



Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Curso de Graduação em Matemática

Banco de Questões

Cálculo 1

Maceió, Brasil
11 de Março de 2010

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | 2005 | 3 |
| 1.1 | 1ª Avaliação-21 de fevereiro de 2005 | 3 |
| 2 | 2007 | 5 |
| 2.1 | 1ª Prova-15 de setembro de 2007 | 5 |
| 2.2 | 2ª Prova-05 de outubro de 2007 | 6 |
| 2.3 | 1ª Prova-06 de outubro de 2007 | 6 |
| 2.4 | 4ª Prova-01 de dezembro de 2007 | 7 |
| 2.5 | 4ª Prova-06 de dezembro de 2007 | 8 |
| 2.6 | Reavaliação da 2ª média-07 de dezembro de 2007 | 9 |
| 3 | 2008 | 10 |
| 3.1 | 1ª Prova-14 de março de 2008 | 10 |
| 3.2 | 2ª VPA-12 de abril de 2008 | 11 |
| 3.3 | 3ª Avaliação-17 de maio de 2008 | 12 |
| 3.4 | 4ª Prova-14 de junho de 2008 | 13 |
| 3.5 | Reavaliação da 2ª média-21 de junho de 2008 | 13 |
| 3.6 | VPA 1-12 de setembro de 2008 | 14 |
| 3.7 | VPA 1-13 de setembro de 2008 | 15 |
| 3.8 | 2ª Prova-03 de outubro de 2008 | 16 |
| 3.9 | 2ª Avaliação-04 de outubro de 2008 | 17 |
| 3.10 | 3ª Prova-01 de novembro de 2008 | 17 |
| 3.11 | Reposição da 1ª Média-13 de dezembro de 2008 | 18 |
| 3.12 | Reavaliação da 2ª média-13 de dezembro de 2008 | 19 |
| 3.13 | Prova Final-18 de dezembro de 2008 | 20 |
| 4 | 2009 | 22 |
| 4.1 | 1ª Avaliação-21 de março de 2009 | 22 |
| 4.2 | 2ª Avaliação-17 de abril de 2009 | 23 |
| 4.3 | 2ª Avaliação-18 de abril de 2009 | 24 |
| 4.4 | 3ª Avaliação-16 de maio de 2009 | 24 |

Apresentação

Esse Banco de Questões contém exercícios de Cálculo 1. Todo o material foi extraído de avaliações escritas de turmas do cálculo unificado da Universidade Federal de Alagoas.

Capítulo 1

2005

1.1 1ª Avaliação-21 de fevereiro de 2005

1. Determine as assíntotas verticais e horizontais, caso existam, ao gráfico da função

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{5x^3 - 20x^2 + 15x}.$$

2. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^3 - 8};$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right);$

- (c) Use o Teorema do confronto para mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{10} \operatorname{sen} \left(\frac{50\pi}{\sqrt[3]{x}} \right) = 0.$$

3. Considere a função f , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} + 10, & x < 2, \\ 2x^3 - x, & x \geq 2. \end{cases}$$

- (a) Determine para que valores de x a função f é contínua;
 - (b) Prove que existe c tal que $f(c) = 15$.
4. Seja h a função definida por $h(x) = x|x - 1|$.
- (a) Verifique se h é diferenciável em $x_0 = 1$;
 - (b) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de h no ponto $(2, 2)$.

Capítulo 2

2007

2.1 1ª Prova-15 de setembro de 2007

- Se $f(x) = |x - 3|$, mostre que f é contínua em $x = 3$ mas não é derivável em $x = 3$.
 - Prove que existe um número real cujo quadrado é igual ao seu cubo somado com 2.
[Sugestão: Use o Teorema do Valor Intermediário]
- Determine, usando a definição de derivada de uma função em um ponto, uma equação para a reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt{2x^2 + 7x}$ em $x = 1$.
- Prove, usando a definição, que $\lim_{x \rightarrow 6} \left(3 - \frac{x}{4}\right) = \frac{3}{2}$.
 - Ache as assíntotas verticais e horizontais da curva $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2 - 1}}{3x - 4}$, se existirem.
- Calcule $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{7 + \sqrt[3]{x}} - 3}{x - 8}$.
 - Calcule os limites laterais da função $f(x) = 3 + \frac{[[x]]}{2}$ no ponto em que $x = 3$.
- Um projétil é lançado verticalmente para cima e está a s metros acima do solo, t segundos depois de ser lançado, onde $s = 256t - 16t^2$. Calcule:

- (a) A velocidade do projétil 6 segundos após o lançamento.
- (b) O tempo, em segundos, necessário para que o projétil atinja sua altura máxima (no ponto em que sua velocidade é 0 m/s).
- (c) A altura máxima que o projétil atinge.

Observação: Nesta última questão, você só deverá utilizar os conceitos adquiridos no Cálculo 1.

2.2 2ª Prova-05 de outubro de 2007

1. Considere a circunferência $x^2 + y^2 = 4$. Se um ponto P desta circunferência, no 1º quadrante, é tal que o segmento OP faz um ângulo de 75° com o eixo dos x , prove que a tangente ao círculo nesse ponto faz um ângulo de 25° com aquele eixo.

[Sugestão: Use diferenciação implícita]

2. (a) Determine $\frac{dy}{dx}$, onde $3x \cdot \arctg(x + y) + 107 = x^2y$.
 (b) Se $f(x) = \log_3 5^{x^2+1}$, determine $f'(x)$.
3. Encontre, no intervalo $[0, 2\pi]$, os pontos sobre o gráfico da função $f(x) = 2\text{sen}x + \text{sen}^2x$, onde a reta tangente é horizontal.
4. (a) Obtenha uma equação da reta tangente à curva $y = \frac{1}{\text{sen}x + \cos x}$, no ponto em que $x = 0$.
 (b) Ache a derivada da função $f(x) = \text{sen}^2 3^{\arctg x^4}$.
5. Encontre as inclinações das retas tangentes à curva $y = 9 - x^2$, no ponto $(2, 1)$.

2.3 1ª Prova-06 de outubro de 2007

1. (a) Prove que a função $f(x) = x \text{sen} \left(\frac{1}{x}\right) - \cos \left(\frac{1}{x}\right)$ tem assíntota horizontal.

[Sugestão: faça $\frac{1}{x} = \theta$.]

- (b) Determine $\frac{dy}{dx}$, onde $x \arccos(x + y) - \pi = y^2$.
2. Obtenha uma equação de cada uma das retas que passam pelo ponto (4, 13) e que são tangentes à curva $y = 2x^2 - 1$.
3. Suponha que $f(x) = 3x + |x|$ e $g(x) = \frac{3x}{4} - \frac{|x|}{4}$. Prove que $f'(0)$ e $g'(0)$ não existem, mas $(f \circ g)'(0)$ existe.
4. (a) Obtenha uma equação para a reta tangente à curva $y = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sec x}$, no ponto em que $x = 0$.
- (b) Determine a derivada da função $f(x) = \cos[\operatorname{tg}\sqrt{\cos x}]$.
- (c) Ache a derivada da função $g(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$.
5. (a) Determine a derivada da função $f(x) = 5^{\operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x^2)}$.
- (b) Para quais valores de k a função $y = e^{kx}$ satisfaz a equação $y'' + 5y' - 6y = 0$?

2.4 4ª Prova-01 de dezembro de 2007

1. (a) Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que a equação $x^4 + 4x + 1000 = 0$ tem, no máximo, duas raízes reais.
- (b) Se f é contínua no intervalo $[2, 5]$ e $1 \leq f'(x) \leq 4$ para todo x em $(2, 5)$, mostre que $3 \leq f(5) - f(2) \leq 12$.
2. Ache os valores de a , b e c tais que a função $f(x) = ax^2 + bx - c$ tenha um valor máximo relativo de 7 em $x = 1$, e que o gráfico de $y = f(x)$ passe pelo ponto $(2, -2)$.
3. (a) Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$. Mostre que o gráfico de f é côncavo para cima se $a > 0$ e côncavo para baixo se $a < 0$.
- (b) Se $\lim_{x \rightarrow 0^+} (cx + 1)^{\cot x} = e^{-\pi}$, ache o valor de c .
4. Esboce o gráfico de $f(x) = x^2 e^{-x^2}$, depois de ter determinado suas interseções com os eixos coordenados, seus intervalos de crescimento e decréscimo, seus pontos críticos, suas concavidades e pontos de inflexão, bem como todas as suas assíntotas, se existirem.

5. (a) Encontre sobre a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ o ponto mais próximo do ponto $(0, -1)$.
- (b) Sabemos que a reta $x + y = 0$ tangencia o gráfico de uma função f em determinado ponto e que essa função é tal que $f''(x) = 3x^2$ e $f'(0) = 0$. Determine a função f .

2.5 4ª Prova-06 de dezembro de 2007

1. (a) Encontre a antiderivada mais geral da função

$$f(x) = \sqrt{x} - 7x^{-3/4} + 3e^x + 7\sec^2 x + \pi.$$

- (b) Encontre f , sabendo que $f''(x) = -3e^x + 4 \operatorname{sen} x$, $f(0) = 0$ e $f(\pi) = 0$.

2. Calcule o volume e as dimensões do cilindro circular reto de maior volume inscrito em um cone circular reto de altura 1 e raio da base 1.

3. Calcule:

(a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\cos x}$.

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right)^x$.

4. Calcule a área da região que está sob o gráfico de $f(x) = x^3 + x^2$, entre $x = 0$ e $x = 1$.

5. Faça o gráfico da função $f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{x^2}$, depois de determinar:

- (a) seu domínio;
- (b) suas interseções com os eixos coordenados;
- (c) seus extremos relativos;
- (d) seus intervalos de crescimento e decréscimo;
- (e) os intervalos onde a concavidade é para cima ou para baixo;
- (f) os pontos de inflexão;
- (g) suas assíntotas, se existirem.

2.6 Reavaliação da 2ª média-07 de dezembro de 2007

1. Despeja-se água num recipiente de forma cônica, à taxa de $8 \text{ cm}^3/\text{min}$. O cone tem 20 cm de profundidade e 10 cm de diâmetro em sua parte superior. Se existe um furo na base e o nível da água está subindo à taxa de $1 \text{ mm}/\text{min}$, determine com que velocidade a água está escoando, quando estiver a 16 cm do fundo.
2. (a) Obtenha uma equação para a reta tangente à curva $x^y = y^x$, no ponto em que $x = 1$.
(b) Ache o ponto sobre a curva $y = \cosh x$ no qual a reta tangente tem inclinação igual a 1.
3. (a) Para quais valores de a e b a função $f(x) = axe^{bx^2}$ tem um valor máximo no ponto $(2, 1)$?
(b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{b/x}$.
4. Um cilindro circular reto é gerado pela rotação de um retângulo de perímetro 20 em torno de um de seus lados. Que dimensões deve ter o retângulo para gerar o cilindro de volume máximo?
5. Através das derivadas, estude o que for importante e faça o gráfico de $y = \frac{2x^2}{9 - x^2}$.

Capítulo 3

2008

3.1 1ª Prova-14 de março de 2008

1. Encontre uma equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ no ponto $(-2, 1/4)$.

2. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x - \pi)}{\operatorname{sen} x}$;

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3 + 2x)^2}{(2x - 1)^3 \cdot (x^3 - 1)}$;

(c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sec} x + \cos x}{\cos x}$.

3. Sejam f e g funções contínuas em $[-2; 5]$ tais que $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 7$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 4$ e $\lim_{x \rightarrow 5^-} g(x) = 5$.

(a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{g^2(x) - 25}{g(x) - 5}$;

(b) Calcule $(g - f)(-2)$ e $(g - f)(5)$;

(c) Use o item (b) e o Teorema do Valor Intermediário para provar que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = g(c)$.

4. Ache um número real b de modo que a função

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x + 5, & x \leq 2, \\ -x^2 + bx + (1 - b), & x > 2 \end{cases}$$

seja contínua em $x = 2$. Para este valor de b , f é contínua em \mathbb{R} ? Justifique.

5. Determine as assíntotas horizontais e verticais da função $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$.

3.2 2ª VPA-12 de abril de 2008

1. Seja $f(x) = 1 + \operatorname{sen}x + \frac{\operatorname{sen}^2x}{2} + \frac{\operatorname{sen}^3x}{3} + \dots + \frac{\operatorname{sen}^{10}x}{10}$.

(a) Calcule $f'(x)$.

(b) Ache $f'(\frac{\pi}{6})$.

(c) Existe algum $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $f'(x) = \cos x$?

2. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \leq 1, \\ ax + b, & x > 1. \end{cases}$$

(a) Encontre uma relação entre a e b de modo que f seja contínua em $x = 1$.

(b) Use a relação encontrada no item (a) para calcular a e b , de modo que f seja diferenciável em $x = 1$.

[Sugestão: Calcule as derivadas laterais de f em $x = 1$.]

3. (a) Ache y' onde $x^2 - xy + \frac{3}{2}y^2 = \frac{15}{2}$.

(b) Onde a reta normal à curva dada no ponto $(-2, 1)$ intercepta a curva uma segunda vez?

4. (a) Obtenha uma equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = 10^{x^2+x+1}$ no ponto $(0, 10)$.

- (b) Se $H(x) = e^{[f(x)]^2}$ e $f(1) = f'(1) = 1$, determine uma equação da reta tangente ao gráfico de H no ponto correspondente a $x = 1$.
5. (a) Obtenha uma equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \operatorname{cosec}x + \operatorname{cotg}x$ no ponto $x = \frac{\pi}{4}$.
- (b) Determine a derivada da função $g(x) = \operatorname{sen}^2(\cos(x^2 + 1))$.

3.3 3ª Avaliação-17 de maio de 2008

1. (a) Use diferenciação logarítmica para achar a derivada da função $f(x) = x^{\ln x}$.
- (b) Determine a abscissa do ponto no qual a reta tangente à curva $y = \operatorname{cosh} x$ faz com o eixo- x um ângulo de $\frac{\pi}{4}$ radianos.
2. Um homem com 1,8 m de altura caminha em direção a um edifício, com velocidade de 1,5 m/s . Se existe um ponto de luz no chão a 15 m do edifício, com que velocidade a sombra do homem no edifício estará diminuindo, quando ele estiver a 9 m do edifício?
3. (a) Use diferenciais para estimar (calcular aproximadamente) o número $\sqrt[3]{8,01}$.
- (b) Seja g derivável em toda a reta \mathbb{R} , crescente em $(0, +\infty)$ e decrescente em $(-\infty, 0)$. Determine onde $f(x) = g(x^2)$ é crescente e onde é decrescente.
4. Prove que a função $f(x) = e^{\frac{x^4}{4} - 6x^2 + ax}$ tem, no máximo, um ponto crítico no intervalo $(-1, 1)$, para qualquer valor de a .
5. (a) Dada a função $f(x) = -\frac{x}{(x-2)^2}$, determine:
- (1) O domínio de f ;
 - (2) As intersecções com os eixos;
 - (3) As assíntotas, caso existam;
 - (4) Os intervalos de crescimento e decrescimento;
 - (5) Os pontos de inflexão e as concavidades;
- (b) Trace o gráfico de f .

3.4 4ª Prova-14 de junho de 2008

1. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{x+1} \right]^x$;

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right]$.

2. Sabendo-se que $f'(x) = 3x^2$ e que a reta $y = 3x$ é tangente ao gráfico de f em algum ponto, encontre $f(x)$. Observação: Você poderá encontrar mais de uma função com essas características.

3. Determine os pontos P da circunferência $x^2 + y^2 = 25$ tais que a soma das distâncias de P aos pontos $A = (-2, 0)$ e $B = (2, 0)$ seja

(a) máxima;

(b) mínima.

4. (a) Calcule a área da região delimitada pelo gráfico da função $f(x) = x - 2$, pelo eixo- x e pelas retas $x = 1$ e $x = 5$. Não precisa usar somas de Riemann.

(b) Calcule a integral $\int_1^5 (x - 2) dx$.

(c) Usando Somas de Riemann, calcule $\int_0^2 (x - 2) dx$.

5. Dada a função $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$, sabe-se que $f'(x) = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$ e que

$$f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}.$$

Indique os intervalos de crescimento e decréscimo, os pontos críticos de máximo e mínimo, os intervalos onde a concavidade é voltada para cima e os em que ela é voltada para baixo, bem como os pontos de inflexão e as assíntotas, caso existam. Feito isso, trace o gráfico.

3.5 Reavaliação da 2ª média-21 de junho de 2008

1. (a) Suponha que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf'''(x)}{f''(x)} = 1$. Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf'(x)}{f(x)}$.
 (b) Determine o valor de c para o qual $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = 4$.
2. Use o Cálculo para encontrar os valores máximos e mínimos da função $f(x) = e^{x^2-x}$, no intervalo $[0, 1]$.
3. Ache os valores de a , b e c , tais que a função definida por $f(x) = ax^2 + bx - c$ tenha um valor máximo igual a 7, quando $x = 1$ e de tal maneira que o gráfico passe pelo ponto $(2, -2)$.
4. Às 13 horas um navio A está a 100 km ao Norte de um navio B . O navio A está navegando para o Sul a 20 km/h, enquanto que o navio B está navegando para o Leste a 15 km/h. Determine se os navios estão se aproximando ou afastando às 16 h e com que velocidade isto está ocorrendo.
5. Determine as dimensões do retângulo de maior área que pode ser inscrito na elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

3.6 VPA 1-12 de setembro de 2008

1. Seja a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ cx + k, & 1 < x < 4, \\ -2x, & x \geq 4. \end{cases}$$

- (a) Encontre os valores de c e k que tornam a função f contínua nos reais.
- (b) Esboce o gráfico desta função.
2. (a) Encontre a derivada da função $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, usando a definição.
- (b) Determine uma equação da reta tangente à curva no ponto em que $y = 4$.

3. (a) Determine as assíntotas da curva $f(x) = \frac{x - 9}{\sqrt[4]{16x^4 + 3x + 2}}$.

(b) Determine, se existirem, as assíntotas verticais da curva

$$y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}.$$

O gráfico assintota a reta assíntota por ambos os lados? Justifique.

4. (a) Calcule o limite: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2|}{x^3 - 8}$.

(b) Usando o teorema do confronto, mostre que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt[3]{x} \cdot 2^{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}) = 0.$$

5. A reta tangente à curva $y = \frac{1}{x}$ no ponto de abscissa a , com $a > 0$, e as retas $x = 0$ e $y = 0$ determinam um triângulo. Calcule sua área.

3.7 VPA 1-13 de setembro de 2008

1. (a) Usando a definição, verifique se a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1, \\ -\frac{x^2}{2} + 4, & 1 < x \leq 4, \\ 2, & x > 4 \end{cases}$$

é contínua nos reais.

(b) Esboce o gráfico desta função para confirmar o resultado do item (a).

2. (a) Encontre a derivada da função $f(x) = \frac{5 - 3x}{x - 2}$, usando a definição.

(b) Determine uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $(3, -4)$.

3. (a) Determine as assíntotas da curva $h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

(b) Calcule o limite: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})$.

4. Calcule os limites:

(a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{|x - a|}$.

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6 - x} - 2}{\sqrt{3 - x} - 1}$.

5. (a) Se $|g(x) + 4| < 2(3 - x)^4$ para todo x real, calcule $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$.

(b) Determine as assíntotas verticais da curva $h(x) = \frac{1}{x^2 + 5x + 6}$.

3.8 2ª Prova-03 de outubro de 2008

1. (a) Ache a derivada da função $f(x) = \ln |\cos \sec(3x) \cotg(3x)|$.

(b) Encontre uma equação da reta tangente à curva $x \operatorname{sen} y + \cos 2y = \operatorname{sen} x$, no ponto $(0, \pi/4)$.

2. Usando diferenciação logarítmica, calcule $f'(0)$, sendo $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}(2-x)^5}{(x+3)^4}$.

3. (a) Sendo $y = \log_3(\log_2 x)$, calcule $f'(2)$.

(b) Determine $\frac{dy}{dx}$, onde $y = |x|^{e^{x^2}}$.

4. (a) Onde a reta tangente à curva $y = \operatorname{senh}(x)$ possui inclinação 1?

(b) Se $f(x) = 2^{\operatorname{arctg} x^2}$, calcule $f'(1)$.

5. (a) Seja $f(x) = a \operatorname{sen} x + b \cos x + c \operatorname{tg} x$ tal que $f(0) = 2$, $f'(\pi) = 0$ e $f''(\pi/6) = 4$. Calcule a , b e c .

(b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2 + x - 2}$.

3.9 2ª Avaliação-04 de outubro de 2008

1. Usando a diferenciação logarítmica, derive

$$y = \frac{\cos^2 x \cdot \operatorname{tg}^4 x}{(e^{2x} + 1)^3}.$$

2. Sabendo que a equação $x^2 y^2 + xy = 2$ define implicitamente y como função de x , pergunta-se: Existe algum ponto sobre a curva no qual a reta tangente é paralela à reta $y = 5$?

3. (a) Determine a equação da reta tangente à curva $y = 3^{\cos(2x)}$, no ponto em que $y = 1$, com $0 \leq x \leq \pi/2$.

(b) Seja $y = (\ln x)^{\operatorname{sen}(2x)}$. Determine $\frac{dy}{dx}$.

4. (a) Se $y = \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-x^2})$, determine $\frac{dy}{dx}$, sendo $0 < x < 1$.

(b) Se $f(x) = \frac{\log_{\pi} x}{x^2}$, determine $f'(1)$.

5. (a) Sendo $y = x \operatorname{tgh}(\sqrt{x})$, determine a equação da reta normal a essa curva no ponto $(0, 0)$.

Observação: A reta normal à curva C em um ponto P é, por definição, a reta que passa por P e é perpendicular à reta tangente a C em P .

(b) Se $f(x) = \arccos\left(x - \frac{x^3}{3}\right)$, determine $f''(1/2)$.

3.10 3ª Prova-01 de novembro de 2008

1. (a) Ache uma linearização para a função $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$, em torno de $a = 7$.

(b) Aproxime $\ln(1,08)$, por diferenciais.

2. Dada a função $f(x) = 2\operatorname{sen}x + \cos(2x)$, com $-\pi \leq x \leq \pi$, determine:

(a) os números críticos de f ;

- (b) os valores máximos e mínimos absolutos de f , no intervalo dado.
3. (a) Dada a função $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$, mostre que não existe $c \in [0, 5]$ tal que $f'(c) = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0}$. Por quê este fato não contradiz o Teorema do Valor Médio?
- (b) Mostre que a função $f(x) = x^3 + 9x^2 + 33x - 8$ possui exatamente uma raiz real.
4. Uma partícula move-se ao longo da curva $y = \sqrt{1+x^3}$. Quando ela atinge o ponto de ordenada 3, a coordenada y está crescendo a uma taxa de 4 m/s. Quão rápido está variando a coordenada x do ponto nesse instante?
5. A que razão está mudando o volume de uma esfera no instante em que a área de sua superfície está aumentando à razão de 4 cm^2/min e o raio está aumentando à razão de 0,1 cm/min?

3.11 Reposição da 1ª Média-13 de dezembro de 2008

1. (a) Obtenha a equação da reta normal à curva $y = e^{\cosh x}$ no ponto em que $y = e$.
- (b) Encontre as assíntotas horizontais e verticais da curva $y = \frac{\sqrt{3x^2 + 2}}{4x - 3}$.
2. (a) Dada a função $f(x) = x \cdot |x|$, para que valores de x a função f é diferenciável?
- (b) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 25x} - x)$.
3. (a) Ache uma relação entre a e b de modo que a função

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 2, \\ 2x^2 - 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

seja contínua em $x = 2$.

- (b) Depois de respondido o item (a), encontre valores de a e b para que a função f seja derivável em $x = 2$.

4. (a) Encontre a reta tangente à curva $x^3 + y^3 = 6xy$ no ponto $(3, 3)$.
 (b) Em quais pontos sobre a curva acima a reta tangente é horizontal?
5. (a) Sendo $y = \text{sen}(\text{tg}\sqrt{\text{sen}x})$, calcule y' .
 (b) Se $f(x) = 2^{3x^2}$, determine $f'(1)$.

3.12 Reavaliação da 2ª média-13 de dezembro de 2008

1. Um retângulo está inscrito em um círculo de 5 cm de raio. Se o comprimento do retângulo está diminuindo à razão de 2 cm por segundo, com que rapidez a área está variando, no instante em que o comprimento do retângulo for de 6 cm?
2. Encontre as dimensões e o volume do cone reto invertido, de maior volume, inscrito em um cone reto de altura H e raio da base R , estando o vértice do cone invertido no centro da base do cone maior.
3. (a) Usando a definição de integral definida, mostre que

$$\int_a^b (x + 5)dx = \frac{b^2 - a^2}{2} + 5(b - a).$$

- (b) Prove que $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ tem uma única raiz real.
4. Esboce o gráfico da função $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$, depois de desenvolver os procedimentos necessários, tais como limites e derivadas.
5. Determine:
 - (a) $\lim_{x \rightarrow 0} (2x + 1)^{1/\text{sen}x+x^2}$
 - (b) $f(x)$, onde $f''(x) = -\pi + x^{2/3} + 2 \cos x - e^x$, $f'(0) = 1$ e $f(0) = e$.

3.13 Prova Final-18 de dezembro de 2008

1. Considere um trapézio retângulo cuja base menor tem 2 cm. A altura do trapézio cresce a uma taxa de 1 cm/min, enquanto que sua área cresce a uma taxa de $6 \text{ cm}^2/\text{min}$. A que taxa está variando a base maior do trapézio, quando sua altura é de 10 cm e a área de 50 cm^2 ?

2. (a) Estude a continuidade, nos reais, da função

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & x \geq 0 \\ \ln(1-x^2), & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{1+x^2}, & x \leq -1. \end{cases}$$

- (b) Prove que $f(x) = \operatorname{tg}x - \operatorname{cotg}x - x$ tem uma única raiz no intervalo $(0, \pi/2)$.

3. (a) Calcule $f'(\frac{\pi^2}{16})$, onde $f(x) = \sqrt{\sec \sqrt{x}}$.

- (b) Dada a função $f(x) = 2^{\operatorname{arctg}(\operatorname{senh}x)}$, determine $f'(0)$.

4. Sendo $f(x) = \left(\frac{x}{\cos x}\right)^x$, calcule:

- (a) $f'(x)$;

- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

5. (a) Encontre a equação da reta tangente à curva $x^2(x^2-9) = y^2(y^2-1)$ no ponto $(-3, 1)$.

- (b) Existe algum ponto da curva $y = (\ln x)^3$ onde a segunda derivada vale zero? Se existir, identifique-os.

6. Existe algum ponto onde a função $f(x) = 3x - x^2 + |2x - 4|$ não é diferenciável?

Ache a derivada de f nos pontos onde ela é diferenciável.

7. Um fazendeiro deseja cercar um lote retangular de 1800 m^2 . Deseja também construir duas cercas divisórias internas, paralelas a dois dos lados da cerca externa. Qual é o comprimento total mínimo da cerca que o projeto exige?

Certifique-se de que sua resposta dá o mínimo absoluto.

8. (a) Sabemos que se f é contínua em $[a, b]$ e se $m \leq f(x) \leq M$, então

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a).$$

Com base nessa propriedade, mostre que

$$2 \leq \int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^2} dx \leq 2\sqrt{2}.$$

- (b) Determine $f(x)$, onde $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{x} - 2\operatorname{sen}x$ e $f(1) = 0$.

9. Um cilindro circular reto tem 6 m de raio e 10 m de altura. Se o raio tiver uma variação, para mais, de 2 cm, use diferenciais para estimar de quanto variará seu volume.
10. Depois de fazer as análises necessárias, esboce o gráfico da função $f(x) = \frac{(x + 1)^2}{x^2 + 1}$.

Capítulo 4

2009

4.1 1ª Avaliação-21 de março de 2009

1. (a) Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} kx - 3, & x \leq -1, \\ x^2 + k, & x > -1, \end{cases}$$

ache o valor de k para que exista $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

(b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|2x - 1| - |2x + 1|}{x}$.

2. Dada a função $f(x) = \frac{x^3 + 7x^2 + 12x}{x^2 + 2x - 3}$,

- (a) analise a continuidade de f em \mathbb{R} ;
- (b) calcule os limites laterais em torno dos pontos de descontinuidade para verificar se a curva possui, ou não, assíntotas verticais. Em caso afirmativo, escreva as equações das assíntotas.
3. (a) Usando o Teorema do Confronto, mostre que $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} 2^{\cos \frac{\pi}{x}} = 0$.

(b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{16 - x}{4 - \sqrt{x}}$.

4. Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} x + 2c, & x < -2, \\ 3cx + k, & -2 \leq x \leq 1, \\ 3x - 2k, & x > 1, \end{cases}$$

ache os valores de c e k , de modo que ela seja contínua em -2 e em 1 . Para os valores de c e k encontrados, a função é contínua em todos os reais?

5. (a) Mostre que a função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ é contínua no intervalo fechado $[-2, 2]$.

(b) Se $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9$, use o Teorema do Valor Intermediário para provar que existe um número real tal que $f(x) = 100$.

4.2 2ª Avaliação-17 de abril de 2009

1. Deve-se drenar uma piscina para limpeza. Se Q representa o número de litros d'água na piscina t minutos após o início da drenagem, e $Q = 200(30 - k)^2$, use a definição de derivada para calcular a velocidade de escoamento da água em $t = 10$ min.

Qual é a velocidade média de escoamento durante os 10 primeiros minutos?

2. Determine a equação da reta tangente à curva dada pela equação $xy^2 + \sqrt{xy} = 2$, no ponto de ordenada igual a 1.

3. Ache as equações das retas tangentes ao gráfico de $f(x) = x^2 + 1$ que passam pelo ponto $(1, 1)$.

4. A reta normal a uma curva C em um ponto P é, por definição, a reta que passa por P , perpendicular à reta tangente a C em P . Obtenha a equação da reta normal à curva $f(x) = 2^{\text{tg}(\text{sen}x^3)}$ no ponto de ordenada 1.

5. Em quais números a seguinte função é derivável?

$$f(x) = \begin{cases} -1 - 2x, & x < -1, \\ x^2, & -1 \leq x \leq 1, \\ x, & x > 1, \end{cases}$$

Dê uma expressão para a função f' .

4.3 2ª Avaliação-18 de abril de 2009

1. Determine as assíntotas horizontais do gráfico de $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2 + 2}}{4x + 6}$.
2. Obtenha a reta tangente à curva dada pela equação $\cos(x + y) = y$, no ponto $P = (\pi/2, 0)$.
3. Determine o valor de a para que a função

$$f(x) = \begin{cases} ax - 9, & x < 2 \\ 2x^2 - 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

seja derivável em $x = 2$.

4. (a) Mostre que $\frac{d}{dx} \left[\sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}} \right] = \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x}$, sendo que $x \in (0, \pi/2)$.
(b) Se $f(x) = e^{\operatorname{tg}\sqrt{\operatorname{sen} x}}$, determine $f'(x)$.
5. Um objeto anda em linha reta e sua posição no instante t vem dada pela função $s(t) = \frac{2 - t}{2 + t}$. Calcule a velocidade desse objeto em um instante t arbitrário, usando para isto a definição de derivada.

4.4 3ª Avaliação-16 de maio de 2009

1. (a) Encontre uma expressão para a variação da superfície total de um cone circular reto quando o raio permanece constante e a altura sofre uma pequena variação Δh .

[Fórmula para a área total do cone: $S = \pi R^2 + \pi Rg$]

- (b) Encontre os valores máximos e mínimos locais e absolutos de

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x < 0 \\ 2 - x^2, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

2. (a) Calcule a seguinte derivada: $\frac{d}{dx} \left(\sqrt{a^2 - x^2} + a \cdot \arcsen \left(\frac{x}{a} \right) \right)$.

(b) Sendo $f(x) = x^{\sinh(x^2)}$, determine $f'(x)$.

3. (a) Use diferenciação logarítmica para calcular a derivada de

$$y = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{(x+2)\sqrt{x+3}}.$$

(b) Sendo $f(x) = \log_3(x^2 - \sin x)$, determine $f'(\pi/2)$.

4. Uma bola de ferro, esférica, com 8 cm de diâmetro, está coberta com uma camada de gelo de espessura uniforme. Se o gelo derrete com uma taxa de $10 \text{ cm}^3/\text{min}$, a que taxa a espessura do gelo diminuirá quando a espessura da mesma for de 2 cm?

5. (a) Mostre que 5 é um número crítico da função $f(x) = 2 + (x - 5)^3$, mas que $g(5)$ não é máximo nem mínimo local.

(b) Encontre os valores máximos e mínimos absolutos da função $f(x) = (x^2 - 2)^{2/3}$, no intervalo $[-1, 2]$.