



Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática

Banco de Questões

Cálculo 1

Organizadora: Prof^a Natália Pinheiro

Maceió, Brasil
11 de Janeiro de 2011

Apresentação

O alvo principal deste Banco de Questões (extraído das avaliações escritas de turmas de Cálculo Unificado da Universidade Federal de Alagoas - UFAL) é direcionado aos estudantes da disciplina Calculo 1, que começam a voar mais alto no processo do conhecimento, a como resolver questões das provas realizadas, e a ter uma noção de quando e como aplicar o estudo do Cálculo na prática profissional.

Sumário

1	2005	4
1.1	1ª Avaliação-21 de fevereiro de 2005	4
2	2007	6
2.1	1ª Prova-15 de setembro de 2007	6
2.2	2ª Prova-05 de outubro de 2007	7
2.3	1ª Prova-06 de outubro de 2007	7
2.4	4ª Prova-01 de dezembro de 2007	8
2.5	4ª Prova-06 de dezembro de 2007	9
2.6	Reavaliação da 2ª média-07 de dezembro de 2007	10
3	2008	11
3.1	1ª Prova-14 de março de 2008	11
3.2	2ª VPA-12 de abril de 2008	12
3.3	3ª Avaliação-17 de maio de 2008	13
3.4	4ª Prova-14 de junho de 2008	14
3.5	Reavaliação da 2ª média-21 de junho de 2008	14
3.6	VPA 1-12 de setembro de 2008	15
3.7	VPA 1-13 de setembro de 2008	16
3.8	2ª Prova-03 de outubro de 2008	17
3.9	2ª Avaliação-04 de outubro de 2008	18
3.10	3ª Prova-01 de novembro de 2008	18
3.11	Reposição da 1ª Média-13 de dezembro de 2008	19
3.12	Reavaliação da 2ª média-13 de dezembro de 2008	20
3.13	Prova Final-18 de dezembro de 2008	21
4	2009	23
4.1	1ª Avaliação-21 de março de 2009	23
4.2	2ª Avaliação-17 de abril de 2009	24
4.3	2ª Avaliação-18 de abril de 2009	25
4.4	3ª Avaliação-16 de maio de 2009	25

5	2010	27
5.1	1ª Prova-03 de setembro de 2010	27
5.2	1ª Prova-04 de setembro de 2010	28
5.3	2ª Avaliação-07 de outubro de 2010	28
5.4	2ª Avaliação-09 de outubro de 2010	29
5.5	3ª Avaliação-12 de novembro de 2010	30
5.6	3ª Avaliação-13 de novembro de 2010	30
5.7	4ª Avaliação-10 de dezembro de 2010	31
5.8	4ª Avaliação-11 de dezembro de 2010	32
5.9	Reavaliação AB1-17 de dezembro de 2010	33
5.10	Reavaliação AB2-17 de dezembro de 2010	34
5.11	Reavaliação AB2-17 de dezembro de 2010	35
5.12	Avaliação Final-21 de dezembro de 2010	35

Capítulo 1

2005

1.1 1ª Avaliação-21 de fevereiro de 2005

1. Determine as assíntotas verticais e horizontais, caso existam, ao gráfico da função

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{5x^3 - 20x^2 + 15x}.$$

2. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^3 - 8};$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right);$

- (c) Use o Teorema do confronto para mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{10} \operatorname{sen} \left(\frac{50\pi}{\sqrt[3]{x}} \right) = 0.$$

3. Considere a função f , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} + 10, & x < 2, \\ 2x^3 - x, & x \geq 2. \end{cases}$$

- (a) Determine para que valores de x a função f é contínua;
 - (b) Prove que existe c tal que $f(c) = 15$.
4. Seja h a função definida por $h(x) = x|x - 1|$.
- (a) Verifique se h é diferenciável em $x_0 = 1$;
 - (b) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de h no ponto $(2, 2)$.

Capítulo 2

2007

2.1 1ª Prova-15 de setembro de 2007

- Se $f(x) = |x - 3|$, mostre que f é contínua em $x = 3$ mas não é derivável em $x = 3$.
 - Prove que existe um número real cujo quadrado é igual ao seu cubo somado com 2.
[Sugestão: Use o Teorema do Valor Intermediário]
- Determine, usando a definição de derivada de uma função em um ponto, uma equação para a reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt{2x^2 + 7x}$ em $x = 1$.
- Prove, usando a definição, que $\lim_{x \rightarrow 6} \left(3 - \frac{x}{4}\right) = \frac{3}{2}$.
 - Ache as assíntotas verticais e horizontais da curva $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2 - 1}}{3x - 4}$, se existirem.
- Calcule $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{7 + \sqrt[3]{x}} - 3}{x - 8}$.
 - Calcule os limites laterais da função $f(x) = 3 + \frac{[[x]]}{2}$ no ponto em que $x = 3$.
- Um projétil é lançado verticalmente para cima e está a s metros acima do solo, t segundos depois de ser lançado, onde $s = 256t - 16t^2$. Calcule:

- (a) A velocidade do projétil 6 segundos após o lançamento.
- (b) O tempo, em segundos, necessário para que o projétil atinja sua altura máxima (no ponto em que sua velocidade é 0 m/s).
- (c) A altura máxima que o projétil atinge.

Observação: Nesta última questão, você só deverá utilizar os conceitos adquiridos no Cálculo 1.

2.2 2ª Prova-05 de outubro de 2007

1. Considere a circunferência $x^2 + y^2 = 4$. Se um ponto P desta circunferência, no 1º quadrante, é tal que o segmento OP faz um ângulo de 75° com o eixo dos x , prove que a tangente ao círculo nesse ponto faz um ângulo de 25° com aquele eixo.

[Sugestão: Use diferenciação implícita]

2. (a) Determine $\frac{dy}{dx}$, se $3x \cdot \text{arctg}(x + y) + 107 = x^2y$.
 (b) Se $f(x) = \log_3 5^{x^2+1}$, determine $f'(x)$.
3. Encontre, no intervalo $[0, 2\pi]$, os pontos sobre o gráfico da função $f(x) = 2\text{sen}x + \text{sen}^2x$, onde a reta tangente é horizontal.
4. (a) Obtenha uma equação da reta tangente à curva $y = \frac{1}{\text{sen}x + \cos x}$, no ponto em que $x = 0$.
 (b) Ache a derivada da função $f(x) = \text{sen}^2 3^{\text{arctg}x^4}$.
5. Encontre as inclinações das retas tangentes à curva $y = 9 - x^2$, no ponto $(2, 1)$.

2.3 1ª Prova-06 de outubro de 2007

1. (a) Prove que a função $f(x) = x \text{sen} \left(\frac{1}{x} \right) - \cos \left(\frac{1}{x} \right)$ tem assíntota horizontal.

[Sugestão: faça $\frac{1}{x} = \theta$.]

- (b) Determine $\frac{dy}{dx}$, onde $x \arccos(x + y) - \pi = y^2$.
2. Obtenha uma equação de cada uma das retas que passam pelo ponto (4, 13) e que são tangentes à curva $y = 2x^2 - 1$.
3. Suponha que $f(x) = 3x + |x|$ e $g(x) = \frac{3x}{4} - \frac{|x|}{4}$. Prove que $f'(0)$ e $g'(0)$ não existem, mas $(f \circ g)'(0)$ existe.
4. (a) Obtenha uma equação para a reta tangente à curva $y = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sec x}$, no ponto em que $x = 0$.
- (b) Determine a derivada da função $f(x) = \cos[\operatorname{tg}\sqrt{\cos x}]$.
- (c) Ache a derivada da função $g(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$.
5. (a) Determine a derivada da função $f(x) = 5^{\operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x^2)}$.
- (b) Para quais valores de k a função $y = e^{kx}$ satisfaz a equação $y'' + 5y' - 6y = 0$?

2.4 4ª Prova-01 de dezembro de 2007

1. (a) Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que a equação $x^4 + 4x + 1000 = 0$ tem, no máximo, duas raízes reais.
- (b) Se f é contínua no intervalo $[2, 5]$ e $1 \leq f'(x) \leq 4$ para todo x em $(2, 5)$, mostre que $3 \leq f(5) - f(2) \leq 12$.
2. Ache os valores de a , b e c tais que a função $f(x) = ax^2 + bx - c$ tenha um valor máximo relativo de 7 em $x = 1$, e que o gráfico de $y = f(x)$ passe pelo ponto $(2, -2)$.
3. (a) Mostre que o gráfico de f , definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, é côncavo para cima se $a > 0$ e é côncavo para baixo se $a < 0$.
- (b) Se $\lim_{x \rightarrow 0^+} (cx + 1)^{\operatorname{cotg} x} = e^{-\pi}$, ache o valor de c .
4. Esboce o gráfico de $f(x) = x^2 e^{-x^2}$, depois de ter determinado suas interseções com os eixos coordenados, seus intervalos de crescimento e decréscimo, seus pontos críticos, suas concavidades e pontos de inflexão, bem como todas as suas assíntotas, se existirem.

5. (a) Encontre sobre a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ o ponto mais próximo do ponto $(0, -1)$.
- (b) Sabemos que a reta $x + y = 0$ tangencia o gráfico de uma função f em determinado ponto e que essa função é tal que $f''(x) = 3x^2$ e $f'(0) = 0$. Determine a função f .

2.5 4ª Prova-06 de dezembro de 2007

1. (a) Encontre a antiderivada mais geral da função

$$f(x) = \sqrt{x} - 7x^{-3/4} + 3e^x + 7\sec^2 x + \pi.$$

- (b) Encontre f , sabendo que $f''(x) = -3e^x + 4 \operatorname{sen} x$, $f(0) = 0$ e $f(\pi) = 0$.

2. Calcule o volume e as dimensões do cilindro circular reto de maior volume inscrito em um cone circular reto de altura 1 e raio da base 1.

3. Calcule:

(a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\cos x}$.

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right)^x$.

4. Calcule a área da região que está sob o gráfico de $f(x) = x^3 + x^2$, entre $x = 0$ e $x = 1$.

5. Faça o gráfico da função $f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{x^2}$, depois de determinar:

- (a) seu domínio;
- (b) suas interseções com os eixos coordenados;
- (c) seus extremos relativos;
- (d) seus intervalos de crescimento e decréscimo;
- (e) os intervalos onde a concavidade é para cima ou para baixo;
- (f) os pontos de inflexão;
- (g) suas assíntotas, se existirem.

2.6 Reavaliação da 2ª média-07 de dezembro de 2007

1. Despeja-se água num recipiente de forma cônica, à taxa de $8 \text{ cm}^3/\text{min}$. O cone tem 20 cm de profundidade e 10 cm de diâmetro em sua parte superior. Se existe um furo na base e o nível da água está subindo à taxa de $1 \text{ mm}/\text{min}$, determine com que velocidade a água está escoando, quando estiver a 16 cm do fundo.
2. (a) Obtenha uma equação para a reta tangente à curva $x^y = y^x$, no ponto em que $x = 1$.
(b) Ache o ponto sobre a curva $y = \cosh x$ no qual a reta tangente tem inclinação igual a 1.
3. (a) Para quais valores de a e b a função $f(x) = axe^{bx^2}$ tem um valor máximo no ponto $(2, 1)$?
(b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{b/x}$.
4. Um cilindro circular reto é gerado pela rotação de um retângulo de perímetro 20 em torno de um de seus lados. Que dimensões deve ter o retângulo para gerar o cilindro de volume máximo?
5. Através das derivadas, estude o que for importante e faça o gráfico de $y = \frac{2x^2}{9 - x^2}$.

Capítulo 3

2008

3.1 1ª Prova-14 de março de 2008

1. Encontre uma equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ no ponto $(-2, 1/4)$.

2. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x - \pi)}{\operatorname{sen} x}$;

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3 + 2x)^2}{(2x - 1)^3 \cdot (x^3 - 1)}$;

(c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x - \sec x + \cos x}{\cos x}$.

3. Sejam f e g funções contínuas em $[-2; 5]$ tais que $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 7$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 4$ e $\lim_{x \rightarrow 5^-} g(x) = 5$.

(a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{g^2(x) - 25}{g(x) - 5}$;

(b) Calcule $(g - f)(-2)$ e $(g - f)(5)$;

(c) Use o item (b) e o Teorema do Valor Intermediário para provar que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = g(c)$.

4. Ache um número real b de modo que a função

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x + 5, & x \leq 2, \\ -x^2 + bx + (1 - b), & x > 2 \end{cases}$$

seja contínua em $x = 2$. Para este valor de b , f é contínua em \mathbb{R} ? Justifique.

5. Determine as assíntotas horizontais e verticais da função $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$.

3.2 2ª VPA-12 de abril de 2008

1. Seja $f(x) = 1 + \operatorname{sen}x + \frac{\operatorname{sen}^2x}{2} + \frac{\operatorname{sen}^3x}{3} + \dots + \frac{\operatorname{sen}^{10}x}{10}$.

(a) Calcule $f'(x)$.

(b) Ache $f'(\frac{\pi}{6})$.

(c) Existe algum $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $f'(x) = \cos x$?

2. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \leq 1, \\ ax + b, & x > 1. \end{cases}$$

(a) Encontre uma relação entre a e b de modo que f seja contínua em $x = 1$.

(b) Use a relação encontrada no item (a) para calcular a e b , de modo que f seja diferenciável em $x = 1$.

[Sugestão: Calcule as derivadas laterais de f em $x = 1$.]

3. (a) Ache y' onde $x^2 - xy + \frac{3}{2}y^2 = \frac{15}{2}$.

(b) Onde a reta normal à curva dada no ponto $(-2, 1)$ intercepta a curva uma segunda vez?

4. (a) Obtenha uma equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = 10^{x^2+x+1}$ no ponto $(0, 10)$.

- (b) Se $H(x) = e^{[f(x)]^2}$ e $f(1) = f'(1) = 1$, determine uma equação da reta tangente ao gráfico de H no ponto correspondente a $x = 1$.
5. (a) Obtenha uma equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \operatorname{cosec}x + \operatorname{cotg}x$ no ponto $x = \frac{\pi}{4}$.
- (b) Determine a derivada da função $g(x) = \operatorname{sen}^2(\cos(x^2 + 1))$.

3.3 3ª Avaliação-17 de maio de 2008

1. (a) Use diferenciação logarítmica para achar a derivada da função $f(x) = x^{\ln x}$.
- (b) Determine a abscissa do ponto no qual a reta tangente à curva $y = \operatorname{cosh} x$ faz com o eixo- x um ângulo de $\frac{\pi}{4}$ radianos.
2. Um homem com 1,8 m de altura caminha em direção a um edifício, com velocidade de 1,5 m/s . Se existe um ponto de luz no chão a 15 m do edifício, com que velocidade a sombra do homem no edifício estará diminuindo, quando ele estiver a 9 m do edifício?
3. (a) Use diferenciais para estimar (calcular aproximadamente) o número $\sqrt[3]{8,01}$.
- (b) Seja g derivável em toda a reta \mathbb{R} , crescente em $(0, +\infty)$ e decrescente em $(-\infty, 0)$. Determine onde $f(x) = g(x^2)$ é crescente e onde é decrescente.
4. Prove que a função $f(x) = e^{\frac{x^4}{4} - 6x^2 + ax}$ tem, no máximo, um ponto crítico no intervalo $(-1, 1)$, para qualquer valor de a .
5. (a) Dada a função $f(x) = -\frac{x}{(x-2)^2}$, determine:
- (1) O domínio de f ;
 - (2) As intersecções com os eixos;
 - (3) As assíntotas, caso existam;
 - (4) Os intervalos de crescimento e decrescimento;
 - (5) Os pontos de inflexão e as concavidades;
- (b) Trace o gráfico de f .

3.4 4ª Prova-14 de junho de 2008

1. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{x+1} \right]^x$;

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right]$.

2. Sabendo-se que $f'(x) = 3x^2$ e que a reta $y = 3x$ é tangente ao gráfico de f em algum ponto, encontre $f(x)$. Observação: Você poderá encontrar mais de uma função com essas características.

3. Determine os pontos P da circunferência $x^2 + y^2 = 25$ tais que a soma das distâncias de P aos pontos $A = (-2, 0)$ e $B = (2, 0)$ seja

(a) máxima;

(b) mínima.

4. (a) Calcule a área da região delimitada pelo gráfico da função $f(x) = x - 2$, pelo eixo- x e pelas retas $x = 1$ e $x = 5$. Não precisa usar somas de Riemann.

(b) Calcule a integral $\int_1^5 (x - 2) dx$.

(c) Usando Somas de Riemann, calcule $\int_0^2 (x - 2) dx$.

5. Dada a função $f(x) = \frac{x^3}{1 - x^2}$, sabe-se que $f'(x) = \frac{x^2(3 - x^2)}{(1 - x^2)^2}$ e que

$f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3)}{(1 - x^2)^3}$. Indique os intervalos de crescimento e decrescimento, os pontos críticos de máximo e mínimo, os intervalos onde a concavidade é voltada para cima e os em que ela é voltada para baixo, bem como os pontos de inflexão e as assíntotas, caso existam. Feito isso, trace o gráfico.

3.5 Reavaliação da 2ª média-21 de junho de 2008

1. (a) Suponha que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf'''(x)}{f''(x)} =$
 1. Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf'(x)}{f(x)}$.
 - (b) Determine o valor de c para o qual $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = 4$.
2. Use o Cálculo para encontrar os valores máximos e mínimos da função $f(x) = e^{x^2-x}$, no intervalo $[0, 1]$.
3. Ache os valores de a , b e c , tais que a função definida por $f(x) = ax^2 + bx - c$ tenha um valor máximo igual a 7, quando $x = 1$ e de tal sorte que o gráfico passe pelo ponto $(2, -2)$.
4. Às 13 horas um navio A está a 100 km ao Norte de um navio B . O navio A está navegando para o Sul a 20 km/h, enquanto que o navio B está navegando para o Leste a 15 km/h. Determine se os navios estão se aproximando ou afastando às 16 h e com que velocidade isto está ocorrendo.
5. Determine as dimensões do retângulo de maior área que pode ser inscrito na elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

3.6 VPA 1-12 de setembro de 2008

1. Seja a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ cx + k, & 1 < x < 4, \\ -2x, & x \geq 4. \end{cases}$$

- (a) Encontre os valores de c e k que tornam a função f contínua nos reais.
- (b) Esboce o gráfico desta função.
2. (a) Encontre a derivada da função $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, usando a definição.
- (b) Determine uma equação da reta tangente à curva no ponto em que $y = 4$.

3. (a) Determine as assíntotas da curva $f(x) = \frac{x - 9}{\sqrt[4]{16x^4 + 3x + 2}}$.

(b) Determine, se existirem, as assíntotas verticais da curva

$$y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}.$$

O gráfico assintota a reta assintota por ambos os lados? Justifique.

4. (a) Calcule o limite: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2|}{x^3 - 8}$.

(b) Usando o teorema do confronto, mostre que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt[3]{x} \cdot 2^{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}) = 0.$$

5. A reta tangente à curva $y = \frac{1}{x}$ no ponto de abscissa a , com $a > 0$, e as retas $x = 0$ e $y = 0$ determinam um triângulo. Calcule sua área.

3.7 VPA 1-13 de setembro de 2008

1. (a) Usando a definição, verifique se a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1, \\ -\frac{x^2}{2} + 4, & 1 < x \leq 4, \\ 2, & x > 4 \end{cases}$$

é contínua nos reais.

(b) Esboce o gráfico desta função para confirmar o resultado do item (a).

2. (a) Encontre a derivada da função $f(x) = \frac{5 - 3x}{x - 2}$, usando a definição.

(b) Determine uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $(3, -4)$.

3. (a) Determine as assíntotas da curva $h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

(b) Calcule o limite: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})$.

4. Calcule os limites:

(a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{|x - a|}$.

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6 - x} - 2}{\sqrt{3 - x} - 1}$.

5. (a) Se $|g(x) + 4| < 2(3 - x)^4$ para todo x real, calcule $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$.

(b) Determine as assíntotas verticais da curva $h(x) = \frac{1}{x^2 + 5x + 6}$.

3.8 2ª Prova-03 de outubro de 2008

1. (a) Ache a derivada da função $f(x) = \ln |\cos \sec(3x) \cotg(3x)|$.

(b) Encontre uma equação da reta tangente à curva $x \operatorname{sen} y + \cos 2y = \operatorname{sen} x$, no ponto $(0, \pi/4)$.

2. Usando diferenciação logarítmica, calcule $f'(0)$, sendo $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}(2-x)^5}{(x+3)^4}$.

3. (a) Sendo $y = \log_3(\log_2 x)$, calcule $f'(2)$.

(b) Determine $\frac{dy}{dx}$, se $y = |x|^{e^{x^2}}$.

4. (a) Onde a reta tangente à curva $y = \operatorname{senh}(x)$ possui inclinação 1?

(b) Se $f(x) = 2^{\operatorname{arctg} x^2}$, calcule $f'(1)$.

5. (a) Seja $f(x) = a \operatorname{sen} x + b \cos x + \operatorname{ctg} x$ tal que $f(0) = 2$, $f'(\pi) = 0$ e $f''(\pi/6) = 4$. Calcule a , b e c .

(b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2 + x - 2}$.

3.9 2ª Avaliação-04 de outubro de 2008

1. Usando a diferenciação logarítmica, derive

$$y = \frac{\cos^2 x \cdot \operatorname{tg}^4 x}{(e^{2x} + 1)^3}.$$

2. Sabendo que a equação $x^2 y^2 + xy = 2$ define implicitamente y como função de x , pergunta-se: Existe algum ponto sobre a curva no qual a reta tangente é paralela à reta $y = 5$?
3. (a) Determine a equação da reta tangente à curva $y = 3^{\cos(2x)}$, no ponto em que $y = 1$, com $0 \leq x \leq \pi/2$.
(b) Seja $y = (\ln x)^{\operatorname{sen}(2x)}$. Determine $\frac{dy}{dx}$.
4. (a) Se $y = \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-x^2})$, determine $\frac{dy}{dx}$, sendo $0 < x < 1$.
(b) Se $f(x) = \frac{\log_{\pi} x}{x^2}$, determine $f'(1)$.
5. (a) Sendo $y = x \operatorname{tgh}(\sqrt{x})$, determine a equação da reta normal a essa curva no ponto $(0, 0)$.
Observação: A reta normal à curva C em um ponto P é, por definição, a reta que passa por P e é perpendicular à reta tangente a C em P .
(b) Se $f(x) = \arccos\left(x - \frac{x^3}{3}\right)$, determine $f''(1/2)$.

3.10 3ª Prova-01 de novembro de 2008

1. (a) Ache uma linearização para a função $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$, em torno de $a = 7$.
(b) Aproxime $\ln(1,08)$, por diferenciais.
2. Dada a função $f(x) = 2\operatorname{sen}x + \cos(2x)$, com $-\pi \leq x \leq \pi$, determine:
(a) os números críticos de f ;

- (b) os valores máximos e mínimos absolutos de f , no intervalo dado.
3. (a) Dada a função $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$, mostre que não existe $c \in [0, 5]$ tal que $f'(c) = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0}$. Por quê este fato não contradiz o Teorema do Valor Médio?
- (b) Mostre que a função $f(x) = x^3 + 9x^2 + 33x - 8$ possui exatamente uma raiz real.
4. Uma partícula move-se ao longo da curva $y = \sqrt{1+x^3}$. Quando ela atinge o ponto de ordenada 3, a coordenada y está crescendo a uma taxa de 4 m/s. Quão rápido está variando a coordenada x do ponto nesse instante?
5. A que razão está mudando o volume de uma esfera no instante em que a área de sua superfície está aumentando à razão de $4 \text{ cm}^2/\text{min}$ e o raio está aumentando à razão de $0,1 \text{ cm}/\text{min}$?

3.11 Reposição da 1ª Média-13 de dezembro de 2008

1. (a) Obtenha a equação da reta normal à curva $y = e^{\cosh x}$ no ponto em que $y = e$.
- (b) Encontre as assíntotas horizontais e verticais da curva $y = \frac{\sqrt{3x^2 + 2}}{4x - 3}$.
2. (a) Dada a função $f(x) = x \cdot |x|$, para que valores de x a função f é diferenciável?
- (b) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 25x} - x)$.
3. (a) Ache uma relação entre a e b de modo que a função

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 2, \\ 2x^2 - 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

seja contínua em $x = 2$.

- (b) Depois de respondido o item (a), encontre valores de a e b para que a função f seja derivável em $x = 2$.
4. (a) Encontre a reta tangente à curva $x^3 + y^3 = 6xy$ no ponto $(3, 3)$.
- (b) Em quais pontos sobre a curva acima a reta tangente é horizontal?
5. (a) Sendo $y = \text{sen}(\text{tg}\sqrt{\text{sen}x})$, calcule y' .
- (b) Se $f(x) = 2^{3x^2}$, determine $f'(1)$.

3.12 Reavaliação da 2ª média-13 de dezembro de 2008

1. Um retângulo está inscrito em um círculo de 5 cm de raio. Se o comprimento do retângulo está diminuindo à razão de 2 cm por segundo, com que rapidez a área está variando, no instante em que o comprimento do retângulo for de 6 cm?
2. Encontre as dimensões e o volume do cone reto invertido, de maior volume, inscrito em um cone reto de altura H e raio da base R , estando o vértice do cone invertido no centro da base do cone maior.
3. (a) Usando a definição de integral definida, mostre que $\int_a^b (x+5)dx = \frac{b^2 - a^2}{2} + 5(b - a)$.
- (b) Prove que $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ tem uma única raiz real.
4. Esboce o gráfico da função $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$, depois de desenvolver os procedimentos necessários, tais como limites e derivadas.
5. Determine:
- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} (2x + 1)^{1/\text{sen}x + x^2}$
- (b) $f(x)$, onde $f''(x) = -\pi + x^{2/3} + 2 \cos x - e^x$, $f'(0) = 1$ e $f(0) = e$.

3.13 Prova Final-18 de dezembro de 2008

1. Considere um trapézio retângulo cuja base menor tem 2 cm. A altura do trapézio cresce a uma taxa de 1 cm/min, enquanto que sua área cresce a uma taxa de $6 \text{ cm}^2/\text{min}$. A que taxa está variando a base maior do trapézio, quando sua altura é de 10 cm e a área de 50 cm^2 ?

2. (a) Estude a continuidade, nos reais, da função

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & x \geq 0 \\ \ln(1-x^2), & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{1+x^2}, & x \leq -1. \end{cases}$$

- (b) Prove que $f(x) = \operatorname{tg}x - \operatorname{cotg}x - x$ tem uma única raiz no intervalo $(0, \pi/2)$.

3. (a) Calcule $f'(\frac{\pi^2}{16})$, onde $f(x) = \sqrt{\sec \sqrt{x}}$.

- (b) Dada a função $f(x) = 2^{\arctg(\operatorname{senh}x)}$, determine $f'(0)$.

4. Sendo $f(x) = \left(\frac{x}{\cos x}\right)^x$, calcule:

- (a) $f'(x)$;

- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

5. (a) Encontre a equação da reta tangente à curva $x^2(x^2-9) = y^2(y^2-1)$ no ponto $(-3, 1)$.

- (b) Existe algum ponto da curva $y = (\ln x)^3$ onde a segunda derivada vale zero? Se existir, identifique-os.

6. Existe algum ponto onde a função $f(x) = 3x - x^2 + |2x - 4|$ não é diferenciável?

Ache a derivada de f nos pontos onde ela é diferenciável.

7. Um fazendeiro deseja cercar um lote retangular de 1800 m^2 . Deseja também construir duas cercas divisórias internas, paralelas a dois dos lados da cerca externa. Qual é o comprimento total mínimo da cerca que o projeto exige?

Certifique-se de que sua resposta dá o mínimo absoluto.

8. (a) Sabemos que se f é contínua em $[a, b]$ e se $m \leq f(x) \leq M$, então

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a).$$

Com base nessa propriedade, mostre que $2 \leq \int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^2}dx \leq 2\sqrt{2}$.

- (b) Determine $f(x)$, onde $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{x} - 2\text{sen}x$ e $f(1) = 0$.

9. Um cilindro circular reto tem 6 m de raio e 10 m de altura. Se o raio tiver uma variação, para mais, de 2 cm, use diferenciais para estimar de quanto variará seu volume.
10. Depois de fazer as análises necessárias, esboce o gráfico da função $f(x) = \frac{(x + 1)^2}{x^2 + 1}$.

Capítulo 4

2009

4.1 1ª Avaliação-21 de março de 2009

1. (a) Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} kx - 3, & x \leq -1, \\ x^2 + k, & x > -1, \end{cases}$$

ache o valor de k para que exista $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

(b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|2x - 1| - |2x + 1|}{x}$.

2. Dada a função $f(x) = \frac{x^3 + 7x^2 + 12x}{x^2 + 2x - 3}$,

(a) analise a continuidade de f em \mathbb{R} ;

(b) calcule os limites laterais em torno dos pontos de descontinuidade para verificar se a curva possui, ou não, assíntotas verticais. Em caso afirmativo, escreva as equações das assíntotas.

3. (a) Usando o Teorema do Confronto, mostre que $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} 2^{\cos \frac{\pi}{x}} = 0$.

(b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{16 - x}{4 - \sqrt{x}}$.

4. Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} x + 2c, & x < -2, \\ 3cx + k, & -2 \leq x \leq 1, \\ 3x - 2k, & x > 1, \end{cases}$$

ache os valores de c e k , de modo que ela seja contínua em -2 e em 1 . Para os valores de c e k encontrados, a função é contínua em todos os reais?

5. (a) Mostre que a função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ é contínua no intervalo fechado $[-2, 2]$.

(b) Se $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9$, use o Teorema do Valor Intermediário para provar que existe um número real tal que $f(x) = 100$.

4.2 2ª Avaliação-17 de abril de 2009

1. Deve-se drenar uma piscina para limpeza. Se Q representa o número de litros d'água na piscina t minutos após o início da drenagem, e $Q = 200(30 - t)^2$, use a definição de derivada para calcular a velocidade de escoamento da água em $t = 10$ min.

Qual é a velocidade média de escoamento durante os 10 primeiros minutos?

2. Determine a equação da reta tangente à curva dada pela equação $xy^2 + \sqrt{xy} = 2$, no ponto de ordenada igual a 1.

3. Ache as equações das retas tangentes ao gráfico de $f(x) = x^2 + 1$ que passam pelo ponto $(1, 1)$.

4. A reta normal a uma curva C em um ponto P é, por definição, a reta que passa por P e é perpendicular à reta tangente a C em P . Obtenha a equação da reta normal à curva $f(x) = 2^{\text{tg}(\text{sen}x^3)}$ no ponto de ordenada 1.

5. Em quais números a seguinte função é derivável?

$$f(x) = \begin{cases} -1 - 2x, & x < -1, \\ x^2, & -1 \leq x \leq 1, \\ x, & x > 1, \end{cases}$$

Dê uma expressão para a função f' .

4.3 2ª Avaliação-18 de abril de 2009

1. Determine as assíntotas horizontais do gráfico de $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2 + 2}}{4x + 6}$.
2. Obtenha a reta tangente à curva dada pela equação $\cos(x + y) = y$, no ponto $P = (\pi/2, 0)$.
3. Determine o valor de a para que a função

$$f(x) = \begin{cases} ax - 9, & x < 2 \\ 2x^2 - 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

seja derivável em $x = 2$.

4. (a) Mostre que $\frac{d}{dx} \left[\sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}} \right] = \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x}$, sendo que $x \in (0, \pi/2)$.
(b) Se $f(x) = e^{\operatorname{tg} \sqrt{\operatorname{sen} x}}$, determine $f'(x)$.
5. Um objeto anda em linha reta e sua posição no instante t vem dada pela função $s(t) = \frac{2 - t}{2 + t}$. Calcule a velocidade desse objeto em um instante t arbitrário, usando para isto a definição de derivada.

4.4 3ª Avaliação-16 de maio de 2009

1. (a) Encontre uma expressão para a variação da superfície total de um cone circular reto quando o raio permanece constante e a altura sofre uma pequena variação Δh .

[Fórmula para a área total do cone: $S = \pi R^2 + \pi Rg$]

- (b) Encontre os valores máximos e mínimos locais e absolutos de

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x < 0 \\ 2 - x^2, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

2. (a) Calcule a seguinte derivada: $\frac{d}{dx} \left(\sqrt{a^2 - x^2} + a \cdot \arcsen \left(\frac{x}{a} \right) \right)$.

- (b) Sendo $f(x) = x^{\sinh(x^2)}$, determine $f'(x)$.
3. (a) Use diferenciação logarítmica para calcular a derivada de $y = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{(x+2)\sqrt{x+3}}$.
- (b) Sendo $f(x) = \log_3(x^2 - \sin x)$, determine $f'(\pi/2)$.
4. Uma bola de ferro, esférica, com 8 cm de diâmetro, está coberta com uma camada de gelo de espessura uniforme. Se o gelo derrete com uma taxa de $10 \text{ cm}^3/\text{min}$, a que taxa a espessura do gelo diminuirá quando a espessura da mesma for de 2 cm?
5. (a) Mostre que 5 é um número crítico da função $f(x) = 2 + (x - 5)^3$, mas que $g(5)$ não é máximo nem mínimo local.
- (b) Encontre os valores máximos e mínimos absolutos da função $f(x) = (x^2 - 2)^{2/3}$, no intervalo $[-1, 2]$.

Capítulo 5

2010

5.1 1ª Prova-03 de setembro de 2010

1. Calcule, se existirem, os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{5x^3 - 135}{(x - 3)^4}$;

(b) $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x^{\frac{1}{4}} - 2}$.

2. Encontre, caso existam, as assíntotas horizontais e verticais da curva

$$y = \frac{x^3 + 2x^2 + x}{(x^2 + 4x + 3)(x^2 - 9)}.$$

3. Analise a continuidade da função $f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 - 2x - 15}$ e indique os tipos de descontinuidades encontradas.
4. Ache todos os pontos sobre o gráfico de $g(x) = 1 - x^2$ nos quais a reta tangente passa pelo ponto $(2, 0)$. Não utilize propriedades de derivadas para obter as inclinações das retas tangentes.
5. (a) Calcule a função derivada de $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ e determine seu domínio.
(b) Existe algum número real que elevado ao quadrado dê seu cubo mais cinco?

5.2 1ª Prova-04 de setembro de 2010

1. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x} \right);$

(b) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}.$

2. Determine, se existirem, as assíntotas horizontais e verticais da curva

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x - 12}}.$$

3. Encontre os valores de a e b para que a função f seja contínua em \mathbb{R} .

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x \leq 2, \\ \frac{2x^2 + 4x - 16}{x^2 - x - 2}, & 2 < x < 5, \\ bx + 2a + 1, & x \geq 5. \end{cases}$$

4. (a) Calcule os coeficientes angulares das retas tangentes às curvas $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = x^2$, no ponto de interseção dos gráficos destas curvas. Qual o ângulo entre estas retas?

(b) Enuncie o Teorema do Valor Intermediário.

5. Verifique quais os intervalos reais em que a função $f(x) = |x^2 - 4|$ é diferenciável. Use a definição de derivada para calcular $f'(x)$.

5.3 2ª Avaliação-07 de outubro de 2010

1. Determine a área do triângulo formado pelo eixo- x e pelas retas tangentes ao círculo $x^2 + y^2 = 2$ nos pontos de interseção do círculo com a parábola de equação $y = x^2$.

2. (a) Se $f(x) = \frac{e^{5x+2}}{\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}$, encontre o coeficiente angular da reta tangente a f no ponto em que $x = 0$.

- (b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}}$. **Sugestão:** Tome $t = -2x$.
3. (a) Ache $f'(1)$ sabendo que $f(x) = x^{\ln h(x)}$, $x > 0$, e que $h(1) = e$.
- (b) Mostre que $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ para $f(x) = \frac{1}{x}$.
4. (a) Obtenha a equação da reta tangente à curva $y = \operatorname{arccotg}(2^x)$ no ponto de abscissa nula.
- (b) Estabeleça o valor de m para o qual a função $y = \cos 3x$ satisfaz a equação $y^{(4)} + my = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
5. Calcule:
- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x^3 - 1)}{x - 1}$;
- (b) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\cos t^2 - 1}{t}$.

5.4 2ª Avaliação-09 de outubro de 2010

1. (a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{\ln x^2}$.
- (b) Calcule $f'(x)$, se $f(x) = \pi^{x \cdot \operatorname{tg} x}$.
2. (a) Encontre todos os pontos da curva $x^2 + y^2 = 4$ onde as retas tangentes são paralelas à reta de equação $x + y = 2$.
- (b) Determine uma equação da reta normal à curva $x^2 - \log^2(y+1) = 0$ no ponto $(1, 9)$.
3. (a) Sendo $f(x) = (x^2 + 1)^{\cos x}$, determine $f'(x)$.
- (b) Se $f(x) = e^{2x}$, mostre que $f(0) + f'(0) + f''(0) + \dots + f^{(n)}(0) = 2^{n+1} - 1$.
4. (a) Se f é uma função invertível, definimos sua inversa como sendo a função f^{-1} tal que $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, isto é, $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$. Supondo f diferenciável e $f'(x) \neq 0$, aplique a Regra da Cadeia (ou derivação implícita) para mostrar que $[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)}$.

- (b) Calcule a derivada da função $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, usando a fórmula do item anterior.
5. A reta tangente à curva $y = e^{-\operatorname{arctg}x}$, no ponto em que $x = a$, intercepta o eixo- x . Se a abscissa desse ponto de intersecção com o eixo- x é b , mostre que $b = a^2 + a + 1$.

5.5 3ª Avaliação-12 de novembro de 2010

1. (a) Calcule uma equação para a reta normal ao gráfico de $y = e^{\operatorname{tgh}(3x)}$ em $x = 0$ e determine a intersecção dessa reta com o eixo- x .
- (b) Usando o Teorema de Rolle, mostre que a função $f(x) = \operatorname{senh}(x)$ não pode possuir mais de uma raiz real.
2. A área de um círculo decresce a uma taxa de $1\text{m}^2/\text{s}$. Determine a taxa de variação da área do quadrado inscrito neste círculo.
3. (a) Enuncie o Teorema do Valor Médio.
- (b) Mostre que $2\operatorname{arcsen}(x) - \operatorname{arccos}(1 - 2x^2) = 0$, para todo x tal que $|x| \leq 1$.
4. Determine os valores máximos e mínimos absolutos e locais da função $f(x) = |x^2 - 8x + 12|$, no intervalo $[0, 5]$.
5. O raio de uma esfera é de 20cm. Estimar, através de diferenciais, o valor do volume com que fica a esfera ao aplicarmos uma camada de tinta de 0,1cm.

5.6 3ª Avaliação-13 de novembro de 2010

1. Um corredor treina em uma pista em forma de elipse, com equação $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Ele parte do ponto da curva de coordenadas $(0, 3)$, no sentido horário. Após certo tempo, o ângulo formado pela direção positiva do eixo- y e pela reta que passa por ele e pela origem é de $\frac{\pi}{4}$ radianos. Nesse instante, a distância do corredor ao eixo- y está aumentando a uma taxa de 16m/s. De quanto está variando a distância dele ao eixo- x ?

2. (a) Ache a abscissa do ponto de intersecção das curvas $f(x) = \cosh x$ e $g(x) = \sinh(2x)$.
 (b) Existe algum número $c \in (1, 2)$ tal que a reta tangente a $y = \ln x$ em c seja paralela à reta secante que passa pelos pontos $(1, 0)$ e $(e, 1)$?
3. Determine os valores máximos e mínimos absolutos e locais da função $f(x) = 2\sin x + \cos(2x)$, no intervalo onde $|x| \leq \pi$.
4. (a) Um engenheiro precisa encontrar o valor de $\sqrt[10]{e}$. Como ele não tem calculadora, precisará usar diferenciais (aproximações lineares) para estimar esse valor. Você poderia ajudá-lo?
 (b) Calcule a derivada da função $f(x) = e^{\sinh(x^2-1)}$ em $x = 1$.
5. (a) Enuncie o Teorema de Rolle;
 (b) Seja

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{2}{\pi}x + 2, & \text{se } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

Mostre que $f(0) = f(\pi)$ e que não existe $c \in (0, \pi)$ tal que $f'(c) = 0$. Por que isso não contradiz o Teorema de Rolle?

5.7 4ª Avaliação-10 de dezembro de 2010

1. Calcule os seguintes limites:
 - (a) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$;
 - (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln[\cos(x-1)]}{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$.
2. Uma cartolina branca tem uma área de 900cm^2 . Queremos imprimir um texto sobre ela, deixando margens de 3cm na base inferior e nas laterais e uma margem de 5cm na base superior. Quais as dimensões da cartolina que darão a maior área impressa?

3. Seja $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4} + 1$. Sabendo que $f'(x) = \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2}$ e que $f''(x) = \frac{24x^2 + 32}{(x^2 - 4)^3}$, determinar:
- As intersecções com os eixos coordenados.
 - As assíntotas que existirem.
 - Os intervalos de crescimento e decrescimento.
 - Os valores máximos e mínimos locais de f .
 - Os intervalos onde f é côncava para cima, os intervalos onde f é côncava para baixo e seus pontos de inflexão.
 - Esboce a curva usando as informações dos itens anteriores.
4. (a) Para quais valores de a e b a função $f(x) = axe^{bx^2}$ tem, em $x = 2$, o valor máximo $f(2) = 1$?
- (b) Ache a área máxima de um triângulo cujo comprimento da base mais a altura é 2cm.

5.8 4ª Avaliação-11 de dezembro de 2010

- Calcule os seguintes limites:
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + x)^{1/x}$;
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x)$.
- (a) Mostre que a função $f(x) = x|x|$ tem um ponto de inflexão de $(0, 0)$, mas $f''(0)$ não existe.
- (b) Determine o ponto da curva $y = \sqrt{x}$ que está mais próximo de $(1, 0)$.
- Um pedaço de fio com 10m de comprimento é cortado em duas partes. Uma parte é dobrada no formato de um quadrado, ao passo que a outra é dobrada na forma de um triângulo equilátero. Como deve ser cortado o fio de forma que a área total englobada seja: (a) máxima? (b) mínima?

4. Seja $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$. Sabendo que $f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3}$ e que $f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4}$, determinar:
- As intersecções com os eixos coordenados.
 - As assíntotas que existirem.
 - Os intervalos de crescimento e decréscimo.
 - Os valores máximos e mínimos locais de f .
 - Os intervalos onde f é côncava para cima, os intervalos onde f é côncava para baixo e seus pontos de inflexão.
 - Esboce a curva usando as informações dos itens anteriores.

5.9 Reavaliação AB1-17 de dezembro de 2010

1. Sem usar a Regra de L'Hôpital, calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1}{1 - x};$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{5+x} - \sqrt[3]{5}}{x}.$

2. Determine a e b de tal modo que f seja contínua em todos os reais, onde

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{se } x \leq 2, \\ ax + b, & \text{se } 2 < x < 5, \\ -6x, & \text{se } x \geq 5. \end{cases}$$

3. (a) Se $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 1, & \text{se } x > 1, \end{cases}$ ache $f'(x)$ e $f''(x)$.

- (b) Sejam $f(x) = e^{\text{tg}(g(x))}$, $g(0) = 0$ e $g'(0) = 3$. Determine $f'(0)$.

4. (a) Se $g(x) = f^{-1}(x)$, nós sabemos que $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$. Lembre-se? Então, sendo $f(x) = x^5 + 3x^3 - 1$, calcule $g'(-5)$. Se esta informação puder lhe ajudar, use-a: -1 é raiz da equação $x^5 + 3x^3 + 4 = 0$.
- (b) Sendo $f(x) = (\sec x)^{\frac{\cos x^2 - 1}{x^3 + 1}}$, determine $f'(0)$.
5. Determine as assíntotas horizontais do gráfico de $f(x) = \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - x - 6}}$.

5.10 Reavaliação AB2-17 de dezembro de 2010

- Cada aresta de um cubo está aumentando a uma taxa de $6\text{cm}/\text{seg}$. Com que taxa o volume do cubo estará aumentando, quando a área total do cubo for 24cm^2 ?
- Um sólido é formado retirando-se concavidades semi-esféricas das extremidades de um cilindro. Se a área total do cilindro é de $28\pi\text{cm}^2$, ache o raio do cilindro que maximiza o volume do sólido.
- Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\text{sen } x)}{(\pi - 2x)^2}$;

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cosh x}{x^2}$.

4. Mostre que:

(a) A função $f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$ não tem máximo nem mínimo local;

(b) $\cosh(\ln x) = \frac{x^2 + 1}{2x}$.

5. (a) Se $f(x) = ax^3 + bx^2$, determinar a e b de forma que o gráfico de f tenha um ponto de inflexão em $(1, 2)$.

(b) Dada a função $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{se } x < 2 \\ 7 - x^2, & \text{se } x \geq 2, \end{cases}$ calcule seus valores extremos absolutos no intervalo $[0, 3]$.

5.11 Reavaliação AB2-17 de dezembro de 2010

1. Um triângulo tem vértices em $(-2, 0)$, $(3, 0)$ e (x, y) , onde (x, y) é um ponto da parábola $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$ e $y \geq 0$. Determine o ponto (x, y) para o qual a área desse triângulo seja máxima.
2. Um homem anda ao longo de um caminho reto a uma velocidade de $1,5m/s$. Um holofote localizado no chão a $6m$ do caminho é mantido focalizado no homem. A que taxa o holofote está girando quando o homem está a $8m$ do ponto do caminho mais próximo da luz?
3. Calcule os seguintes limites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}};$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}.$$

4. (a) Ache os valores máximos e mínimos absolutos, se existirem, da função $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$, restrita ao intervalo $[-4, -1]$.
(b) Verifique os intervalos de crescimento da função $f(x) = \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x$, quando restrita ao intervalo $[0, 2\pi]$. Verifique também o comportamento da concavidade.
5. (a) Mostre que a função $f(x) = 4x^5 + 3x^3 + 3x - 2$ possui exatamente uma raiz real.
(b) Ache uma aproximação para $\operatorname{senh}(0,002)$.

5.12 Avaliação Final-21 de dezembro de 2010

1. Uma longa faixa de metal com $8cm$ de largura deve ser transformada numa calha virando para cima dois lados, em ângulos retos com relação à base. Se a calha deve ter capacidade máxima, quantos centímetros devemos virar para cima nos lados?

2. Três amigos se despediram ao meio dia e foram para casa. Um deles estava de moto, o outro de carro e o terceiro de bicicleta. O que viajava de carro saiu para o norte com velocidade de 50km/h , o que estava de moto viajou para o leste com velocidade de 30km/h e o último foi para o sul com velocidade de 10km/h . Passadas duas horas, qual a taxa de variação da área do triângulo formado pela posição dos três amigos?

3. Calcule, sem usar a Regra de L'Hôpital, os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x^2 - 3x + 2) \arccos(x)}{x^2 - 1};$

(b) $\lim_{x \rightarrow -\pi^+} 3^{\text{tg}(\frac{x}{2})} \cdot \text{sen}x.$ [Sugestão: Use o Teorema do Confronto].

4. Seja $f(t) = \begin{cases} mt - 2, & \text{se } 1 \leq t \leq 2 \\ t^4 - 4, & \text{se } 2 < t \leq 3 \\ \frac{\sqrt{t+1} - 2}{t-3}, & \text{se } 3 < t \leq 4. \end{cases}$

(a) Determine $m \in \mathbb{R}$ que torna $f(t)$ contínua em $t = 2$.

(b) A função f , para m como no item anterior, é contínua em $[1, 4]$? Justifique sua resposta.

5. (a) Suponha que f seja uma função derivável tal que $f(g(x)) = x$ e $f'(x) = 1 + (f(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Mostre que $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

(b) Usando diferenciação logarítmica, calcule a derivada da função $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$.

6. Considere a função f tal que $f''(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 1}$.

(a) Determine os intervalos onde a concavidade está voltada para cima ou para baixo, bem como os pontos de inflexão de f .

(b) Determine os intervalos onde f' é crescente e onde f' é decrescente.

(c) Aponte os pontos de máximo e mínimo relativos de f' .

7. Determine a equação das retas tangentes à circunferência $x^2 + y^2 = 1$, que passam pelo ponto $(1, 2)$.
8. Dada a função $f(x) = 2x - 1 - \cos x$, mostre que ela possui exatamente uma raiz real.
9. Calcule os seguintes limites:
- (a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^{\ln(\frac{1}{x-1})}$;
- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx}$.
10. Determine as assíntotas do gráfico de $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 4x - 12}$.