Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Curso de Graduação em Matemática

Banco de Questões

Cálculo 2

Maceió, Brasil
22 de Abril de 2010

Sumário

Apresentação

A ideia de editar o Banco de Questões de Cálculo 2 surgiu a partir das diversas solicitações que nos chegaram de alunos e professores de cálculo 2. Todo o material foi extraído de avaliações escritas de turmas do cálculo unificado da Universidade Federal de Alagoas. O objetivo é motivar o estudo do cálculo em todos os cursos na área de exatas.

Capítulo 1

2007

1.1 Reposição VPA1 e VPA2-07 de dezembro de 2007

1. Use a definição de integral, por somas de Riemann, e a interpretação geométrica desta para calcular o limite abaixo
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 - (\frac{2i}{n} - 1)^2}.$$

2. Seja $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{\left(\frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{2}\right)} ds$. Use o método de integração por partes para calcular a integral
$$\int_0^1 (2x - 1) f(x) dx.$$

3. Calcule a área da região limitada pelo gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 + 1)^2}$ e a reta $y = 1/4$.

4. Determine o volume do sólido limitado pelas superfícies
$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \ \text{ e } \ (x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

5. Calcule as seguintes integrais indefinidas

   (a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx$;

   (b) $\displaystyle\int \text{sen}^4 x\ \cos^4 x dx$.

1.2 Reposição 2-07 de dezembro de 2007

1. (a) Para quais valores de n a integral imprópria

$$\int_0^\infty \left(\frac{2}{x+1} - \frac{n}{x+3}\right) dx$$

   converge? Calcule a integral para esse valor de n.

   (b) Verifique se a integral imprópria

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx$$

   converge ou diverge. Se convergir, calcule seu valor.

2. Ache a área da região interior à curva $r = 1 + \cos\theta$ e exterior à curva $r = \cos\theta$.

3. Calcule os limites das sequências abaixo:

   (a) $a_n = \dfrac{n^2 \text{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{n+1}$;

   (b) $a_n = \dfrac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} - 1}$.

4. (a) Verifique a convergência ou divergência da série: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n + n}{n^3}$.

   (b) Ache o raio e o intervalo de convergência da série: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{4^n n}$.

5. (a) Obtenha a série de Taylor da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ em torno de $a = \pi$.

   (b) Determine a série de Maclaurin da função $f(x) = \int 2\operatorname{sen}^2 x dx$.

   [Sugestão: $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$].

1.3 Final-15 de dezembro de 2007

1. Calcule as integrais

   (a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-3 + 8x - 4x^2}} dx$;

   (b) $\displaystyle\int x^2 \ln(1 + x) dx$.

2. Calcule a área limitada pelas curvas $y = 8 - x^2$, $y = x^2$, $x = -3$ e $x = 3$.

3. A base de um sólido S é uma região elíptica limitada pela curva $9x^2 + 4y^2 = 36$. As seções transversais perpendiculares ao eixo-x são triângulos retângulos isósceles com hipotenusa na base. Calcule o volume de S.

4. (a) Verifique se a integral $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x} dx$ converge.

   (b) Verifique se a convergência ou a divergência da integral

   $$\int_0^1 \frac{1}{(1 + x)\sqrt{x}} dx.$$

   Se convergir calcule seu valor.

5. (a) Encontre as simetrias do gráfico de equação $r^2 = 4\cos(2\theta)$.

   (b) Faça o gráfico de $r^2 = 4\cos(2\theta)$.

6. Calcule a área da região interior à $r = 4\cos\theta$ e exterior à $r = 4(1 - \cos\theta)$.

7. Decida sobre a convergência ou divergência das seguintes sequências:

   (a) $a_n = \ln(e^n + 2) - \ln(e^n + 1)$;

   (b) $a_n = n \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$.

8. Decida sobre a convergência ou divergência das seguintes séries:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \, \frac{n^2+1}{n^3}$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[\ln(n+1)]^n}$.

9. Determine o intervalo de convergência das seguintes séries:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{5n}}{(x+1)5^n}$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(5^n + 5^{-n})(x+1)^{3n-2}$.

10. (a) Obtenha a série de Taylor da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ em torno de $x = 2$.

    (b) Obtenha a série de Mclaurin da função $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$.

Capítulo 2

2008

2.1 1ª Prova-15 de março de 2008

1. (a) Sabendo que $\int_2^6 f'(x)dx = 10$, f' é contínua no intervalo $(0, 8)$ e $f(6) = 5$, determine $f(2)$, justificando os passos que der nos cálculos.

   (b) Determine o intervalo no qual a curva $y = \int_0^x \frac{1}{1+t+t^2}dt$ é côncava para baixo.

2. Calcule as integrais:

   (a) $\int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \text{sen}(\text{sen}\, x)dx$;

   (b) $\int \sqrt{x}\,\text{sen}(1 + x^{3/2})dx$.

3. (a) É conhecido que $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$. Baseado neste fato, mostre que, para qualquer $a > 0$ e $a \neq 1$, temos sempre $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$.

   (b) Calcule a integral $\int_0^2 \frac{x^2+2}{x+1}dx$.

4. Ache a área da região delimitada pelas curvas $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \operatorname{sen}(2x)$, situada no primeiro quadrante e desde a reta $x = 0$ até o ponto em que, pela primeira vez, elas se cruzam.

5. Obtenha, por integração, a área do triângulo que tem vértices $(6, 1)$, $(1, 4)$ e $(-2, -3)$.

2.2 1ª Prova-17 de março de 2008

1. (a) Seja $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$, onde f é a função cujo gráfico se vê aqui.
   (i) Em que valores de x ocorrem os valores de máximo e de mínimo locais em g?
   (ii) Em quais intervalos g é côncava para baixo?

   (b) Uma partícula move-se ao longo de uma reta de tal forma que sua velocidade no instante t é $v(t) = t^2 - t - 6$ (medida em metros por segundo). Encontre a diferença entre a posição inicial e a posição final da partícula no período de tempo $1 \leq t \leq 4$.

2. Calcule as integrais:

   (a) $\displaystyle\int_1 \operatorname{sen} x \cdot \sec^2(\cos x)dx$;

   (b) $\displaystyle\int_0 x^a\sqrt{b + cx^{a+1}}dx$.

3. (a) É conhecido que $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$. Baseado neste fato, mostre que, para qualquer $a > 0$ e $a \neq 1$, temos sempre $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.

   (b) Determine uma equação para a reta normal à curva $x = \ln(x + y + 1)$ no ponto em que $x = 0$.

4. Ache a área da região delimitada pelas curvas $y = \operatorname{sen}(2x)$ e $y = \operatorname{sen} x$, desde o ponto em que elas se cortam pela primeira vez até o ponto em que elas se cortam pela segunda vez, isto a partir da origem e tomando-se o sentido positivo do eixo das abscissas.

5. Obtenha a área da região finita limitada pelas curvas $x = y^2 - 4y$ e $x = 2y - y^2$.

2.3 2ª Prova-12 de abril de 2008

1. Calcule as integrais:

   (a) $\int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x dx$;

   (b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}}$.

2. Determine o volume do sólido que se origina da rotação em torno do eixo-x, da região delimitada pela curva $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 2}}$ e pelas retas $x = 0$, $y = 0$ e $x = 1$.

3. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da região delimitada pela curva $y = \ln x$ e pelas retas $y = 1$ e $x = 2$, quando ela gira em torno da reta $y = -1$.

4. Um tanque em forma de esfera, que armazena determinado produto químico, tem 18 metros de diâmetro. Quanto desse produto o tanque contém quando a profundidade do líquido é de 7 metros?

5. Um buraco com $2\sqrt{3}$ cm de raio é feito através do centro de um sólido esférico com 4 cm de raio. Ache o volume da parte do sólido que foi jogada fora.

2.4 3ª Prova-17 de maio de 2008

1. Calcule a integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 12}$, se ela convergir.

2. Calcule a integral, se ela for convergente: $\int_0^1 x \ln x dx$.

3. Ache a área da região interior à circunferência $r = 3\,\text{sen}\,\theta$ e exterior à limaçon $r = 2 - \text{sen}\,\theta$.

4. Determine os pontos nos quais a curva $r = 2\text{sen}(3\theta)$ tem retas tangentes verticais e horizontais.

5. (a) Ache uma equação polar da curva $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

   (b) Obtenha uma equação cartesiana para a curva $r = \dfrac{4}{3 - 2\cos\theta}$.

2.5 4ª Prova-14 de junho de 2008

1. Determine se as séries seguintes convergem ou divergem:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)[\ln(\ln n)]^p}$.

2. Determine o intervalo de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n x^n}{n3^n}$.

3. Obtenha uma série de potência para $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$.

4. Obtenha a série de potências de x para $\cosh(x)$.

5. Se $f(x) = \ln x$, obtenha seu polinômio de Taylor de grau 3 em $x = 1$. Com isso, forneça uma aproximação para $\ln(1,1)$.

2.6 Reavaliação da 1ª Média-21 de junho de 2008

1. Determine os pontos de inflexão da curva $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{3+2t+4t^2}dt$.

2. Calcule as integrais:

   (a) $\displaystyle\int \sqrt{x}\cos(1+x^{3/2})dx$;

   (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos(\cos x)dx$.

3. Determine a área delimitada pela hipérbole $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ e pela reta $x=3$.

4. Encontre o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pelas curvas $y=x$ e $y=x^2$, quando ela gira em torno da reta $y=-1$.

5. Um sólido tem como base a região circular do plano xy delimitada pelo gráfico de $x^2+y^2=a^2$, com $a>0$. Ache o volume do sólido, se toda seção transversa por um plano perpendicular ao eixo-x é um triângulo equilátero com um lado na base do referido sólido.

2.7 Prova Final-28 de junho de 2008

1. Calcule a integral $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(x+\frac{2}{\operatorname{sen}^2 x}\right)dx$.

2. Calcule, se existir, a integral $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}dx$.

3. Responda, com argumentos, se no ponto em que $x=1/2$, a função $F(x)=\displaystyle\int_0^{2x^2}\operatorname{sen}(3t)dt$ está crescendo ou decrescendo.

4. Calcule a área da região interior à curva $r=2+2\cos\theta$ e exterior à curva $r=3$.

5. Ache a área da região limitada pela curva $y=\operatorname{tg}^2 x$, pelo eixo-x e pela reta $x=\dfrac{\pi}{4}$.

6. Use o método das secções transversais para calcular o volume da menor calota esférica feita a 3 cm do centro de uma esfera de raio 5.

7. A região do primeiro quadrante delimitada pelo gráfico da equação $x = 2y^3 - y^4$ e pelo eixo-y gira em torno do eixo-x. Estabeleça o volume do sólido resultante, usando o método nos anéis cilíndricos.

8. Determine o intervalo de convergência da série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-5)^k}{k^2}$.

2.8 1ª Avaliação-05 de setembro de 2008

1. Calcule $\phi'(x)$ em casa um dos seguintes casos:

   (a) $\displaystyle \phi(x) = \int_1^{\sqrt{\operatorname{tg}(x)}} \sqrt[3]{1+s^4}ds;$

   (b) $\displaystyle \phi(x) = \int_{1-x^2}^{e^x} \cos(s^2)ds.$

2. Calcule as integrais:

   (a) $\displaystyle \int \operatorname{sen}^3(x)\cos^2(x)dx;$

   (b) $\displaystyle \int (1+\ln x)x\ln x dx;$

   (c) $\displaystyle \int_0^{\pi/2} e^{\operatorname{sen}^2(x)}\operatorname{sen}(2x)dx.$

3. (a) Esboce a região R, delimitada pelas curvas $y = x+6$, $y^2 = x$, $y = 3$ e $y = -2$.

   (b) Calcule a área de R.

4. A base de um sólido S é um disco circular de raio $r = 9$. As seções transversais, perpendiculares à base, são quadrados. Calcule o volume de S.

5. Seja R a região delimitada pelas curvas $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = \dfrac{x}{4}$. Use o método das cascas cilíndricas para determinar o volume do sólido S obtido pela rotação de R em torno

   (a) do eixo OX;

   (b) da reta $x = 8$.

2.9 1ª Avaliação-06 de setembro de 2008

1. Seja $g(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$, onde $f(t) = \displaystyle\int_1^{t^2} \frac{\sqrt{1+u^4}}{\sqrt{u^5}}du$.

   (a) Calcule $g''(2)$.

   (b) Faça um esboço do gráfico de $g(x)$ no intervalo $1 \leq x < +\infty$.

2. Calcule as integrais:

   (a) $\displaystyle\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

   (b) $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x-1}dx$;

   (c) $\displaystyle\int \frac{\text{sen }(2x)}{1 + 3\,\text{sen}^2(x)}dx$.

3. (a) Calcule a área entre a curva $y = x^3$ e sua reta tangente em $x = 1$.

   (b) Sabendo que $\ln e = \displaystyle\int_1^e \frac{dt}{t} = 1$, use áreas para mostrar que $e > 2$.

4. O quadrado limitado pelos eixos cartesianos e pelas retas $x = 2$ e $y = 2$ é cortado em duas regiões pela curva $y^2 = 2x$. Mostre que essas regiões geram sólidos de volumes iguais quando giradas ao redor do eixo OX.

5. (a) Faça um desenho da região plana S limitada pelos gráficos das curvas $y = 3x - x^3$ e $y = 0$.

   (b) Use o método das cascas cilíndricas para calcular o volume do sólido gerado pela rotação de S em torno do eixo OY.

2.10 1ª Avaliação-17 de setembro de 2008

1. Calcule os valores máximo e mínimo da função $g(x) = \int_0^{x^2} e^s ds$ no intervalo $[-1, 1]$.

2. Calcule as integrais:

   (a) $\int x^2 \sec^2(x^3 + 1)dx$;

   (b) $\int_0^{\sqrt{\sqrt{3}-1}} \frac{2x}{x^4 + 2x^2 + 2}dx$.

3. Calcule a área da região delimitada pela curva $x = y^2 + 2y - 3$ e sua reta normal no ponto $(0, 1)$.

4. A base de um sólido S é uma região elíptica limitada pela curva $9x^2 + 4y^2 = 36$. As secções transversais perpendiculares ao eixo-x são triângulos isósceles retos com hipotenusa na base. Calcule o volume de S.

5. Use o método das cascas cilíndricas para encontrar o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pelas curvas $x + y = 3$ e $x = 4 - (y - 1)^2$ ao redor do eixo-x.

2.11 2ª Avaliação-03 de outubro de 2008

1. Esboce a região e calcule a sua área:

$$S = \left\{(x, y); x \leq 1, 0 \leq y \leq e^{-x}\right\}.$$

2. Calcule as seguintes integrais:

   (a) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{(6 - x^2)^3}}dx$;

   (b) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}$.

3. Calcule as seguintes integrais:

   (a) $\int \text{tg}^5 x \cdot \sec^2 dx$;

   (b) $\int \text{tg}^3 x dx$.

4. Avalie as seguintes integrais:

   (a) $\int \cos x \ln(\text{sen } x) dx$;

   (b) $\int x^3 \text{sen } x^2 dx$.

5. Avalie as seguintes integrais:

   (a) $\int \frac{x^4 - 10x^2 + 3x + 1}{x^2 - 4} dx$;

   (b) $\int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx$.

2.12 2ª Avaliação-04 de outubro de 2008

1. Verifique se a integral é convergente ou divergente. Justifique sua resposta.

   (a) $\int_0^\infty \frac{\cos^{10}(x^8)}{x^2 + 1} dx$;

   (b) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 5x + 6}$.

2. Calcule as seguintes integrais:

   (a) $\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} dx$;

   (b) $\int \sqrt{2x - x^2} dx$.

3. Encontre a anti-derivada das seguintes funções:

(a) $f(x) = x\,\text{sen}^3(x^2)$;

(b) $g(x) = \text{sen}^2 x \cos^3 x dx$.

4. Determine as funções f e g tais que

(a) $f'(x) = x\text{tg}^{-1} x$ e $f(0) = 0$;

(b) $g'(x) = x^3 e^{x^2}$ e $g(1) = 0$.

5. Avalie as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx$;

(b) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+2x+2)} dx$.

2.13 3ª Avaliação-31 de outubro de 2008

1. (a) Esboce a região dentro do círculo $r = 3\text{sen}\,\theta$ e fora da cardióide $r = 1 + \text{sen}\,\theta$.
   (b) Calcule a área da região desenhada no item (a).

2. Considere as sequências $\left(\dfrac{e^n}{n}\right)_{n\geq 1}$ e $\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1}$.

   (a) Verifique se são monótonas;
   (b) Calcule seus limites, se existirem.

3. Se três mil reais são investidos a uma taxa de juros de 5 por cento a.a, calcule o valor do investimento no final de 5 anos se os juros forem compostos:

   (a) Diariamente;
   (b) Continuamente.

4. (a) Esboce a curva $r = 2\,\text{sen}\,3\theta$;
   (b) Encontre os pontos da curva dada no item (a) onde a reta tangente é horizontal ou vertical.

5. Mostre que a sequência definida por

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}$$

é convergente e deduza seu limite.

2.14 3ª Avaliação-01 de novembro de 2008

1. Considere a curva $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$.
   (a) Esboce a curva;
   (b) Encontre os pontos na curva onde a reta tangente é horizontal ou vertical.

2. Usando o Teorema do Confronto, prove que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \text{onde} \quad a_n = \frac{n}{n^2+1} - \cos(n\frac{\pi}{2}).$$

3. Mostre que as sequências abaixo são convergentes.
   (a) $\left\{ \frac{n}{3^{n-1}} \right\}$;
   (b) $\left\{ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)} \right\}$.

4. Calcule a área da região limitada pelas curvas $r = \theta$, $r = \frac{\pi}{2}$ e a semi-reta $x \geq 0$.

5. Uma cultura de bactérias cresce com uma taxa de crescimento relativo constante. A contagem era de 400 depois de 2 horas e 25.600 depois de 6 horas.
   (a) Qual a população inicial da cultura?
   (b) Encontre uma expressão para a população depois de t horas.
   (c) Em que período de tempo a população duplica?
   (d) Quando a população alcançará 100.000?

2.15 4ª Avaliação-05 de dezembro de 2008

1. (a) Você joga uma bola de uma altura de 20 metros sobre uma superfície plana. Cada vez que a bola atinge a superfície depois de cair de uma distância h, ela rebate a uma distância rh, onde r é positivo menor do que 1. Encontre a distância vertical total percorrida pela bola quicando para cima e para baixo.

   (b) Expresse a dízima periódica $5,\overline{23} = 5,23232323\ldots$ como razão de dois inteiros.

2. Verifique se a série

$$1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{n}{2^{n-1}} + \ldots$$

   é convergente ou divergente. Caso seja convergente, calcule sua soma.

3. Determine o intervalo de convergência das séries:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{e^n}(x-e)^n;$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}\,2^n}(x-1)^n.$

4. Verifique se as séries convergem ou divergem. Justifique.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\text{arctg}(n) - \ln(n))^2}{n^2+1};$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)^{n+1/2}}.$

5. Calcule a série de Maclaurin da função $f(x) = \text{arctg}(x)$.

2.16 Reavaliação da 2ª MB-12 de dezembro de 2008

1. (a) Encontre a série de potência da função $\dfrac{e^x - 1}{x}$.

   (b) Usando o item (a) e derivação termo a termo, verifique que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1.$$

2. (a) Encontre o termo geral da série

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$$

   e, em seguida, calcule sua soma.

   (b) Investigue se a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-\operatorname{arctg}(n) - \ln(n)}}{n^2 + 1}$$

   converge ou diverge.

3. (a) Considere as curvas $r = 2\,\operatorname{sen}\theta$ e $r = 2\cos\theta$. Prove que elas se intersectam formando um ângulo reto;

   (b) Esboce as curvas $r = 3\cos\theta$ e $r = 3(1 + \cos\theta)$ e calcule a área limitada por elas.

4. Considere a sequência $\{a_n\}$ dada por $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.

   (a) Usando indução finita, verifique que a sequência $\{a_n\}$ satisfaz o Teorema da Sequência Monótona.

   (b) Calcule $\lim_{n \to \infty} a_n$.

5. Considere a função $f(x) = \ln(x + 1)$.

   (a) Encontre a série de Mclaurin de f.

   (b) Calcule o intervalo de convergência da série obtida no item (a).

Capítulo 3

2009

3.1 1ª Avaliação-21 de março de 2009

1. Calcule as seguintes integrais, e se for necessário, interprete-as como áreas.

   (a) $\displaystyle\int \operatorname{tg}(x)\ln(\cos x)dx$;

   (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^2})dx$.

2. Encontre uma função f e um número real a tal que

$$2+\int_a^x \frac{\ln(f(t))}{t^3}dt = 2\sqrt{x}.$$

3. Identifique os intervalos onde a função $f(x)=\displaystyle\int_0^x \sqrt{1+t^3}dt$ é crescente e decrescente e também onde sua concavidade é voltada para cima e para baixo.

4. Calcule

$$\lim_{x\to 0}\int_0^x (1-\operatorname{tg}(2t))^{1/t}dt.$$

5. Resolva os itens:

   (a) Esboce a região delimitada pelas curvas $y = x^3$, sua tangente no ponto $x = 2$ e a reta $y = 0$. Em seguida, calcule sua área.

   (b) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região esboçada no item (a) em torno do eixo-x.

3.2 3ª Avaliação-16 de maio de 2009

1. Resolva os itens:

   (a) Esboce as curvas $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$ e $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$. Em seguida, calcule a área entre elas.

   (b) Determine os pontos nos quais a curva $r = 3 - 3\cos\theta$ tem retas tangentes verticais e horizontais. Faça um esboço gráfico.

2. Considere a série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{400}}{(n+1)^{200}(n+100)^{20}}.$$

   (a) Calcule
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{400}}{(n+1)^{200}(n+100)^{20}}.$$

   (b) Essa série tem soma maior do que 10^{10000}? Justifique sua resposta.

3. Usando o Teorema do Confronto, calcule
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n}.$$

4. Determine se a série converge ou diverge. Se converge calcule sua soma.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n}{n+1}$.

5. O cardume de atum do Pacífico foi modelado pela equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \kappa y\left(1 - \frac{y}{K}\right),$$

onde $y(t)$ é a biomassa (massa total dos membros da população) em quilogramas no tempo t (medido em anos), a capacidade de suporte é estimada como sendo $K = 8 \times 10^7$ kg e $\kappa = 0,71$ por ano.

   (a) Se $y(0) = 2 \times 10^7$ kg, calcule a biomassa um ano depois.
   (b) Quanto tempo levará para a biomassa alcançar 4×10^7 kg?

3.3 4ª Avaliação-12 de junho de 2009

1. Considere a função

$$f(x) = 1 + 5x + x^2 + 5x^3 + x^4 + 5x^5 + x^6 + 5x^7 + \dots$$

Encontre o seu domínio, isto é, encontre o intervalo de convergência da série. Em seguida, encontre a soma da série.

2. Obtenha uma representação em série de potências centrada em $a = 2$ para a função $f(x) = \ln(x)$.

3. Investigue a convergência ou divergência das séries

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$;
   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n^2 + 11n}{3^n(n^2 + 3n + 7)}$.

4. Considere a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b^{\ln(n)}$. Usando o teste integral, o que você conclui sobre a convergência da série? Justifique.

5. Resolva.

   (a) Encontre a representação em série de potência da função $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$.
   (b) Usando o item (a) e o que você sabe sobre série de Maclaurin, calcule $f^{(21)}(0)$. O que você pode dizer sobre $f^{(2009)}(0)$?

3.4 4ª Avaliação-13 de junho de 2009

1. Encontre a série de Maclaurin da função $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, $x \neq 0$ e $f(0) = 1$.

2. Investigue a convergência ou divergência das séries

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^{1000} - n}}$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

3. Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{\sqrt{n}} (x+3)^n$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} x^n$.

4. Considere a função $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. Resolva os itens.

   (a) Encontre a série de potência que representa a função $g(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

   (b) Use o item (a) para representar a função f em série de potência.

5. Considere a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\ln(n)}$. Resolva.

   (a) Usando o teste da raíz, o que você concluiu? Justifique.

   (b) Usando o teste integral, o que você concluiu? Justifique.

3.5 Reavaliação MB1-12 de dezembro de 2009

1. (a) Esboce a região delimitada pelas parábolas $y = (x+1)^2$, $y = -(x+1)^2$, $y = (x-1)^2$ e $y = -(x-1)^2$.
   (b) Encontre a área da região esboçada no item (a).

2. O ponto de interseção das diagonais de um quadrado desliza ao longo do diâmetro de um círculo de raio a. O plano do quadrado permanece sempre perpendicular ao plano do círculo, enquanto dois vértices opostos do quadrado deslizam pelo círculo. Encontre o volume do sólido obtido.

3. Calcule as integrais.
   (a) $\int \operatorname{cotg}^2 x dx$;
   (b) $\int \frac{dx}{2\text{sen}^2 x + 3\cos^2 x}$.

4. Calcule as integrais.
   (a) $\int_1^{\epsilon} (\ln x)^2 dx$;
   (b) $\int_2^3 \ln(x) dx$.

5. Calcule
$$\lim_{x\to 3} \left(\frac{x}{x-3} \int_3^x \frac{\text{sen}\, t}{t} dt \right).$$

3.6 Reavaliação MB2-12 de dezembro de 2009

1. Calcule os limites
   (a) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{2n^2+3}{8n^2+n}}$;
   (b) $\lim_{x\to\infty} \text{sen} \left(\frac{(n!)^2}{(2n)!} \right)$. Sugestão para o item (b): Use séries numéricas e o teste sobre o termo geral de uma série.

2. Calcule as integrais.

   (a) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{4x^2+12x-7}dx$;

   (b) $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^{-1}(x)dx$.

3. Considere a integral
$$\int_0^{\infty} e^{ax}\operatorname{sen}(x)dx.$$
Usando as técnicas de integração conhecidas, determine para quais valores de a a integral é convergente.

4. Dados p e q números positivos, considere a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p(n+e^n)^q}$.

   (a) Mostre que para $p+q>1$ a série converge absolutamente.

   (b) A série converge condicionalmente para todo p e q positivos? Explique.

5. Mostre que
$$\pi = 2\sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}.$$
Sugestão: Use a série de potências da função $f(x) = \operatorname{tg}^{-1}x$.