = \lambda \cdot g$, com $\lambda > 0$.

(b) $g \in C^{0,\gamma}(M)$ com $\int g \, d\nu = 1$.

(c) g é única a menos de multiplicação por escalares.

Demonstração. Consideremos a seqüência

$$g_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^{-j} \mathcal{L}_\psi^j 1.$$

Pelo Corolário 2.5 e o Corolário 2.6 temos que $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência equicontínua e uniformemente limitada. Usando o Teorema de Árzela-Áscoli (ver [El03]), existe uma subseqüência $\{g_{n_k}\}$ convergindo uniformemente para uma $g \in C^0(M)$. Devido ao Teorema 2.5 temos que $g \in C^{0,\gamma}(M)$.

Vamos mostrar que g é uma autofunção do operador de Ruelle.

Vejamos:

$$\mathcal{L}_\psi g = \mathcal{L}_\psi \left(\lim_k \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \lambda^{-j} \mathcal{L}_\psi^j 1 \right) = \lim_k \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \lambda^{-j} \mathcal{L}_\psi^{j+1} 1.$$

Daí

$$\mathcal{L}_\psi g = \lambda \lim_k \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \lambda^{-(j+1)} \mathcal{L}_\psi^{j+1} 1 = \lambda \lim_k \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} \lambda^{-j} \mathcal{L}_\psi^j 1,$$

ou seja,

$$\mathcal{L}_\psi g = \lambda \lim_k \frac{1}{n_k} \left(\sum_{j=0}^{n_k-1} \lambda^{-j} \mathcal{L}_\psi^j 1 - \lambda^{-0} \mathcal{L}_\psi^0 1 + \lambda^{-n_k} \mathcal{L}_\psi^{n_k} 1 \right).$$

Usando o fato que $\lambda^{-n} \mathcal{L}_\psi^n 1$ é limitado, então

$$\mathcal{L}_\psi g = \lambda \lim_k \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \lambda^{-j} \mathcal{L}_\psi^j 1 = \lambda g.$$

Observe que utilizamos o fato do operador $\mathcal{L}_\psi$ ser contínuo.

Vamos fazer alguns cálculo para nos auxiliar na integral de g. Vejamos

$$\int g_{n_k} d\nu = \int \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \lambda^{-j} \mathcal{L}_\psi^j 1 d\nu = \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \lambda^{-j} \left(\int \mathcal{L}_\psi^j 1 d\nu \right) = \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \lambda^{-j} \lambda^j = 1.$$

Visto que g_{n_k} converge uniformemente para g temos

$$\int g d\nu = 1.$$

Vamos mostrar que g é estritamente positiva. Com efeito, usando que

$$\int \lambda^{-n} \mathcal{L}_\psi^n 1 d\nu = 1,$$

para todo $n \geq 1$, garantimos a existência de $x_n \in M$, para cada $n \geq 1$, tal que

$$\lambda^{-n} \mathcal{L}_\psi^n 1(x_n) \geq 1.$$

Pelo Lema 2.12 vale

$$\lambda^{-n} \mathcal{L}_\psi^n 1(x) \geq \lambda^{-n} \mathcal{L}_\psi^n 1(x_n) \cdot \frac{1}{C} \geq \frac{1}{C}, \tag{2.5}$$

para todo $x \in M$ e todo $n \geq 1$.

Pela permanência do limite e por (2.5) vale que $g \geq \dfrac{1}{C}$.

Vamos agora demonstrar o último ítem, justamente a unicidade da função unitária g. Para isso vamos fazer uso do seguinte resultado

Lema 2.13. *Sejam η uma medida de probabilidade positiva sobre os abertos de M e $\{\phi_n\} \subset C^0$ uma seqüência limitada e equicontínua. Se existir ϕ tal que*

$$\int u\phi_n \, d\eta \to \int u\phi \, d\eta, \text{ para toda } u \in C^0.$$

Então, $\phi_n \to \phi$.

Demonstração. Seja ϕ_0 um ponto de acumulação da seqüência ϕ_n. Então, pela convergência em C^0

$$0 = \int u(\phi_0 - \phi) \, d\eta, \text{ para toda } u \in C^0. \tag{2.6}$$

Suponha que $\phi_0 \neq \phi$. Pela continuidade de $\phi_0 - \phi$ garantimos uma vizinhança V tal que $\phi_0 - \phi > \delta > 0$ ou $\phi_0 - \phi < \delta < 0$. Suponha o primeiro caso. Pela arbitrariedade da função u podemos escolhe-lá estritamente positiva com suporte em V.

Daí,

$$\int u(\phi_0 - \phi) \, d\eta \geq \int_V u(\phi_0 - \phi) \, d\eta > \delta \int u d\eta > 0.$$

Porém isto contradiz (2.6). Portanto $\phi_n \to \phi$.

Voltando a demonstração do Teorema, vamos fazer alguns cálculos que nos auxiliarão. Seja ν a automedida do dual do operador de transferência associada ao raio espectral de $\mathcal{L}_\psi$. Temos

$$\int u(\lambda^{-n}\mathcal{L}_\psi^n \phi)d\nu = \int \lambda^{-n}\mathcal{L}_\psi^n(u \circ f^n \phi)d\nu = \int u \circ f^n \phi d\nu = \int u \circ f^n \frac{\phi}{g} d\mu.$$

Usando que (f, μ) é misturador, pois μ é exata, vale

$$\int u(\lambda^{-n}\mathcal{L}_\psi^n \phi)d\nu = \int u \circ f^n \frac{\phi}{g} d\mu \to \left(\int u d\mu\right)\left(\int \frac{\phi}{g} d\mu\right) = \int u \left(g \int \phi d\nu\right) d\nu.$$

Vamos mostrar que $\{\lambda^{-n}\mathcal{L}_\psi^n u\}$ satisfaz as condições do Lema 2.13. Basta mostrar que a seqüência $\{\lambda^{-n}\mathcal{L}_\psi^n u\}$ é equicontínua e limitada.

Sejam x_i e y_i, $i = 1, ..., k$, as respectivas pré-imagens dos pontos x e y pelos respectivos ramos inversos de f^{-n} que estão na mesma bola dinâmica de comprimento n e raio menor que ϵ_0 (ϵ_0 dado no Lema 2.1).

Seja $u \in C^{0,\gamma}$. Então vale

$$u(x_i) \leq u(y_i) + C(u)d(x_i, y_i)^\gamma \leq u(y_i) + C(u)\sigma^{-\gamma n} d(x, y)^\gamma,$$

onde $C(u)$ é uma constante que depende de u.

Usando as desigualdade (2.2) e (2.4) vale

$$e^{S_n\psi(x_i)} \leq e^{S_n\psi(y_i)} \left(1 + Cd(x, y)^\gamma\right).$$

Então,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\psi^n u(x) = \sum_{i=1}^{k} e^{S_n\psi(x_i)} u(x_i) &\leq \sum_{i=1}^{k} e^{S_n\psi(y_i)} \left(1 + Cd(x, y)^\gamma\right)\left(u(y_i) + C(u)\sigma^{-\gamma n} d(x, y)^\gamma\right) \\
&\leq \mathcal{L}_\psi^n u(y) + C(u)\sigma^{-\gamma n} d(x, y)^\gamma \mathcal{L}_\psi^n 1(y)(1 + C\epsilon_0^\gamma) + Cd(x, y)^\gamma \mathcal{L}_\psi^n u(y) \\
&\leq \mathcal{L}_\psi^n u(y) + \sigma^{-\gamma n} d(x, y)^\gamma C(u) C\lambda^n (1 + C\epsilon_0^\gamma) + Cd(x, y)^\gamma C\lambda^n \parallel u \parallel_{sup},
\end{aligned}$$

onde usamos que $\mathcal{L}_\psi^n 1(x) \leq Cte\ \lambda^n$.

Donde

$$\lambda^{-n}\mathcal{L}_\psi^n u(x) - \lambda^{-n}\mathcal{L}_\psi^n u(y) \leq Cte. \parallel u \parallel_{\gamma,\delta} d(x, y)^\gamma.$$

Pela simetria da função distância vale que

$$|\lambda^{-n}\mathcal{L}_\psi^n u(x) - \lambda^{-n}\mathcal{L}_\psi^n u(y)| \leq Cte. \parallel u \parallel_{\gamma,\delta} d(x, y)^\gamma,$$

para $n \geq 1$ e x, y tais que $d(x, y) < \epsilon_0$.

Isto mostra que a seqüência $\{\lambda^{-n}\mathcal{L}_\psi^n u\}$ é equicontínua, para toda $u \in C^0$ (usamos nesta passagem que $C^{0,\gamma}$ é denso em C^0). Agora que esta é limitada decorre do Corolário 2.6, pois

$$\| \lambda^{-n}\mathcal{L}_\psi^n u \|_{sup} \leq \| \lambda^{-n}\mathcal{L}_\psi^n 1 \|_{sup} \| u \|_{sup} \leq K_5 \| u \|_{sup} .$$

Pelo Lema 2.13 vale que

$$\lambda^{-n}\mathcal{L}_\psi^n u \to g \int u \, d\nu, \ \textit{para todo } u \in C^0.$$

Com isso vamos mostrar que g é a única autofunção unitária não-negativa.

Com efeito, suponha que g_0 é autofunção do operador de transferência, i.e, $\mathcal{L}_\psi g_0 = \lambda_0 g_0$. Então,

$$\lambda^{-n}\mathcal{L}_\psi^n g_0 = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^n g_0 \to g \int g_0 \, d\nu.$$

Como ν é positiva sobre os abertos e g_0 é não - negativa, então $\int g_0 \, d\nu > 0$. Donde $\lambda_0 = \lambda$ e $g_0 = g \int g_0 \, d\nu$.

□

Teorema 2.8. *Se $f : M \to M$ é expansora e $\psi : M \to \mathbb{R}$ é γ-Hölder, então para toda η f-invariante vale*

$$h_\eta(f) + \int \psi d\eta \leq \log \lambda.$$

Além disso, a igualdade ocorre se e somente se, $\eta = g\nu$.

Demonstração. A estratégia é simplesmente garantir que se um estado de equilíbrio ergódico satisfaz a igualdade então ele coincide com $g\nu$.

Relembre que ν é a automedida de $\mathcal{L}_\psi^*$ associada ao raio espectral de $\mathcal{L}_\psi$ e g é a autofunção de $\mathcal{L}_\psi$ construída no Teorema 2.7.

Defina $h : M \to (0, \infty)$ por $h(x) = \lambda^{-1} e^{\psi(x)} \dfrac{g(x)}{g(f(x))}$.

Observemos que

$$\sum_{y:f(y)=x} h(y) = \frac{\displaystyle\sum_{y:f(y)=x} e^{\psi(y)} g(y)}{\lambda g(x)} = \frac{\mathcal{L}_\psi g(x)}{\lambda g(x)} = 1.$$

Com a notação acima vamos enunciar e provar dois resultados que nos auxiliarão na demonstração do resultado. Utilizaremos, a priori, que a pressão topológica $P(\psi)$ é igual a $\log \lambda$, porém só demonstraremos esse fato no fim da prova do Teorema.

Lema 2.14. *Seja η um estado de equilíbrio ergódico com respeito ao par (f,ψ). Então*

1. $h_\eta(f) + \int \log h \; d\eta = 0.$

2. $J_\eta f(y) = \dfrac{1}{h(y)}$, *para η quase todo ponto.*

Demonstração. Visto que η é um estado de equilíbrio vale que

$$h_\eta(f)+\int \log h \; d\eta = h_\eta(f)+\int \psi \; d\eta - \log\lambda + \int [\log(g(x)) - \log(g(f(x)))] \; d\eta = 0,$$

onde usamos que η é f-invariante e $\log\lambda = P(\psi)$.

Para provarmos a segunda parte do Lema vamos utilizar a fórmula de Rokhlin a qual afirma que $h_\eta(f) = \int \log J_\eta f \; d\eta$.

Usando o primeiro item do Lema e a fórmula de Rokhlin, temos que

$$\int \log \frac{h(x)}{h_\eta(x)} d\eta(x) = 0,$$

onde $h_\eta = \dfrac{1}{J_\eta f}$.

Usando a definição de Jacobiano temos que

$$\int \sum_{y:f(y)=x} h_\eta(y) \log \frac{h(y)}{h_\eta(y)} d\eta = 0.$$

Usando a convexidade da função logaritmo temos que

$$0 \leq \sum_{y:f(y)=x} h_\eta(y) \log \frac{h(y)}{h_\eta(y)} \leq \log\left(\sum_{y:f(y)=x} h_\eta(y) \frac{h(y)}{h_\eta(y)}\right)$$

$$= \log\left(\sum_{f(y)=x} h(y)\right) = \log 1 = 0,$$

para η-q.t.p. Sabemos que a igualdade ocorre somente se

$$\frac{h(y)}{h_\eta(y)} = c(x), \; \textit{para todo } y \in f^{-1}(x).$$

A invariância de η garante que $\displaystyle\sum_{y:f(y)=x} h_\eta(y) = 1$ em η-q.t.p.

Donde,

$$c(x) = \frac{\displaystyle\sum_{y:f(y)=x} h_\eta(y)}{\displaystyle\sum_{y:f(y)=x} h_\eta(y)} = 1.$$

Temos assim que $h = h_\eta$ em um conjunto cuja pré-imagem tem medida total. Usando a invariância de η, temos $h = h_\eta$ em um conjunto de medida total.

$\square$

Uma conseqüência importante do Lema 2.14 é

Corolário 2.7. *Se η é um estado de equilíbrio ergódico com respeito ao par (f, ψ), então $\mathcal{L}_\psi^*(g^{-1}\eta) = \lambda(g^{-1}\eta)$.*

Demonstração. Seja ξ uma função contínua qualquer. Temos que

$$\int \xi \, d(\mathcal{L}_\psi^*(g^{-1}\eta)) = \int \sum_{y:f(y)=x} e^{\psi(y)}\xi(y)g(f(y))^{-1} \, d\eta.$$

Usando a definição da função h, temos que

$$\int \xi \, d(\mathcal{L}_\psi^*(g^{-1}\eta)) = \int \sum_{y:f(y)=x} \lambda\xi(y)g(y)^{-1}h(y) \, d\eta = \lambda \int \xi(x)g(x)^{-1} \, d\eta = \int \xi \, d(\lambda g^{-1}\eta),$$

onde usamos a definição de Jacobiano na segunda igualdade.

$\square$

Voltando a demonstração do Teorema 2.2, podemos garantir usando o Corolário 2.7, Lema 2.6 e Corolário 2.3 que $g^{-1}\eta$ é uma medida nice.

Logo,

$$K^{-1} \leq g^{-1}\eta(B(\epsilon, n, x))J_\eta f^n(x) \leq K.$$

Usando a expressão do Jacobiano de f com respeito à η podemos garantir que existe constante K tal que

$$K^{-1} \leq \frac{g^{-1}\eta(B(\epsilon, n, x))}{\nu(B(\epsilon, n, x))} \leq K,$$

para todo $n \geq 0$ e todo $x \in M$.

Visto que as bolas dinâmicas formam um conjunto gerador, podemos concluir que η e $\mu = g\nu$ são equivalentes. Visto que as mesmas são ergódicas, temos que $\eta = \mu$.

Para finalizarmos o Teorema falta apenas mostrar que $\lambda = e^{P(\psi)}$, o que passamos a fazer.

Devido ao Lema 2.6 temos que $J_\nu f(x) = \lambda e^{-\psi(x)}$. Donde $J_\nu f^n(x) = e^{n \log \lambda - S_n\psi(x)}$, onde ν é a automedida associada ao raio espectral de $\mathcal{L}_\psi$. Pelo Corolário 2.3, a medida ν é nice.

Portanto

$$K^{-1}\nu(B(\epsilon,n,x)) \leq e^{S_n\psi(x)-nP} \leq K\nu(B(\epsilon,n,x)),$$

onde $P = \log \lambda$, $x \in M$ e $n \geq 0$.

Utilizando o Lema 2.9, para $\epsilon < \epsilon_0$ temos que

$$C_1\nu(B(\epsilon,n,x)) \leq \exp(-nP + \sup_{y\in B(\epsilon,n,x)} S_n\psi(y)) \leq C_2\nu(B(\epsilon,n,x)).$$

Somando sobre todas as coleções $\mathcal{G}_n$ finitas ou enumeráveis de bolas dinâmicas de raio ϵ e comprimento n, $n \geq N$, tais que $\mathcal{G}_n$ cobre M, temos

$$C_1 \leq \sum_{B(\epsilon,n,x)\in\mathcal{G}_n} \exp(-nP + \sup_{y\in B(\epsilon,n,x)} S_n\psi(y)) \leq C_2 \sum_{B(\epsilon,n,x)\in\mathcal{G}_n} \nu(B(\epsilon,n,x)).$$

Usando o Lema da cobertura de Besicovitch (ver [EG92], página 30.), passando a uma subcobertura se necessário, podemos garantir que os elementos em $\mathcal{G}_n$ se intersectam no máximo L vezes, onde L depende apenas da variedade M.

Daí,

$$C_1 \leq \sum_{B(\epsilon,n,x)\in\mathcal{G}_n} \exp(-nP + \sup_{y\in B(\epsilon,n,x)} S_n\psi(y)) \leq C_2 L\nu(M).$$

Portanto $P(\psi,\epsilon) = \log \lambda$, onde $\epsilon < \epsilon_0$. Tomando o limite quando o ϵ tende a zero temos pelo Teorema 1.11 que $P(\psi) = \log \lambda$.

Isto encerra o Teorema.

$\square$

Demonstração de Teorema 2.2. Decorre diretamente dos Teoremas 2.6, 2.7 e 2.8.

$\square$

Observação: Garantimos com o Teorema 2.2 a existência de uma única medida com entropia máxima para a classe das transformações expansoras, i.e, uma medida cuja sua entropia métrica coincide com a entropia topológica da transformação.

Capítulo 3

Transformações não uniformemente expansoras

Neste capítulo o objeto geral é obter uma classe mais ampla de transformações que possuem estados de equilíbrio. Vamos seguir as idéias do primeiro parágrafo do segundo capítulo, porém surgirão leves mudanças, as quais descrevemos agora

- Exibir um subconjunto $\mathcal{K}$ de medidas invariantes tal que todos seus expoentes de Lyapunov são positivos e quase todo ponto possui infinitos tempos hiperbólicos.

- Mostrar a existência de uma partição geradora para toda medida em $\mathcal{K}$. Deste fato e do Teorema de Kolmogorov-Sinai garantimos a existência de medidas maximizando o operador P_ψ sobre o conjunto $\mathcal{K}$.

- Provar que se o potencial tem variação baixa, então o máximo obtido sobre $\mathcal{K}$ é de fato o máximo global para P_ψ sobre o conjunto $\mathcal{I}$.

3.1 Estados de Equilíbrio para transformações tipo 1

Nesta seção vamos considerar transformações $f : M \to M$ de classe $C^{1,\kappa}$ e que sejam difeomorfismo local. Como antes, M é uma variedade compacta, sem bordo e conexa.

Definição 3.1. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo local de classe $C^{1,\kappa}$. Diz-se que f é uma transformação tipo 1 se:*

H1. Existe uma cobertura $\{B_1, ..., B_p, ..., B_{p+q}\}$ de M tal que $f|_{B_i}$ é injetiva e

- *f expande uniformemente para todo $x \in B_1 \cup ... \cup B_p$:*

$$||Df(x)^{-1}|| \leq (1+\delta_1)^{-1};$$

- *f não contrai muito:*

$$||Df(x)^{-1}|| \leq (1+\delta_0),$$

  para todo $x \in M$.

H2. f expande volume: $|\det Df(x)| \geq \sigma_1$ com $\sigma_1 > q$.

Definamos o conjunto

$$V = \{x \in M; ||Df(x)^{-1}|| > (1+\delta_1)^{-1}\}.$$

H3. Existe um conjunto $W \subset B_{p+1} \cup ... \cup B_{p+q}$ contendo V tal que

$$M_1 > m_2 \text{ e } m_2 - m_1 < \beta,$$

onde m_1, m_2 são o ínfimo e o supremo de $\log ||\det Df||$ em V, respectivamente, e M_1, M_2 são o ínfimo e o supremo de $\log ||\det Df||$ em W^c, respectivamente.

Definição 3.2. *Dizemos que uma função $\varphi : M \to \mathbb{R}$ tem ρ-variação baixa com respeito a f se*

$$\max_{x \in M} \varphi(x) < P(\varphi) - \rho \cdot h_{top}(f).$$

O resultado principal desta seção é

Teorema 3.1 (Oliveira-2002). *Assuma que f é uma transformação tipo 1, com δ_0 e β suficientemente pequenos. Então existem $\rho > 0$ e ao menos um estado de equilíbrio com respeito ao par (f, φ), onde φ é uma função contínua com ρ-variação baixa.*

Um fato que usaremos com freqüência é que sempre podemos escolher um α suficientemente próximo de 1 e $c > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$(1+\delta_0)^\alpha(1+\delta_1)^{-(1-\alpha)} \leq e^{-4c}.$$

Devido as hipóteses $H1$ e $H2$, o Teorema 4.1 (ver Apêndice) garante a existência de um $\gamma_0 < 1$ tal que *Leb*-q.t.p passa uma fração γ_0 de tempo em $B_{p+1} \cup ... \cup B_{p+q}$. Agora, escolha $\alpha > \gamma_0$ e definamos o conjunto

$$K_\alpha := \{\mu \in \mathcal{I}(f); \mu(V) \leq \alpha\}.$$

Lema 3.1. *K_α é não vazio, convexo e compacto.*

Demonstração. Com efeito, K_α é não vazio, pois as medidas construídas no Teorema 4.3 pertencem a K_α. Agora, que K_α é convexo decorre diretamente da sua definição. Para provar que K_α é compacto basta utilizar que V é aberto e se uma sequência de medidas μ_n converge para uma medida μ, então vale

$$\liminf_n \mu_n(V) \geq \mu(V),$$

i.e, se as $\mu_n' s$ pertencem a K_α então μ também pertence.

$\square$

Usando o Teorema da Decomposição Ergódica vamos definir o conjunto

$$\mathcal{K} := \{\mu \in \mathcal{I}; \mu_x \in K_\alpha \textit{ para } \mu - q.t.p\}.$$

Definição 3.3. *Dizemos que a transformação f é não-uniformemente expansora com respeito à μ se*

$$\limsup_n \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \log ||Df(f^j(x))^{-1}|| \leq -4c,$$

para algum $c > 0$. Neste caso, diz-se que a medida μ é f-expansiva com expoente c.

Usaremos no próximo resultado o seguinte fato que decorre diretamente do Teorema Ergódico de Birkhoff: se f preserva à probabilidade ergódica μ então para todo conjunto mensurável A vale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(f^j(x)) = \mu(A),$$

para μ-quase todo ponto $x \in A$.

Lema 3.2. *Toda medida $\mu \in \mathcal{K}$ é f-expansiva com expoente c.*

Demonstração. Suponhamos que $\mu \in \mathcal{K}$ é uma medida ergódica. Pela definição de $\mathcal{K}$, temos que $\mu(V) \leq \alpha$ e logo pelo Teorema Ergódico existe $A \subset M$ com $\mu(A) = 1$ e para todo $x \in A$ vale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \chi_V(f^j(x)) \leq \alpha,$$

i.e, o tempo de permanência da órbita de x em V é aproximadamente α. Por outro lado,

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \log ||Df(f^j(x))^{-1}|| = \frac{1}{n}\sum_{f^j(x)\in V} \log ||Df(f^j(x))^{-1}|| + \frac{1}{n}\sum_{f^j(x)\in V^c} \log ||Df(f^j(x))^{-1}||.$$

Usando a hipótese $H1$, para todo $x \in A$, vale:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \log ||Df(f^j(x))^{-1}|| \leq \frac{1}{n}\log\{(1+\delta_0)^{n\alpha}(1+\delta_1)^{-n(1-\alpha)}\} \leq -4c,$$

pelo comentário no inicio da seção.

Para finalizar, seja H o conjunto dos $x \in M$ tais que vale o resultado. Usando o fato que toda μ em $\mathcal{K}$ é combinação convexa de medidas ergódicas μ_x em K_α, temos, pelo caso anterior, $\mu_x(H) = 1$ para μ-q.t.p. Portanto, pelo Teorema da Decomposição Ergódica, temos

$$\mu(H) = \int \mu_x(H) d\mu = 1.$$

□

Definição 3.4. *Dizemos que $n \in \mathbb{N}$ é um tempo hiperbólico para $x \in M$ com expoente c se para todo $j = 1, ..., n$ vale:*

$$\prod_{k=1}^{j} ||Df(f^{n-k}(x))^{-1}|| \leq e^{-2cj}.$$

O resultado seguinte é um fato totalmente algébrico, mas que nos auxilia na busca por tempos hiperbólicos.

Lema 3.3 (Pliss). *Dados* $A \geq c_2 > c_1 > 0$, *seja* $\theta_0 = \dfrac{c_2 - c_1}{A - c_1}$. *Se* $a_1, ..., a_n$ *são números reais tal que* $a_i \leq A$, $i = 1, ..., n$ *e*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geq c_2 n,$$

então existem um inteiro $l > \theta_0 n$ *e inteiros* $1 < n_1 < ... < n_l \leq n$, *tal que para todo* $0 \leq k \leq n_i$ *e* $i = 1, ..., l$, *vale:*

$$\sum_{j=k+1}^{n_i} a_j \geq c_1(n_i - k).$$

Demonstração. Ver [ABV00], página 15.

□

Corolário 3.1. *Se* μ *é uma medida* f*-invariante e* f*-expansiva com expoente* c, *então existe um conjunto de medida total* H *tal que:*

1. *Todo* $x \in H$ *possui infinitos tempos hiperbólicos* $n_i = n_i(x)$ *com expoente* c, *i.e,*
$$\prod_{k=1}^{j} ||Df(f^{n-k}(x))^{-1}|| \leq e^{-2cj} \tag{3.1}$$
para todo $1 \leq j \leq n_i$

2. *A densidade dos tempos hiperbólicos é limitada por baixo, i.e, existe* $d_0 = d_0(c) > 0$ *tal que*
$$\liminf_{n} \frac{\sharp\{i; 1 \leq n_i \leq n\}}{n} \geq d_0.$$

Demonstração. Pela definição de medida f-expansiva, existe H tal que $\mu(H) = 1$ e para todo $x \in H$ vale

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \| Df(f^j(x))^{-1} \| \leq -4c.$$

Portanto, se n é suficientemente grande, temos

$$\sum_{j=0}^{n-1} (-\log \| Df(f^j(x))^{-1} \|) \geq 3cn.$$

Consideremos os valores $A = \sup_{x \in M} (-\log \| Df(x)^{-1} \|)$, $c_2 = 3c$, $c_1 = 2c$ e $a_i = -\log \| Df^{(i-1)}(x) \|$. Com essas escolhas estamos nas condições do Lema 3.3. Assim, existem $l > \dfrac{c}{A-2c} n$ e inteiros $1 < n_1 < ... < n_l \leq n$ tais que

$$\sum_{j=n+1}^{n_i} \log \| Df(f^{(j-1)}(x))^{-1} \| \leq -2c(n_i - n),$$

com $0 \leq n < n_i$ e $i = 1, ..., l$.

Portanto,

$$\prod_{k=1}^{j} ||Df(f^{n_i-k}(x))^{-1}|| \leq e^{-2cj},$$

com $1 \leq j \leq n_i$ e $i = 1, ..., l$.

Para finalizar, seja $d_0 = \dfrac{c}{A-2c}$ e observe que $l = \sharp\{i : 1 \leq n_i \leq n\}$, donde concluímos que

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sharp\{i : 1 \leq n_i \leq n\} \geq d_0.$$

Isto encerra o resultado.

□

Lema 3.4. *Existe $\delta > 0$ dependendo apenas de f e c tal que dados n tempo hiperbólico de x e $1 \leq j \leq n$, o ramo inverso $f_{x,n}^{-j}$ de f^{-j} que envia $f^n(x)$ em $f^{n-j}(x)$ é definido sobre a bola de raio δ centrada em $f^n(x)$, e satisfaz*

$$d(f_{x,n}^{-j}(z), f_{x,n}^{-j}(w)) \leq e^{-\frac{c}{2}j} d(z,w), \forall z, w \in B_\delta(f^n(x)).$$

Demonstração. Vamos iniciar provando um resultado que vai nos auxiliar bastante. Considere a função $H(x) = \log \| Df(f^{-1}(x))^{-1} \|$. Observe que H é uniformemente contínua sobre M. Daí, dado o número $\dfrac{c}{2}$, existe $\delta > 0$, o qual escolhemos menor que ϵ_0 dado no Lema 2.1, satisfazendo

$$\| Df(f^{-1}(\eta))^{-1} \| \leq e^{\frac{c}{2}} \| Df(f^{-1}(\xi))^{-1} \|, \forall \eta, \xi \in M com\ d(\eta, \xi) < \delta. \quad (3.2)$$

Agora, usando o processo de indução provaremos o Lema. Seja $j = 1$. Para cada $y \in B_\delta(f^n(x))$ vale

$$\| Df(f^{-1}(y))^{-1} \| \leq e^{\frac{c}{2}} \| Df(f^{n-1}(x))^{-1} \| .$$

Visto que n é tempo hiperbólico de x, temos

$$\| Df(f^{-1}(y))^{-1} \| \leq e^{-\frac{c}{2}}.$$

Sejam $z, w \in B_\delta(f^n(x))$ e γ uma curva minimizante ligando z à w em $B_\delta(f^n(x))$. Vale,

$$d(f_{x,n}^{-1}(z), f_{x,n}^{-1}(w)) \leq \int_0^1 \| (f^{-1} \circ \gamma(t))' \| \, dt \leq \int_0^1 \| Df(f^{-1}(\gamma(t)))^{-1} \| \| \gamma'(t) \| \, dt$$

$$\leq e^{-\frac{c}{2}} d(z, w).$$

Suponha então que para $j > 1$ vale

(i) $\displaystyle\prod_{k=1}^{j} \| Df(f^{-k}(y))^{-1} \| \leq e^{\frac{c}{2}j} \prod_{k=1}^{j} \| Df(f^{n-k}(x))^{-1} \|, \forall y \in B_\delta(f^n(x)).$

(ii) $d(f_{x,n}^{-j}(z), f_{x,n}^{-j}(w)) \leq e^{-\frac{c}{2}j} d(z, w), \forall z, w \in B_\delta(f^n(x)).$

Devido ao item (ii) é da hipótese de indução, é valido que

$$d(f_{x,n}^{-j}(y), f_{x,n}^{n-j}(x)) \leq e^{-\frac{c}{2}j} d(y, f^n(x)) < \delta, \forall y \in B_\delta(f^n(x)).$$

Daí, pela estimativa em (3.2), vale

$$\| Df(f^{-(j+1)}(y))^{-1} \| \leq e^{\frac{c}{2}} \| Df(f^{n-(j+1)}(x))^{-1} \| .$$

Segui-se então que

$$\prod_{k=1}^{j+1} \| Df(f^{-k}(y))^{-1} \| \leq e^{\frac{c}{2}(j+1)} \prod_{k=1}^{j} \| Df(f^{n-k}(x))^{-1} \| \leq e^{-\frac{c}{2}(j+1)},$$

onde usamos que n é tempo hiperbólico de x.

Devido ao item (i) do Lema 2.1, o ramo inverso $f_{x,n}^{-j}$ está bem definido na bola de raio δ centrada em $f^n(x)$. Considere a curva γ minimizante, em $B_\delta(f^n(x))$, ligando z à w.

$$d(f_{x,n}^{-(j+1)}(z), f_{x,n}^{-(j+1)}(w)) \leq \int_0^1 \| Df^{-(j+1)}(\gamma(t)) \| \| \gamma'(t) \| \, dt \leq e^{-\frac{c}{2}(j+1)} d(z, w).$$

Portanto o Lema esta provado.

$\square$

3.2 Existência de Estados de Equilíbrio para transformações tipo 1

Definição 3.5. *Dado $\epsilon > 0$, definimos o conjunto*

$$A_\epsilon(x) := \{y \in M; d(f^n(x), f^n(y)) \leq \epsilon \text{ } para \text{ } n \geq 0\}.$$

Lema 3.5. *Se $\mu \in \mathcal{K}$ e δ é dado pelo Lema 3.4, então para μ-q.t.p e $\epsilon < \delta$ vale*

$$A_\epsilon(x) = \{x\}.$$

Demonstração. Pelo Corolário 3.1, existe $H \subset M$ com medida total tal que todo $x \in H$ possuem infinitos tempos hiperbólicos $n_i(x)$. Pelo Lema 3.4, se $z \in A_\epsilon(x)$ com $\epsilon < \delta$, então

$$d(x, z) \leq e^{(-c/2)n_i} d(f^{n_i}(x), f^{n_i}(y)) \leq e^{(-c/2)n_i}\epsilon.$$

Como x possui infinitos tempos hiperbólicos, podemos fazer eles tenderem ao infinito e concluir que $x = z$.

$\square$

Seja $\delta > 0$ dado no Lema 3.4.

Corolário 3.2. *Se $\mathcal{P}$ é partição de M tal que*

$$diam(\mathcal{P}) < \delta,$$

então $\mathcal{P}$ é f-geradora com respeito a qualquer medida pertencente a $\mathcal{K}$.

Demonstração. Consideremos

$$\mathcal{P}^n = \{C^{(n)} = P_{i_0} \cap f^{-1}(P_{i_1}) \cap ... \cap f^{-(n-1)}(P_{i_{n-1}})\}.$$

Seja $\mathcal{P}^n(x)$ os elementos de $\mathcal{P}^n$ que contém x. Usando o Lema 3.5 podemos garantir que $\lim_{n\to\infty} diam \text{ } \mathcal{P}^n(x) = 0$.

Agora, dados A mensurável e $\epsilon > 0$, considere $K_1 \subset A$ e $K_2 \subset A^c$ conjuntos compactos tais que $\mu(K_1 \Delta A) < \dfrac{\epsilon}{4}$ e $\mu(K_2 \Delta A^c) < \dfrac{\epsilon}{4}$. Seja $r := dist(K_1, K_2)$. Escolha n suficientemente grande de forma que para todo x em um conjunto com medida maior que $1 - \dfrac{\epsilon}{4}$ vale

$$diam\mathcal{P}^{(n)}(x) < \frac{r}{2}.$$

Sejam $C_1^{(n)}, ..., C_m^{(n)}$ em $\mathcal{P}^{(n)}$ tais que intersectem K_1. Observe que os $C_i^{(n)}$'s são disjuntos de K_2. Portanto,

$$\mu(A\Delta \bigcup_{i=1}^{m} C_i^{(n)}) \leq \mu(A \setminus K_1) + \mu(A^c \setminus K_2) + \frac{\epsilon}{4} < \epsilon.$$

Isto completa a prova.

□

Corolário 3.3. *Para toda $\mu \in \mathcal{K}$ e $\mathcal{P}$ partição com diâmetro menor que δ vale*

$$h_\mu(f) = h_\mu(f, \mathcal{P}).$$

Demonstração. Decorre diretamente do Corolário 3.2 e do Teorema de Kolmogorov-Sinai.

□

Lema 3.6. *Se η é uma medida ergódica e não pertencente a $\mathcal{K}$, então existe $\rho < 1$, independente de η, tal que*

$$h_\eta(f) \leq \rho h_{top}(f).$$

Demonstração. Como η é ergódica e pertence a $\mathcal{K}$ então $\eta(V) > \alpha$. Sejam $\lambda_1(x) \geq ... \geq \lambda_s(x) \geq 0 > \lambda_{s+1}(x) \geq ... \geq \lambda_l(x)$ os expoentes de Lyapunov em x. Pelo Teorema de Oseledets,

$$\int \log |\det Df(x)| d\eta(x) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x)$$

e $l(x), \lambda_1(x), ..., \lambda_l(x)$ são constantes em η-q.t.p.

Afirmação: $\lambda_l \geq -\log(1 + \delta_0)$.

Prova. Para todo $v \in E_l(x)$ e $|v| = 1$ vale

$$\lambda_l = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log ||Df^n(x)v|| \geq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log ||Df^n(x)^{-1}||^{-1}. \quad (3.3)$$

Usando a regra da cadeia temos

$$Df^n(x)^{-1} = \left(\prod_{i=0}^{n-1} Df(f^i(x))\right)^{-1} = \prod_{j=0}^{n-1} Df(f^{n-j}(x))^{-1}.$$

Substituindo em (3.3) temos

$$\lambda_l \geq -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log||\prod_{j=0}^{n-1}Df(f^{n-j}(x))^{-1}|| \geq -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\prod_{j=0}^{n-1}||Df(f^{n-j}(x))^{-1}||.$$

Usando que $||Df(x)^{-1}|| \leq (1+\delta_0)$ temos

$$\lambda_l \geq -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\log(1+\delta_0) = -\log(1+\delta_0).$$

Vamos terminar a demonstração do Teorema. Sabemos pela desigualdade de Ruelle que

$$h_\eta(f) \leq \sum_{i=1}^{s}\lambda_i = \int \log|\det Df(x)|d\eta(x) - \sum_{i=s+1}^{l}\lambda_i.$$

Como $\eta(V) > \alpha$ e por $H3$ vale $m_2 < M_2$. Logo

$$h_\eta(f) \leq \int \log|\det Df(x)|d\eta(x) - \sum_{i=s+1}^{l}\lambda_i \leq \eta(V)m_2 + \eta(V^c)M_2 + (l-s)\log(1+\delta_0)$$

$$\leq \eta(V)m_2 + (1-\eta(V))M_2 + (l-s)\log(1+\delta_0) \leq \eta(V)m_2 + (1-\eta(V))M_2 + l\log(1+\delta_0)$$

Afirmação. $\eta(V)m_2 + (1-\eta(V))M_2 < \alpha m_2 + (1-\alpha)M_2$.

Com efeito, basta observar que a desigualdade é equivalente ao produto $(\alpha - \eta(V))(m_2 - M_2) > 0$.

Daí temos que:

$$h_\eta(f) < \alpha m_2 + (1-\alpha)M_2 + l\log(1+\delta_0). \tag{3.4}$$

Seja μ_0 uma medida ergódica, absolutamente contínua com respeito a *Leb*, f-invariante construída no Teorema 4.3 (ver Apêndice).

Como *Lebesgue* quase todo ponto passa no máximo uma fração de tempo γ_0 em $B_{p+1} \cup ... B_{p+q} \supset W$, temos $\mu_0(W) \leq \gamma_0$.

Usando que f é $C^{1,\kappa}$ e μ_0 é absolutamente contínua com respeito a *Leb* temos pela fórmula de Pesin que

$$h_{\mu_0}(f) = \int \log|\det Df(x)|d\mu_0(x) - \sum_{i=s+1}^{l}\lambda_i \geq \mu_0(W) + (1-\mu_o(W))M_1.$$

Usando que $\mu_o(W) \leq \gamma_0$ e $m_1 \leq M_1$ vale

$$\mu_0(W)m_1 + (1-\mu_0(W))M_1 \geq \gamma_0 m_1 + (1-\gamma_0)M_1.$$

Daí,

$$h_{\mu_0}(f) \geq \gamma_0 m_1 + (1-\gamma_0)M_1.$$

Ajustando os valores de α, β e δ_0 podemos garantir que

$$\alpha m_2 + (1-\alpha)M_2 < \gamma_0 m_1 + (1-\gamma_0)M_1 - l\log(1+\delta_0),$$

e assim podemos obter $\rho < 1$ tal que

$$\alpha m_2 + (1-\alpha)M_2 + l\log(1+\delta_0) \leq \rho(\gamma_0 m_1 + (1-\gamma_0)M_1).$$

Portanto concluímos que:

$$h_\eta(f) \leq \rho(\gamma_0 m_1 + (1-\gamma_0)M_1) \leq \rho h_{\mu_0}(f) \leq \rho h_{top}(f).$$

□

Corolário 3.4 (Princípio Variacional para medidas expansivas). *Se φ é uma função contínua com ρ-variação, então*

$$P(\varphi) = \sup_{\nu\in\mathcal{K}} \left\{ h_\nu(f) + \int \varphi d\nu \right\}.$$

Em particular,

$$h_{top}(f) = \sup_{\nu\in\mathcal{K}} h_\nu(f).$$

Demonstração. Denotemos por E o conjunto de probabilidades invariantes e ergódicas. Vamos provar que

$$\sup_{\nu\in\mathcal{K}} \left\{ h_\nu(f) + \int \varphi d\nu \right\} = \sup_{\nu\in E} \left\{ h_\nu(f) + \int \varphi d\nu \right\}, \tag{3.5}$$

pois

$$P(\varphi) = \sup_{\nu\in E} \left\{ h_\nu(f) + \int \varphi d\nu \right\}.$$

Para provar (3.5), observe que se $\nu \in \mathcal{K}^c$ vale pelo Lema 3.6 que

$$h_\nu(f) + \int \varphi d\nu \leq \rho h_{top}(f) + \max_{x\in M} \varphi(x).$$

Sendo válido para toda a ν, temos que

$$\sup_{\nu\in\mathcal{K}^c} \left\{ h_\nu(f) + \int \varphi d\nu \right\} \leq \rho h_{top}(f) + \max_{x\in M} \varphi(x) < P(\varphi).$$

□

Demonstração do Teorema 3.1. Devido ao Corolário 3.4 vale que

$$\sup_{\nu\in\mathcal{K}}\left\{h_\nu(f)+\int\varphi d\nu\right\}=P(\varphi).$$

Então, consideremos uma sequência $\{\mu_n\}$ realizando o supremo. Sem perda de generalidade podemos assumir que $\mu_n \to \mu$, na topologia fraca*. Afirmamos que μ é um estado de equilíbrio e pertence a $\mathcal{K}$.

Com efeito, fixe uma partição $\mathcal{P}$ com diâmetro menor que δ (dado no Lema 3.4), tal que $\mu(\partial P)=0$ para todo $P\in\mathcal{P}$. Sendo μ_n elemento de $\mathcal{K}$, vale pelo Corolário 3.3 que $h_{\mu_n}(f)=h_{\mu_n}(f,\mathcal{P})$.

Daí,

$$\begin{aligned}P(\varphi)&=\limsup_{n\to\infty}\left\{h_{\mu_n}(f)+\int\varphi d\mu_n\right\}=\limsup_{n\to\infty}\left\{h_{\mu_n}(f,\mathcal{P})+\int\varphi d\mu_n\right\}\\&\leq h_\mu(f,\mathcal{P})+\int\varphi d\mu\leq h_\mu(f)+\int\varphi d\mu\leq P(\varphi).\end{aligned}$$

onde usamos a semi-continuidade da aplicação $\nu\longmapsto h_\nu(f,\mathcal{P})$ na primeira desigualdade.

Donde,

$$P(\varphi)=h_\mu(f)+\int\varphi d\mu.$$

Vamos provar agora que se η é tal que $P(\varphi)=h_\eta(f)+\int\varphi d\eta$, então $\eta\in\mathcal{K}$.

De fato, usando o Teorema da Decomposição Ergódica, definamos o conjunto $\Omega=\{x\in M : \eta_x\in\mathcal{K}_\alpha\}$. Precisamos mostrar que $\eta(\Omega)=1$. Suponha, por absurdo, que $\eta(\Omega^c)>0$ e seja $y\in\Omega^c$. Então, pela demonstração do Corolário 3.4, vale

$$h_{\eta_y}(f)+\int\varphi d\eta_y<P(\varphi).$$

Usando o fato que

$$h_\eta(f)=\int h_{\eta_x}(f)d\eta(x)$$

(ver [Ke98], página 75), temos que

$$h_\eta(f)+\int\varphi d\eta=\int\left(h_{\eta_x}(f)+\int\varphi d\eta_x\right)d\eta(x).$$

Daí,

$$h_\eta(f)+\int\varphi d\eta<P(\varphi),$$

contradizendo o fato que η satisfaz a igualdade.

Portanto $\eta(\Omega)=1$, i.e, $\eta\in\mathcal{K}$.

$\square$

3.3 Estados de Equilíbrio para transformações tipo 2

Vamos considerar durante toda essa seção um difeomorfismo local de classe C^1, $f : M \to M$, sobre uma variedade riemanniana compacta, conexa e d-dimensional.

Vamos denotar por p o grau da transformação f, i.e, o número $\sharp f^{-1}(x)$, o qual independe de x (ver Lema 2.1).

Definição 3.6. *Defina o número $C_k(f)$ como sendo o máximo sobre M da norma do k-ésimo produto exterior da diferencial de f, i.e,*

$$C_k(f) := \max_{x \in M} \parallel \Lambda^k Df(x) \parallel .$$

Uma transformação $f : M \to M$ é dita tipo 2 quando existe $\rho = \rho(f) < 1$ tal que

$$\max_{1 \leq k < d} \log C_k(f) \leq \rho \log p.$$

Definição 3.7. *Uma função contínua $\phi : M \to \mathbb{R}$ é dita uma função de ρ-variação baixa se vale*

$$\max_{x \in M} \phi(x) < P(\phi) - \rho \log p,$$

com $0 < \rho < 1$.

O resultado principal nesta seção é

Teorema 3.2 (—, Oliveira, Viana - 2005). *Se f é uma transformação tipo 2, então existe ao menos um estado de equilíbrio com respeito ao par (f, ϕ), para toda função ϕ de ρ-variação baixa ($\rho = \rho(f) > 0$).*

Vamos agora desenvolver alguns resultados que nos auxiliarão na prova do nosso resultado.

Iniciamos comentando um pouco sobre os argumento de Oseledets no seu trabalho [Os68]. Seja μ uma probabilidade f-invariante, então Oseledets provou a existência de um conjunto de μ medida total tal que para todo ponto x neste conjunto vale: existem um $k = k(x) \geq 1$, uma filtração

$$T_xM = F_x^1 \supset F_x^2 \supset ... \supset F_x^k \supset F_x^{k+1} = \{0\},$$

e números $\lambda_1(x) > ... > \lambda_k(x)$ tal que $Df(x)F_x^i = F_{f(x)}^i$ que satisfazem a seguinte propriedade

$$\lambda_i(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \| Df^n(x)v \|,$$

para todo $v \in F_x - F_x^{i+1}$, $i = 1, ..., k$.

Os números $\lambda_i(x)$ são conhecidos como expoentes de Lyapunov de f no ponto x. Abusando um pouco da notação, denotaremos os expoentes de Lyapunov de f no ponto x por $\lambda_1(x) \geq ... \geq \lambda_d(x)$, onde cada número é contado de acordo com sua multiplicidade.

Na literatura também existe os expoentes de Lyapunov da transformação f os quais são definidos por $\lambda_i := \int_M \lambda_i(x)\ d\mu$. No artigo [Os68] prova-se que se μ é ergódica então vale que $\lambda_i = \lambda_i(x)$ em μ-q.t.p.

Vamos comentar agora sobre a noção de k-produto exterior de uma aplicação linear entre espaços vetoriais (ver [Fl63], páginas 5 - 18). Para tanto vamos considerar V um espaço vetorial de dimensão finita . O k-ésimo produto exterior de V, $\Lambda^k V$, com $k \geq 1$, é por definição o conjunto gerado pelo produto vetorial $v_1 \wedge ... \wedge v_k$ de vetores $v_1, ..., v_k$ em V. Assumindo que V é dotado de um produto interno, podemos dotar o espaço vetorial $\Lambda^k V$ com um produto interno de tal maneira que $\| v_1 \wedge ... \wedge v_k \|$ é exatamente o volume do paralepípedo gerado por $v_1, ..., v_k$ em V. Consideremos agora uma aplicação linear $S : V \to V$. S induz de maneira natural uma aplicação linear $\Lambda^k S : \Lambda^k V \to \Lambda^k V$ tal que

$$\Lambda^k S(v_1, ..., v_k) = Sv_1 \wedge ... \wedge S_k.$$

Um fato bastante interessante na aplicação definida a partir de S é que seus autovalores são exatamente o produto de k autovalores distintos de S, onde os autovalores são contados de acordo com sua multiplicidade.

Da mesma forma que os autovalores, existe uma relação entre os expoentes de Lyapunov de $\Lambda^k S$ e de S. Mais precisamente, os expoentes de Lyapunov de $\Lambda^k S$ são soma de k distintos expoentes de Lyapunov de S.

Portanto, se f é uma transformação tipo 2, existe $\rho < 1$ tal que

$$\lambda_{i_1} + ... + \lambda_{i_k} \leq \log C_k(f) \leq \rho \log p,$$

para todo conjunto de índices $1 \leq i_1 < ... < i_k < d$.

Vamos agora definir um subconjunto de probabilidades f-invariantes nos quais vamos garantir que lá podemos encontrar estados de equilíbrio.

Para tanto vamos fazer uso do Teorema da Decomposição Ergódica (ver [Ke98]) e do número $c(f) := \rho \log p - \max_{1 \leq k < d} \log C_k(f)$.

Definição 3.8. *Definimos o conjunto*

$$\mathcal{K} := \{\mu \in \mathcal{I} : \mu_x \textit{ tem todos expoentes de Lyapunov} \geq 8c, \textit{ para } \mu - q.t.p\},$$

onde $c = \dfrac{1}{8} c(f)$.

Lema 3.7. *Fixada μ ergódica em $\mathcal{K}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que f^N tem densidade positiva de tempos hiperbólicos para μ-q.t.p.*

Demonstração. Pela definição de $\mathcal{K}$ garantimos que para quase todo ponto x existe $n_0(x) \geq 1$ tal que

$$\| Df^n(x) w \| \geq e^{6cn} \| w \|,$$

para todo $w \in T_x M$ e todo $n \geq n_0(x)$, i.e,

$$\| Df^n(x)^{-1} \| \leq e^{-6cn},$$

para todo $n \geq n_0(x)$.

Consideremos a sequência $\alpha_n := \mu(\{x \in M : n < n_0(x)\})$. Observe que a sequência converge a zero quando n tende ao infinito. Visto que f é um difeomorfismo local, existe $K > 0$, tal que $\| Df(x)^{-1} \| \leq K$, para todo $x \in M$. Vejamos os seguintes cálculos

$$\begin{aligned}\int_M \log \| Df^n(x)^{-1} \| \ d\mu &= \int_{\{x:n<n_0(x)\}} \log \| Df^n(x)^{-1} \| \ d\mu + \int_{\{x:n \geq n_0(x)\}} \log \| Df^n(x)^{-1} \| \ d\mu \\ &\leq -6cn + n\alpha_n \log K,\end{aligned}$$

pois $\| Df^n(x)^{-1} \| \leq \prod_{j=0}^{n-1} \| Df(f^j(x))^{-1} \| \leq K^n$. Daí, se N é suficientemente grande vale

$$\int_M \log \| Df^N(x)^{-1} \| \ d\mu \leq -4c.$$

Usando que μ é ergódica temos que

$$\limsup_{n} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log ||Df^N(f^{jN}(x))^{-1}|| = \int_M \log \| Df^N(x)^{-1} \| \leq -4c < 0.$$

Usando o Corolário 3.1 item 2 finalizamos o resultado.

$\square$

3.4 Existência de Estados de Equilíbrio para transformações tipo 2

Provaremos agora o resultado que garante que toda medida μ em $\mathcal{K}$ possui uma partição geradora comum.

Lema 3.8. *Seja μ pertence a $\mathcal{K}$. Se $\mathcal{U}$ é uma partição com diâmetro menor que δ (ver Lema 3.4), então para μ quase todo x em M vale $\lim_{n\to\infty} diam\, \mathcal{U}^{(n)}(x) = 0$. Em particular, $\mathcal{U}$ é uma partição f-geradora com respeito à μ.*

Demonstração. Pelo Lema 3.7 garantimos um $N \geq 1$ tal que f^N tem densidade positiva de tempos hiperbólicos para μ-q.t.p.

Definamos

$$\mathcal{V}^{(k)} := \bigvee_{j=0}^{k-1} f^{-jN}(\mathcal{U}), k \geq 1.$$

Pelo Lema 3.4, se k é tempo hiperbólico para f^N, então $diam\mathcal{V}^{(k)}(x) \leq e^{-\frac{c}{2}kN}$. Daí, $diam\mathcal{V}^{(k)}(x)$ é decrescente e converge a zero. Visto que vale $\mathcal{U}^{(kN)}(x) \subset \mathcal{V}^{(k)}(x)$, para todo k, e o diâmetro de $\mathcal{U}^{(n)}(x)$ é decrescente em n, então $\lim_{n\to\infty} diam\, \mathcal{U}^{(n)}(x) = 0$, para μ quase todo x em M.

A demonstração de ser f-geradora é idêntica a demonstração do Corolário 3.2.

$\square$

Corolário 3.5. *Para toda μ em $\mathcal{K}$ e $\mathcal{U}$ partição com diâmetro menor que δ vale*

$$h_\mu(f) = h_\mu(f, \mathcal{U}).$$

Demonstração. Basta aplicar o Lema 3.8 e o Teorema de Kolmogorov-Sinai.

$\square$

O próximo resultado garante que medidas ergódicas não pertencentes a $\mathcal{K}$ tem entropia "pequena".

Lema 3.9. *Se $\mu \in \mathcal{K}^c$ e é ergódica, então $h_\mu(f) \leq \rho \log p$.*

Demonstração. Pela definição de $\mathcal{K}$ temos que $\lambda_d < c < c(f)$. Usando que f é do tipo 2 temos que

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \leq \log C_k(f),$$

para $1 \leq k < d$.

Usando a desigualdade de Ruelle temos

$$h_\mu(f) \leq \int_M \sum_{i:\lambda_i>0} \lambda_i \, d\mu \leq c(f) + \max_{1\leq k<d} \log C_k(f) = \rho \log p.$$

□

O resultado seguinte garante que na busca por estados de equilíbrio podemos nos restringir ao conjunto $\mathcal{K}$ definido anteriormente.

Corolário 3.6 (Princípio Variacional em $\mathcal{K}$). *Se $\phi : M \to \mathbb{R}$ tem ρ-variação baixa, então*

$$P(\phi) = \sup_{\mu\in\mathcal{K}} P_\phi(\mu).$$

Em particular,

$$h_{top}(f) = \sup_{\mu\in\mathcal{K}} h_\mu(f).$$

Demonstração. Denotemos por E o conjunto de probabilidades invariantes e ergódicas. Vamos provar que

$$\sup_{\nu\in\mathcal{K}} \left\{ h_\nu(f) + \int \phi d\nu \right\} = \sup_{\nu\in E} \left\{ h_\nu(f) + \int \phi d\nu \right\}, \tag{3.6}$$

pois

$$P(\phi) = \sup_{\nu\in E} \left\{ h_\nu(f) + \int \phi d\nu \right\}.$$

Para provar (3.6), observe que se $\nu \in \mathcal{K}^c$ vale pelo Lema 3.9 que

$$h_\nu(f) + \int \phi d\nu \leq \rho \log p + \max_{x\in M} \phi(x).$$

Sendo válido para toda à ν, temos que

$$\sup_{\nu\in\mathcal{K}^c}\left\{h_\nu(f)+\int\phi d\nu\right\}\le\rho\log p+\max_{x\in M}\phi(x)<P(\phi).$$

$\square$

Demonstração do Teorema 3.2. Devido ao Corolário 3.6 vale que

$$\sup_{\nu\in\mathcal{K}}\left\{h_\nu(f)+\int\phi d\nu\right\}=P(\phi).$$

Então, consideremos uma sequência $\{\mu_n\}$ realizando o supremo. Sem perda de generalidade podemos assumir que $\mu_n\to\mu$, na topologia fraca*. Afirmamos que μ é um estado de equilíbrio e pertence a $\mathcal{K}$.

Com efeito, fixe uma partição $\mathcal{U}$ com diâmetro menor que δ (dado no Lema 3.4), tal que $\mu(\partial U)=0$ para todo $U\in\mathcal{U}$. Sendo μ_n elemento de $\mathcal{K}$, vale pelo Corolário 3.5 que $h_{\mu_n}(f)=h_{\mu_n}(f,\mathcal{U})$.

Daí,

$$\begin{aligned}P(\phi)&=\limsup_{n\to\infty}\left\{h_{\mu_n}(f)+\int\phi d\mu_n\right\}=\limsup_{n\to\infty}\left\{h_{\mu_n}(f,\mathcal{U})+\int\phi d\mu_n\right\}\\&\le h_\mu(f,\mathcal{U})+\int\phi d\mu\le h_\mu(f)+\int\phi d\mu\le P(\phi),\end{aligned}$$

onde usamos a semi-continuidade da aplicação $\nu\longmapsto h_\nu(f,\mathcal{U})$.

Portanto,

$$P(\phi)=h_\mu(f)+\int\phi d\mu.$$

Vamos provar agora que se η é tal que $P(\phi)=h_\eta(f)+\int\phi d\eta$, então $\eta\in\mathcal{K}$.

De fato, usando o Teorema da Decomposição Ergódica, definamos o conjunto $\Omega=\{x\in M:\eta_x\in\mathcal{K}\}$. Precisamos mostrar que $\eta(\Omega)=1$. Suponha, por absurdo, que $\eta(\Omega^c)>0$ e seja $y\in\Omega^c$. Então, pelo Corolário 3.6, vale

$$h_{\eta_y}(f)+\int\phi d\eta_y<P(\phi).$$

Usando o fato que

$$h_\eta(f)=\int h_{\eta_x}(f)d\eta(x)$$

(ver [Ke98], página 75), temos que

$$h_\eta(f)+\int\phi d\eta=\int\left(h_{\eta_x}(f)+\int\phi d\eta_x\right)d\eta(x).$$

Daí,

$$h_\eta(f) + \int \phi d\eta < P(\phi),$$

contradizendo o fato que η satisfaz a igualdade.

Portanto $\eta(\Omega) = 1$, i.e, $\eta \in \mathcal{K}$.

$\square$

Capítulo 4

Apêndice

Vamos aqui estabelecer resultados que nos possibilitem provar a existência de medidas f - invariantes, ergódica, absolutamente contínuas com respeito a Lebesgue e finitas.

4.1 Aplicação de 1º Tempo Hiperbólico

O resultado seguinte nos mostra o caminho para a existência de tempos hiperbólicos para Lebesgue quase todo ponto em M.

Teorema 4.1. *Dado um número real σ_1 e inteiros $p, q \geq 1$ com $\sigma_1 > q$, então existe $\varsigma_0 > 0$ tal que vale o seguinte: Se M é uma variedade com volume finito, $f : M \to M$ é uma aplicação de classe C^1, e $\{B_1, ..., B_p, B_{p+1}, ..., B_{p+q}\}$ é uma cobertura de M por conjuntos mensuráveis tal que*

1. *$|detDf(x)| \geq \sigma_1$ para todo $x \in B_{p+1} \cup ... \cup B_{p+q}$;*
2. *$f|_{B_i}$ é injetiva para todo $i = 1, 2, ..., p + q$.*

Então, quase todo ponto $x \in M$ satisfaz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sharp\{0 \leq j < n : f^j(x) \in B_1 \cup ... \cup B_p\} \geq \varsigma_0$$

Demonstração. Fixe $n \in \mathbb{N}$. Dado $\underline{i} = (i_0, ..., i_{n-1}) \in \{1, ..., p, ..., p + q\}^n$, denote

$$[\underline{i}] = B_{i_0} \cap f^{-1}(B_{i_1}) \cap ... \cap f^{-n+1}(B_{i_{n-1}}).$$

Defina $g_n(\underline{i}) = \sharp\{0 \leq j \leq n-1 : i_j \leq p\}$. Uma simples contagem nos dá que

$$\sharp\{\underline{i} : g_n(\underline{i}) < \varsigma_0 n\} \leq \sum_{k<\varsigma_0 n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \leq p^{\varsigma_0 n} q^n \sum_{k\leq\varsigma_0 n} \binom{n}{k}.$$

Utilizando uma aplicação da fórmula de Stirling (ver [BV00] ou [BDV05]), obtemos $\gamma > 0$ tal que

$$\sum_{k \leq \varsigma_0 n} \binom{n}{k} \leq e^{\gamma n}$$

onde $\varsigma_0 \to 0$ implica $\gamma \to 0$.

Portanto

$$\sharp\{\underline{i} : g_n(\underline{i}) < \varsigma_0 n\} \leq e^{\gamma n} p^{\varsigma_0 n} q^n.$$

Vamos estimar agora a medida de Lebesgue de $[\underline{i}]$:

$$Leb([\underline{i}]) = \int_M \chi_{B_{i_0}} \cdot \chi_{f^{-1}(B_{i_1})} \cdot \ldots \cdot \chi_{f^{-n+1}(B_{i_{n-1}})} d(Leb) \leq \int_M \prod_{i_j \geq p+1} \chi_{f^{-i_j}(B_{i_j})} d(Leb)$$

$$\leq \int_M \prod_{i_j \geq p+1} |detDf(x)|^{-1} d(Leb) \leq \sigma_1^{-(1-\varsigma_0)n} Leb(M).$$

Seja $I_n = \displaystyle\bigcup_{g_n(\underline{i}) < \varsigma_0 n} [\underline{i}]$. Vamos estimar a medida de Lebesgue de I_n:

$$Leb(I_n) \leq \sum_{g_n(\underline{i}) < \varsigma_0 n} Leb([\underline{i}]) \leq Leb(M) \sigma_1^{-(1-\varsigma_0)n} \cdot \sharp\{\underline{i} : g_n(\underline{i}) < \varsigma_0 n\}$$

$$\leq Leb(M)(\sigma_1^{-(1-\epsilon_0)} e^{\gamma} p^{\varsigma_0} q)^n.$$

Por hipótese $q < \sigma_1$, logo podemos fixar $\varsigma_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que $e^{\gamma} p^{\varsigma_0} q < \sigma_1^{1-\varsigma_0}$. De fato, quando $\varsigma_0 \to 0$ então $\sigma_1^{\varsigma_0} e^{\gamma} p^{\varsigma_0} q \to q$ e também vale $\sigma_1^{\varsigma_0} e^{\gamma} p^{\varsigma_0} q > q$. Daí existe $\varsigma_0 > 0$ tal que vale o afirmado.

Concluímos assim que a medida de Lebesgue de I_n vai a zero exponencialmente rápido. Pelo Teorema de Borel-Cantelli (ver [Fer02]), Lebesgue quase todo ponto $x \in M$ pertence a um número finito de I_n's. Pela definição dos I_n's concluímos o resultado.

□

O próximo resultado é o que garante a existência de infinitos tempos hiperbólicos para Leb quase todo ponto na variedade M, e assim teremos a possibilidade de construir a aplicação de primeiro tempo hiperbólico a que nos permitirá construir as medidas que tanto almejamos.

Corolário 4.1. *Nas condições do Teorema anterior, Leb-q.t.p possui infinitos tempos hiperbólicos e além disso vale que* $\int_M n_1(x)d(Leb)(x)$ *é finita, onde* $n_1(x)$ *exatamente o primeiro tempo hiperbólico de* x.

Demonstração. Consideremos o conjunto

$$I_n = \bigcup\{[\underline{i}] : \sharp\{0 \leq j < n; i_j > p\} > \gamma_0 n\},$$

onde $[\underline{i}] = B_{i_0} \cap f^{-1}(B_{i_1}) \cap ... \cap f^{-n+1}(B_{n-1})$ e $\gamma_0 = 1 - \varsigma_0$. Obtemos anteriormente, no fim da demonstração do Teorema 4.1, que $Leb(I_n)$ decresce exponencialmente rápido a zero.

Dado $x \in I_n^c$, consideremos

$$a_k = \log \| \ Df(f^k(x))^{-1} \| .$$

Temos que

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} a_j \leq \frac{1}{n}\left(log(1+\delta_0)^{\gamma_0 n}(1+\delta_1)^{-(1-\gamma_0)n}\right) \leq \frac{1}{n}\left(log(1+\delta_0)^{\alpha n}(1+\delta_1)^{-(1-\alpha)n}\right)$$

$$\leq log(1+\delta_0)(1+\delta_1)^{-(1-\alpha)} \leq -4c.$$

Consideremos os valores, $A = \sup_{y \in M} -\log \| \ Df(y)^{-1} \|$, $c_2 = 3c$ e $c_1 = 2c$. Observem que estamos nas condições do Lema 3.3. Portanto garantimos que existem inteiros $1 < n_1 < ... < n_l \leq n$, com $l > \dfrac{c}{A-2c}n$, tal que para $0 \leq k \leq n_i$, $i = 1, ..., l$, vale

$$\sum_{j=k+1}^{n_i} a_j \leq -2c(n_i - k).$$

Portanto x possui infinitos tempos hiperbólicos. Como a união dos I_n^c's tem Lebesgue medida total, temos que *Leb*-q.t.p possui infinitos tempos hiperbólicos.

Agora, consideremos os conjuntos

$$H_k := \{x \in M : k \text{ é o primeiro tempo hiperbólico}\} \text{ e } L_n := \bigcup_{k \geq n} H_k.$$

Pelos cálculos anteriores conclui-se que $I_n^c \subset L_n^c$, i.e, $L_n \subset I_n$, para n suficientemente grande. Daí, $Leb(L_n)$ decresce exponencialmente rápido, em outras palavras, existem $K > 0$ e $d > 0$ tal que

$$Leb(L_n) \leq Ke^{-dn}, \forall n > n_0.$$

Finalmente,

$$\int_M n_1(x)d(Leb)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nLeb(H_n) = \sum_{n=1}^{\infty} Leb(L_n) \leq Cte < \infty.$$

$\square$

Lema 4.1. *Se $f : M \to M$ é uma aplicação $C^{1,\kappa}$, então $\psi : M \to \mathbb{R}$ definida por $\psi(x) = -\log|\det Df(x)|$ é uma função $C^{0,\kappa}$.*

Demonstração. Visto que M é compacta e $-\log|\det|$ é localmente Lipschitz, concluí-se que $-\log|\det|$ é Lipschitz sobre $Df(M)$. Donde, usando que $Df \in C^{0,\kappa}$, temos

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq C \parallel Df(x) - Df(y) \parallel \leq Cd(x,y)^{\kappa},$$

para todo $x, y \in M$.

$\square$

Definição 4.1. *Os conjuntos $V_n(x) = f_{x,n}^{-n}(B_\delta(f^n(x)))$, para $x \in M$, são chamados de pré-bolas hiperbólicas.*

Teorema 4.2. *Para todo $z, y \in V_n(x)$, vale*

$$C^{-1} \leq \frac{|detDf^n(z)|}{|detDf^n(y)|} \leq C.$$

Demonstração. Vamos fazer os seguintes cálculos:

$$\log \frac{|detDf^n(z)|}{|detDf^n(y)|} = \sum_{i=0}^{n-1} \big(\log|detDf(f^i(z))| - \log|detDf(f^i(y))|\big)$$

$$\leq C \sum_{i=0}^{n-1} d(f^i(z), f^i(y))^{\kappa} \leq C \left(\sum_{i=0}^{n-1} e^{\frac{-ckj}{2}} \right) d(f^n(z), f^n(y))^{\kappa} = \frac{C}{1 - e^{\frac{-ck}{2}}} (diam(M))^{\kappa} =: B,$$

onde usamos o Lema 3.4 na segunda desigualdade.

Consideremos $C = e^B$, então

$$\frac{|detDf^n(z)|}{|detDf^n(y)|} \leq C.$$

Para obter a desigualdade inferior basta trocar os papéis de z e y.

$\square$

Relembre que obtemos no Corolário 4.2 um conjunto de medida de Lebesgue total o qual todos elementos possuem infinitos tempos hiperbólicos, denotemos esse conjunto por H. Defina, a aplicação induzida pelo tempo hiperbólico, $F : H \to H$ por

$$F(x) := f^{n_1(x)}(x) = f^n(x), \text{ se } x \in H_n.$$

Observação: F é injetiva sobre as pré-bolas hiperbólicas $V_{n_1(.)}(.)$. Mais geralmente, dado $k \geq 1$ e $x \in H$ existe pré-bola hiperbólica na qual F^k é injetiva.

Com essas notações, estamos aptos a provar o seguinte resultado

Lema 4.2. *Existe $K_1 > 0$ dependendo apenas de f, tal que para todo $k \geq 1$, todo ramo inverso F_x^{-k} e todo A, B no domínio de F_x^{-k} vale*

$$K_1^{-1}\frac{Leb(A)}{Leb(B)} \leq \frac{Leb(F_x^{-k}(A))}{Leb(F_x^{-k}(B))} \leq K_1\frac{Leb(A)}{Leb(B)}. \tag{4.1}$$

Demonstração. Seja $G = F_x^{-k}$. Pela definição de Jacobiano, temos

$$\frac{Leb(A)}{Leb(B)} \leq \frac{\int_{G(A)} |detDf^{nk}(x)|d(Leb)}{\int_{G(B)} |detDf^{nk}(x)|d(Leb)}$$

Pelo Teorema 4.2 vale

$$\frac{Leb(A)}{Leb(B)} \leq C^2\frac{Leb(F_x^{-k}(A))}{Leb(F_x^{-k}(B))}.$$

Basta tomar $K_1 = C^2$ para encerrar o resultado.

□

4.2 Existência de Medidas em $\mathcal{K}_\alpha$

Vamos agora utilizar os resultados provados anteriormente para construir uma medida que pertença ao conjunto $\mathcal{K}_\alpha$.

Lema 4.3. *Todo ponto de acumulação da sequência*

$$\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} F_*^j(Leb) \tag{4.2}$$

é uma medida F-invariante e absolutamente contínua com respeito a Lebesgue.

Demonstração. Seja μ_F um ponto de acumulação da sequência (4.2). Seja $u \in C^0(M)$, vale

$$\int (u \circ F) d\mu_n = \int u d\mu_n + \frac{1}{n}\left(\int (u \circ F^n) d(Leb) - \int u d(Leb)\right).$$

Visto que $\| u \|_\infty < \infty$, então

$$\int (u \circ F) d\mu_F = \int u d\mu_F.$$

Portanto μ_F é F-invariante.

Dados A um conjunto com diâmetro menor do que δ e B uma bola de raio $\frac{\delta}{4}$, onde δ é dado no Lema 3.4, vale pela estimativa (4.1) que

$$\frac{Leb(F_x^{-k}(A))}{Leb(F_x^{-k}(B))} \leq K_1 \frac{Leb(A)}{Leb(B)}.$$

Somando sobre todos os ramos inversos de F^{-1} obtemos

$$\frac{Leb(F^{-k}(A))}{Leb(F^{-k}(B))} \leq K_1 \frac{Leb(A)}{Leb(B)}.$$

Seja $W := \inf\{Leb(B) : B \textit{ é bola de raio } \frac{\delta}{4}\} > 0$. Então,

$$Leb(F^{-k}(A)) \leq K_2 Leb(A),$$

com $K_2 = K_1 W^{-1}$.

Decorre desta última desigualdade que μ_F é absolutamente contínua com respeito a Lebesgue.

$\square$

Relembremos que H_k é o conjunto dos pontos que possuem k como primeiro tempo hiperbólico e $H_0 = M$. Defina a medida

$$\mu_f(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu_F(f^{-n}(A) \cap H_i),$$

$A \subset M$ mensurável.

Lema 4.4. *A medida μ_f é f-invariante, finita e absolutamente contínua com respeito a Lebesgue.*

Demonstração. Seja $A \subset M$ mensurável

$$\mu_f(f^{-1}(A)) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu_F(f^{-(n+1)}(A) \cap H_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n}^{\infty} \mu_F(f^{-n}(A) \cap H_i)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu_F(f^{-n}(A) \cap H_i) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_F(f^{-n}(A) \cap H_n).$$

Devido ao Corolário 4.2, $\{H_i\}$ forma uma partição *mod* 0 de M. Daí,

$$\mu_F(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(A \cap H_i),$$

e usando a invariância de μ_F temos

$$\mu_F(A) = \mu_F(F^{-1}(A)) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(F^{-1}(A) \cap H_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(f^{-i}(A) \cap H_i).$$

Donde

$$\mu_f(f^{-1}(A)) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu_F(f^{-n}(A) \cap H_i) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_F(f^{-n}(A) \cap H_n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu_F(f^{-n}(A) \cap H_i) = \mu_f(A).$$

Vamos mostrar agora que μ_f é absolutamente contínua com respeito a Lebesgue.

Seja A tal que $Leb(A) = 0$. Então $Leb(f^{-k}(A)) = 0$, com efeito se ocorresse o contrário existiria $B \subset f^{-k}(A)$ satisfazendo $Leb(B) > 0$ e $f^k|_B$ é injetiva. Daí teríamos,

$$0 \geq Leb(A) \geq Leb(f^{-k}(B)) = \int_B |\det Df^k(x)| d(Leb) \geq \sigma_1^{-k} Leb(B) > 0.$$

Sendo assim, $\mu_F(f^{-k}(A)) = 0$, $\forall k \geq 0$, e isto implica que $\mu_f(A) = 0$. Donde segue-se o resultado.

Finalmente vamos provar que μ_f é finita.

Vejamos os seguintes cálculos simples

$$\mu_f(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu_F(f^{-n}(M) \cap H_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu_F(H_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(H_i) + \sum_{i=2}^{\infty} \mu_F(H_i) + ... + \sum_{i=n}^{\infty} \mu_F(H_i) + ...$$

$$= \mu_F(H_1) + 2\mu_F(H_2) + ... + n\mu_F(H_n) + ...$$

$$\leq K_2 Leb(H_1) + 2Leb(H_2) + ... + nLeb(H_n) + ...$$

$$= \int_M n_1(x) d(Leb) < \infty.$$

□

Vamos agora construir uma medida que possui as mesmas propriedades de μ_f mais a propriedade de ser ergódica.

Teorema 4.3. *Existe ao menos uma probabilidade f-invariante, ergódica e absolutamente contínua com respeito a Lebesgue.*

Demonstração. Visto que Lebesgue quase todo ponto possui infinitos tempos hiperbólicos, sabemos que para toda partição $\mathcal{P} = \{P_1, ..., P_l\}$ em regiões com diâmetro menor que δ (δ dado no Lema 3.4) vale $diam\mathcal{P}^n(x) \to 0$, para x em um conjunto com Leb-medida maior que $1 - \frac{\epsilon}{4}$. Fixe uma partição nas condições anteriores tal que o interior de cada elemento dela é não vazio.

Relembre que H é o conjunto dos pontos com infinitos tempos hiperbólicos.

Considere $\tilde{A}$ um conjunto invariante para μ_f tal que $\mu_f(\tilde{A}) > 0$. O Corolário 4.2 garante que H tem μ_f medida total. Daí faz sentido trabalharmos com $A = \tilde{A} \cap H$ em vez de $\tilde{A}$.

Como $\mu_f(A) > 0$, podemos considerar $x \in A$ um ponto de densidade para Leb. Dado $\epsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que se B é um conjunto aberto contendo x e com diâmetro menor que R então,

$$\frac{Leb(B \setminus A)}{Leb(B)} < \epsilon.$$

Seja $n(x)$ tempo hiperbólico suficientemente grande para que $diam\mathcal{P}^n(x) < R$. Seja A_n um elemento de $\mathcal{P}^n$ contendo x. Então vale

$$\frac{Leb(A_n \setminus A)}{Leb(A_n)} < \epsilon.$$

Sejam $U_{i(n)} = f^n(A_n)$ e g_n o ramo inverso de f^{-n} que envia $U_{i(n)}$ em A_n. Aplicando o Lema 4.2 ao ramo inverso g_n obtemos

$$\frac{Leb(U_{i(n)} \setminus A)}{Leb(U_{i(n)})} \leq K_1 \frac{Leb(A_n \setminus A)}{Leb(A_n)} < K_1 \epsilon.$$

Visto que $\mathcal{P}$ é finito, existe um índice i entre $1, ..., l$ tal que $Leb(U_i \setminus A) = 0$. Daí, existem no máximo l conjuntos f-invariantes com medida de Lebesgue positiva e disjuntos dois a dois. Assim, M é particionada em um número finito, $s \leq l$, de conjuntos invariantes $A_1, ..., A_s$ minimais e com medida de Lebesgue positiva.

Para finalizar, considere as probabilidades

$$\mu_i(B) = \frac{\mu_f(B \cap A_i)}{\mu_f(A_i)}, i = 1, ..., l.$$

As probabilidades $\mu_i' s$ satisfazem o resultado.

$\square$

Referências Bibliográficas

[Alv00] Alves, J.F. SRB measures for non-hyperbolic systems with multidimensonal expansion. Ann. Sci. École Norm. Sup, 33:1-32, 2000.

[ABV00] Alves, J.F., Bonatti, C., Viana, M. SRB mesures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly expanding. Inventiones Math., 140: 351-398, 2000.

[BDV05] Bonatti, C., Díaz, L.J., Viana, M. Dynamics beyond uniform hyperbolicity. Springer Verlag, 2005.

[BV00] Bonatti, C., Viana, M. SRB mesures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly contracting. Israel Journal of Math. 115: 157-193, 2000.

[BK81] Brin, M., Katok, A. On local entropy. Lectures Notes in Mathematics, 1007-Proceedings, 1981.

[Cr85] Craizer, M. Teoria ergódica das transformações expansoras. Informes de matemática, IMPA, 1985.

[De] Deimling, K. Nonlinear function analysis, Springer Verlag.

[EG92] Evans, L.C, Gariepy, R.F. Measure theory and fine properties of functions. CRC Press, 1992.

[El00] Lima, E.L, Curso de análise Vol. 2. Projeto Euclides, 6ª edição, 2000.

[El03] Lima, E.L. Espaços métricos. Projeto Euclides, 3º edição, 2003.

[Fer02] Fernadez, R. Introdução à teoria da medida. Projeto Euclides. IMPA, 2002.

[Fl63] Flanders, H. Differential forms. Academic Press-London, 1963.

[Ke98] Keller, G. Equilibrium states in ergodic theory. Cambridge University Press, 1998.

[Mañ] Mañé, R. Introdução a teoria ergódica. Projeto Euclides, IMPA, 1983.

[Ol03] Oliveira, K. Equilibrium states for non-uniformly expanding maps. Ergodic Theory and Dynamical Systems, 23: 1891-1906, 2003.

[Ol05] Oliveira, K. Um primeiro curso sobre teoria ergódica com aplicações. Publicações Matemática - IMPA, 2005.

[OV04] Oliveira, K., Viana, M. Thermodynamical formalism for open classes of potentials and non-uniformly hyperbolics maps. preprint, 2004.

[OV05] Oliveira, K., Viana, M. Existence and uniqueness of maximizing measures for robust classes of local diffeomorphisms. preprint, 2005.

[Os68] Oseledets, V.I. A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. Trans. Moscow Math. Society, 19: 197-231, 1968.

[Pe97] Pesin, Y.B. Dimension theory in dynamical systems. Chicago Lectures in Mathematics Series, 1997.

[Rud81] Rudin, W. Real and complex analysis. McGraw-Hill, 2 Edition, 1981.

[Ru68] Ruelle, D. Statistical mechanics of a one-dimensional lattice gas. Comm. Math. Phys. 9, 267-278, 1968.

[Wa82] Walters, P. An introduction to ergodic theory. Spring-Verlag, 1982.

Índice Remissivo